EPFL Section : **PH**
Prof John H. Maddocks

ANALYSE III **Corrigé Série 2** 29 Septembre 2017

---

1. a) Comme $\langle f(t), g(t)\rangle = \sum_{i=1}^N f_i(t)g_i(t)$ où $f_i, g_i \in C^1(J, \mathbb{R})$ pour $i = 1, ..., N$, on a que $\langle f, g\rangle \in C^1(J, \mathbb{R})$ (comme composition de fonctions différentiables) et

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle f(t), g(t)\rangle &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt}f_i(t)g_i(t) + f_i(t)\frac{d}{dt}g_i(t)\right] \\ &= \langle \frac{d}{dt}f(t), g(t)\rangle + \langle f(t), \frac{d}{dt}g(t)\rangle \ \ \forall t \in J. \end{aligned}$$

   b) Une première manière de conclure est :
   Posons $h(s) = \sqrt{s}$ pour $s \geq 0$. Alors $h \in C([0, \infty), \mathbb{R}) \cap C^1((0, \infty), \mathbb{R})$.
   Posons $k(t) = \langle f(t), f(t)\rangle$ pour $t \in J$. Alors $k \in C^1(J, \mathbb{R})$ (point a).
   Or $\|f(t)\| = h(k(t)) = h \circ k(t)$ où $h \circ k \in C(J, \mathbb{R}) \cap C^1(J_1, \mathbb{R})$.
   Une seconde est :
   La fonction $\|f(t)\|$ est continue car c'est une composition de fonctions continues. De plus, en utilisant a), on a $\frac{d}{dt}\|f(t)\| = \frac{1}{\|f(t)\|}\langle \frac{d}{dt}f(t), f(t)\rangle$. Donc $\|f(t)\| \in C^1(J_1, \mathbb{R})$.

   c) Comme $\frac{d}{dt}\|f(t)\|^2 = \frac{d}{dt}\langle f(t), f(t)\rangle = 2\langle f(t), \frac{d}{dt}f(t)\rangle$ pour tout $t \in J$, alors $\langle f, \frac{d}{dt}f\rangle \equiv 0$ sur J
   $\iff \frac{d}{dt}\|f(t)\|^2 \equiv 0$ sur J
   $\iff \|f(t)\|^2$ est constante sur J, car $\|f\|^2 \in C^1(J, \mathbb{R})$ et J est connexe
   $\iff \|f(t)\|$ est constante sur J, car $\|f(t)\| \geq 0$.

2. a) Il s'agit d'une branche d'hyperbole. On trouve $\frac{d}{dt}\alpha(t) = \omega(\sinh(\omega t), \cosh(\omega t))$ et donc $\frac{d}{dt}\alpha(0) = (0, \omega)$, et $\frac{d^2}{dt^2}\alpha(t) = \omega^2(\cosh(\omega t), \sinh(\omega t))$ d'où $\frac{d^2}{dt^2}\alpha(0) = (\omega^2, 0)$.

   b) Il s'agit d'une cycloïde généralisée (dite trochoïde). On trouve $\frac{d}{dt}\alpha(t) = (v - a\omega\sin(\omega t), a\omega\cos(\omega t))$ et donc $\frac{d}{dt}\alpha(0) = (v, a\omega)$, et $\frac{d^2}{dt^2}\alpha(t) = -a\omega^2(\cos(\omega t), \sin(\omega t))$ d'où $\frac{d^2}{dt^2}\alpha(0) = (-a\omega^2, 0)$.

   c) Il s'agit d'une hélice. On trouve $\frac{d}{dt}\alpha(t) = (-a\omega\sin(\omega t), a\omega\cos(\omega t), v)$ et donc $\frac{d}{dt}\alpha(0) = (0, a\omega, v)$, et $\frac{d^2}{dt^2}\alpha(t) = -a\omega^2(\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0)$ d'où $\frac{d^2}{dt^2}\alpha(0) = (-a\omega^2, 0, 0)$.

   On observe que la trochoïde peut être vue comme étant obtenue par la superposition d'un mouvement de rotation (avec vitesse angulaire ω) et d'un mouvement de translation (avec vitesse v) dans le même plan, tandis que l'hélice est obtenue par la superposition du même mouvement de rotation et mais avec une translation dans la direction orthogonale au plan de rotation.

