ANALYSE III **Corrigé Série 1** 23 Septembre 2016

1. a) On trouve pour $t = u^2$:

$$I = \int_0^1 \sqrt{t}\ e^{-t} \frac{1}{2\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1\ e^{-t}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right),$$
$$J(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}};$$

et pour $t = -u^2$: $$I = \int_0^{-1} \sqrt{-t}\ e^{t} \frac{-1}{2\sqrt{-t}}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1}^0\ e^{t}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right),$$
$$J(t) = -\frac{1}{2\sqrt{-t}}.$$

b) On trouve, avec le premier changement de variables, que l'aire de Ω est

$$|\Omega| = \int_\Omega dxdy = \int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} |r|\ \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4},\ J(r,\theta) = r,$$

et dans le second cas, on trouve

$$|\Omega| = \int_\Omega dxdy = \int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} |-r|\ \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4},\ J(r,\theta) = -r.$$

On voit que pour $N = 1$ le signe de J est important, et que pour $N > 1$ il faut utiliser $|J|$.

2. Comme $f \in C^0(]a,b[,\mathbb{R}^n)$ toutes les composantes f_k sont continues, i.e. $f_k \in C^0(]a,b[,\mathbb{R})$ pour tout $k = 1,...,n$. Conséquement, la valeur de l'intégrale $\int_a^b f_k(x)dx$ peut être écrite comme la limite des sommes de Riemann comme suit

$$\int_a^b f_k(x)dx = \lim_{d\to\infty}\sum_{i=1}^{d-1} f_k(\bar{x}_i)(x_{i+1}-x_i),\ \forall k = 1,...,n$$

où $a = x_1 < x_2 < ... < x_{d-1} < x_d = b$ désigne une partition de l'intervalle $]a,b[$ et $\bar{x}_i \in]x_i, x_{i+1}[$ désigne un point *choisi* dans l'intervalle $]x_i,x_{i+1}[$. Noter que la limite ci-dessus ne dépend pas du *choix* des points $\bar{x}_i$. On a donc

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d\to\infty}\sum_{i=1}^{d-1} f(\bar{x}_i)(x_{i+1}-x_i).$$

Comme la fonction $|\,.\,| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue dans un voisinage de $\int_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}^n$ et on conclut que

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \lim_{d\to\infty}\left|\sum_{i=1}^{d-1} f(\bar{x}_i)(x_{i+1}-x_i)\right| \le \lim_{d\to\infty}\sum_{i=1}^{d-1} |f(\bar{x}_i)|\,(x_{i+1}-x_i) = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

par propriété (l'inégalité triangulaire) des normes sur $\mathbb{R}^n$ et par définition de l'intégrale de Riemann.

3. a) Faisons le changement des variables en coordonées sphériques:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin\theta \cos\phi \\ r \sin\theta \sin\phi \\ r \cos\theta \end{pmatrix}.$$

avec $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\phi \in]0, \pi[$ et $r \in]R_1, R_2[$. Le Jacobien est

$$|J(r, \theta)| = r^2 \sin\theta.$$

Alors,

$$V = \iiint \mathrm{d}V = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{R_2}^{R_1} r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi = \frac{\pi}{3}(R_1^3 - R_2^3).$$

Ou simplement comme

$$V_{\text{sphère}} = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

alors

$$V = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3}\pi(R_1^3 - R_2^3).$$

b) La position du centre de masse est donnée par $\bar{\mathbf{p}}_A = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, où

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\iiint_A x\rho \, \mathrm{d}V}{M}, \\ \bar{y} &= \frac{\iiint_A y\rho \, \mathrm{d}V}{M}, \\ \bar{z} &= \frac{\iiint_A z\rho \, \mathrm{d}V}{M} \end{aligned}$$

avec $M = \iiint_A \rho \, \mathrm{d}V$.
Comme la densité ρ est constante, on trouve

$$M = \rho V = \rho \frac{\pi}{3}(R_1^3 - R_2^3).$$

Donc

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\rho}{M} \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{R_2}^{R_1} r \sin\theta \cos\phi \cdot r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi = 0, \\ \bar{y} &= \frac{\rho}{M} \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{R_2}^{R_1} r \sin\theta \sin\phi \cdot r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \\ &= \frac{1}{V} \cdot \frac{\pi}{8}(R_1^4 - R_2^4) = \frac{3}{8} \cdot \frac{R_1^4 - R_2^4}{R_1^3 - R_2^3}, \\ \bar{z} &= \frac{\rho}{M} \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{R_2}^{R_1} r \cos\theta \cdot r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \\ &= \frac{1}{V} \cdot \frac{\pi}{8}(R_1^4 - R_2^4) = \frac{3}{8} \cdot \frac{R_1^4 - R_2^4}{R_1^3 - R_2^3}. \end{aligned}$$

c) La position du centre de masse $\bar{\mathbf{p}}_A$ devient pour $R_2 \to R_1$ et M constante:

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= 0, \\
\bar{y} &= \frac{3}{8} \lim_{R_2 \to R_1} \frac{R_1^4 - R_2^4}{R_1^3 - R_2^3} \\
&= \frac{3}{8} \lim_{R_2 \to R_1} \frac{-4R_2^3}{-3R_2^2} = \frac{1}{2} \lim_{R_2 \to R_1} R_2 \\
&= \frac{1}{2} R_1 = \bar{z}.
\end{aligned}$$

On observe que l'on a cependant que

$$\lim_{R_2 \to R_1} \rho = \lim_{R_2 \to R_1} \frac{M}{\frac{\pi}{3}(R_1^3 - R_2^3)} = \infty.$$