3. a) A est une demi-ellipse. Posons

$$\alpha(y) = \left(a\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2}, y\right) \text{ pour } y \in (-b, b).$$

Alors $\operatorname{Im}\alpha = A$ et $\alpha \in C^1((-b,b),\mathbb{R}^2)$. De plus,

$$\alpha(y_1) = \alpha(y_2) \text{ pour } y_1, y_2 \in (-b,b) \Rightarrow y_1 = y_2.$$

et donc α est injective et $\alpha^{-1}(x,y) = y$ pour tout $(x,y) \in A$ (car α est un graphe). D'où la fonction $\alpha^{-1} : A \to (-b,b)$ est continue, ce qui montre que $\alpha : (-b,b) \to A$ est un homéomorphisme. De plus, comme

$$\alpha'(y) = \left(-\frac{a}{b^2}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{-1/2} y, 1\right)$$

et donc $\alpha'(y) \neq 0$ pour tout $y \in (-b,b)$, on a bien que $A = \operatorname{Im}\alpha$ est un arc régulier et α est une représentation paramétrique régulière.

Remarque :

Il y a d'autres possibilités. Posons

$$\beta(\theta) = (a\cos\theta, b\sin\theta),\ \theta \in (-\pi/2, \pi/2).$$

On vérifie facilement que c'est aussi une représentation paramétrique régulière de A.

b) A est une branche d'hyperbole. Posons

$$\alpha(\theta) = (a\cosh\theta, b\sinh\theta),\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Alors $\alpha \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$ et α est injective car

$$\alpha(\theta) = \alpha(\psi) \Rightarrow \sinh\theta = \sinh\psi \Rightarrow \theta = \psi \text{ car } \frac{d}{d\theta}\sinh\theta = \cosh\theta \geq 1 > 0$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Autrement dit, sinh est une fonction strictement croissante.

On cherche à présent à montrer que α et un homéomorphisme. Si $(x,y) \in A$, on pose $\theta := \operatorname{arcsinh}(y/b)$. Or on remarque que

$$a\cosh\theta = a\{1+\sinh^2\theta\}^{1/2} = a\Big\{1+\big(\frac{y}{b}\big)^2\Big\}^{1/2} = x, \text{ car } (x,y) \in A.$$

Ce qui entraîne que $\alpha(\theta) = (x,y)$. D'où $\operatorname{Im}\alpha = A$ et

$\alpha^{-1}(x,y) = \operatorname{arcsinh}(y/b) \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$.

Ainsi $\alpha : \mathbb{R} \to A$ est un homéomorphisme. De plus,

$$\alpha'(\theta) = (a\sinh\theta, b\cosh\theta) \neq 0 \text{ car } \cosh\theta \geq 1 \text{ pour tout } \theta \in \mathbb{R}.$$

Ceci montre que $A = \operatorname{Im}\alpha$ est un arc régulier et que α est une représentation paramétrique régulière.

Remarque :

Il y a d'autres possibilités. Posons

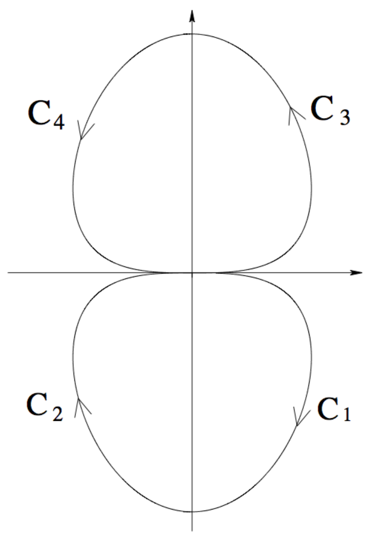
$$\alpha(y) = \left(a\left(1+\frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2}, y\right) \text{ pour } y \in \mathbb{R},$$

c'est aussi une représentation paramétrique régulière de A.

4. a) La paramétrisation n'est pas régulière car $q'(t) = 3\left(t^2, t^2\right)$ et $q'(0) = 0$. Mais l'arc est régulier car on peut en trouver une paramétrisations régulière. Par exemple $\alpha(u) = (u, u)$ pour $u \in (-1, 1)$. La paramétrisation $q = \left(t^3, t^3\right)$ est trop lente en $t = 0$.

   b) Comme avant, la paramétrisation n'est pas régulière car $q'(0) = 0$. Mais contrairement à avant, $C = \left\{\left(t^2, t^2\right) : t \in (-1, 1)\right\}$ n'est pas un arc régulier car l'extrémité $\mathbf{0} \in C$. C ne peut donc pas être l'image par homéomorphisme d'un intervalle J ouvert.