4. a) En effet si $\mathbf{v}_1 = b - a$, alors $|b - a| = |\mathbf{v}_1| = \sqrt{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}$.

   b) i. On conclut par le théorème de *Pythagore*

   ii. Le vecteur $\tilde{\mathbf{v}}_2 := \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1$ correspond à la composante de $\mathbf{v}_2$ orthogonale à $\mathbf{v}_1$ (il s'agit du procédé de *Gram-Schmidt*).
   On trouve donc $\text{aire}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \sqrt{\tilde{\mathbf{v}}_2 \cdot \tilde{\mathbf{v}}_2} \sqrt{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} = \sqrt{(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2)(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1) - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1)^2}$

$$= \sqrt{\det \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}} = \sqrt{\det([\mathbf{v}_1 \,|\, \mathbf{v}_2]^T [\mathbf{v}_1 \,|\, \mathbf{v}_2])}$$

   De plus comme $\sqrt{\det(B^T B)} = |\det B|$ pour toute matrice carrée B, on conclut que $\text{aire}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = |\det[\mathbf{v}_1 \,|\, \mathbf{v}_2]|$.

   c) i. On conclut encore par le théorème de *Pythagore*

   ii. On utilise d'abord le point b)ii., puis on se convainc de l'égalité

$$|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2| = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}}$$

   en explicitant le membre de gauche et de droite par exemple.

   iii. La hauteur, dans la troisième direction, du parallélépipède engendré par $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ vaut : $|\tilde{\mathbf{v}}_3| := \frac{1}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|} |(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_3|$. Donc

$$\text{vol}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = |(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_3| = |\det[\mathbf{v}_1 \,|\, \mathbf{v}_2 \,|\, \mathbf{v}_3]|$$

   car $|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2| = \text{aire}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ et par la propriété du produit mixte.

   d) i. La matrice Gramienne devient dans ce cas

$$G_{J,N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

   Alors,

$$\det G_{J,N} = 1 \quad \text{et} \quad V_{J,N} = 1.$$

ii. Si les vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_J$ sont linéairement dépendants, alors il existe des coefficients $c_1, ..., c_{J-1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\mathbf{v}_J = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_{J-1}\mathbf{v}_{J-1}.$$

Donc dans ce cas

$$G_{J,N} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_J \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{v}_{J-1} \cdot \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_{J-1} \cdot \mathbf{v}_J \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{J-1} c_i\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_1 & \cdots & \displaystyle\sum_{i=1}^{J-1} c_i\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_J \end{pmatrix},$$

et comme la dernière ligne est une combinaison linéaire des autres, on a

$$\det\, G_{J,N} = 0.$$

et donc $V_{J,N} = 0$.

iii. Pour $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_N \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} V_{N,N} &= \sqrt{\det\, G_{N,N}} \\ &= \sqrt{\det[\mathbf{v}_1 \,|\, \mathbf{v}_2 \,|\, \ldots \,|\, \mathbf{v}_N]^T[\mathbf{v}_1 \,|\, \mathbf{v}_2 \,|\, \ldots \,|\, \mathbf{v}_N]} \\ &= \sqrt{\overset{2}{\det}[\mathbf{v}_1 \,|\, \mathbf{v}_2 \,|\, \ldots \,|\, \mathbf{v}_N]} \\ &= |\det[\mathbf{v}_1 \,|\, \mathbf{v}_2 \,|\, \ldots \,|\, \mathbf{v}_N]|. \end{aligned}$$

iv. On a

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\phi \\ r\cos\theta\sin\phi \\ -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -r\sin\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix},$$

et

$$G_{J,N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$V_{3,3} = \sqrt{\det\, G_{J,N}} = r^2|\sin\theta| = r^2\sin\theta$$

car $\theta \in]0, \pi[$.

v. Notons d'abord que si on définit la matrice $A_J = [\mathbf{v}_1 \,|\, \ldots \,|\, \mathbf{v}_J]$ alors

$$V_{J,N} = \sqrt{\det(A_J^T\, A_J)}.$$

Par le procédé de *Gram-Schmidt*, on peut exprimer $P_{\mathbf{v}_J}$ par $P_{\mathbf{v}_J} = \mathbf{v}_J - \sum_{k=1}^{J-1} c_k\mathbf{v}_k$ où $c_k = \frac{\mathbf{v}_J \cdot \mathbf{v}_k}{\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k}$ $\forall k < J$.
De plus, on observe que $|P_{\mathbf{v}_J}|V_{J-1,N} = \sqrt{P_{\mathbf{v}_J} \cdot P_{\mathbf{v}_J}}\sqrt{\det(A_{J-1}^T\, A_{J-1})}$

$= \sqrt{\det([A_{J-1} \,|\, P_{\mathbf{v}_J}]^T [A_{J-1} \,|\, P_{\mathbf{v}_J}])}$ par orthogonalité de $P_{\mathbf{v}_J}$ et des colonnes de A_{J-1}, et que $[A_{J-1} \,|\, P_{\mathbf{v}_J}] = A_J T_{J-1}$ où

$$T_{J-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & -c_1 & \\ 0 & 1 & \dots & -c_2 & \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \end{pmatrix}$$

par définition de $P_{\mathbf{v}_J}$.

On conclut donc que $|P_{\mathbf{v}_J}| V_{J-1,N} = \sqrt{\det(T_{J-1}^T A_J^T A_J T_{J-1})} = V_{J,N}$ car $\det T_{J-1} = 1$.

vi. Les formules pour $V_{1,1}$, $V_{1,2}$, $V_{2,2}$ et $V_{1,3}$, $V_{2,3}$, $V_{3,3}$ sont données dans les parties a), b) et c).