5. L'ensemble C a la forme suivante :



   a) Soient $t_1, t_2 \in (-\pi, \pi)$ tels que $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$. On a donc :

$$
\begin{aligned}
& (\sin t_1 \cos t_1, \sin^3 t_1) = (\sin t_2 \cos t_2, \sin^3 t_2) \\
\Longleftrightarrow \quad & \sin^3 t_1 = \sin^3 t_2 \quad \text{et} \quad \sin t_1 \cos t_1 = \sin t_2 \cos t_2 \\
\Longleftrightarrow \quad & \sin t_1 = \sin t_2 \quad \text{et} \quad \sin t_1 \cos t_1 = \sin t_2 \cos t_2.
\end{aligned}
$$

   Or, $\sin t_1 = \sin t_2$ implique $t_1 = t_2$ ou $t_1 = \pi - t_2$. L'égalité $\sin t_1 \cos t_1 = \sin t_2 \cos t_2$ élimine la deuxième alternative. Donc $t_1 = t_2$ et $\alpha(t)$ est injective sur $(-\pi, \pi)$.

   b) On a, pour $t \in (-\pi, \pi)$:

$$
\begin{aligned}
& \alpha'(t) = (\cos 2t, 3\sin^2 t \cos t) = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \cos 2t = 0 \quad \text{et} \quad 3\sin^2 t \cos t = 0.
\end{aligned}
$$

   Or, $\cos 2t = 0$ implique $t = \pm\pi/4$ ou $t = \pm 3\pi/4$. Comme, pour ces quatre valeurs, on a $\sin^2 t \cos t \neq 0$, on a bien que $\alpha'(t) \neq 0$ pour tout $t \in (-\pi, \pi)$.

   c) On pose (voir la figure ci-dessus)

   * $C_1 = \alpha((-\pi, -\pi/2])$
   * $C_2 = \alpha((-\pi/2, 0))$

* $C_3 = \alpha([0, \pi/2])$
* $C_4 = \alpha((\pi/2, \pi))$.

Pour $(x, y) \in C_2 \cup C_3$ on a simplement $\alpha^{-1}(x, y) = \arcsin(y^{1/3})$. Cependant cette fonction n'est pas l'inverse de α pour $(x, y) \in C_1 \cup C_4$ par définition de la fonction $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$.
Par exemple pour $(x, y) \in C_1$, comme $t \in (-\pi, -\pi/2]$ et que $y = \sin^3 t$, il faut écrire $y^{1/3} = \sin t = -\sin(t + \pi)$, ce qui donne $t = \arcsin(-y^{1/3}) - \pi$.
On conlcut donc que l'inverse de α est donné par

$$\alpha^{-1}(x, y) = \begin{cases} \arcsin(-y^{1/3}) - \pi \text{ pour } (x, y) \in C_1 \\ \arcsin(y^{1/3}) \text{ pour } (x, y) \in C_2 \\ \arcsin(y^{1/3}) \text{ pour } (x, y) \in C_3 \\ \arcsin(-y^{1/3}) + \pi \text{ pour } (x, y) \in C_4 \end{cases}$$

Il se trouve que α^{-1} n'est pas continue en $(0, 0)$. Pour le prouver, on montre que la valeur de α^{-1} n'est pas la même quand on approche l'origine par l'arc C_1 ou par l'arc C_2, précisement

$$\lim_{(x,y)\to(0_+,0_-),(x,y)\in C_1} \alpha^{-1}(x, y) = -\pi,$$
$$\lim_{(x,y)\to(0_-,0_-),(x,y)\in C_2} \alpha^{-1}(x, y) = 0.$$

Ainsi, α^{-1} n'est pas continue en $(0, 0)$.

6. La longueur de C est donc dans ce cas $|C| = \displaystyle\int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\| dt$ où
$\alpha'(t) = (\cos t - \sin t, \sin t + \cos t, 1)e^t$. Comme $\|\alpha'(t)\| = e^t\{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 + 1\}^{1/2} = e^t\sqrt{3}$ on trouve $|C| = \sqrt{3}(e^{2\pi} - 1)$.

7. Comme $\|\alpha'(t)\| = (3^2 + 9t^4)^{1/2} = 3(1 + t^4)^{1/2}$, on a

$$\begin{aligned} \int_C f\, ds &= \int_0^1 f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|\, dt = \int_0^1 f(3t, t^3)3(1 + t^4)^{1/2}\, dt \\ &= 3\int_0^1 (27t^3 + t^3)(1 + t^4)^{1/2}\, dt = 3 \cdot 28 \int_0^1 t^3(1 + t^4)^{1/2}\, dt \\ &= \left[14(1 + t^4)^{3/2}\right]_0^1 = 14(2^{3/2} - 1) = 28\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$