ANALYSE III **Corrigé Série 3** 7 Octobre 2016

1. a) C est une hélice de diamètre R et de pas h dont l'axe se trouve dans la direction z.

   b) Comme $C = Im\alpha$, il suffit de montrer que α est une représentation paramétrique régulière de C. Notons d'abord que α est une application injective car

   $$\alpha(t) = \alpha(s) \Rightarrow \alpha_3(t) = \alpha_3(s) \Rightarrow t = s.$$

   Réciproquement, pour tout $(x, y, z) \in C$, alors il existe $t \in (0, 2\pi)$ tel que $z = ht$ car $C = \mathrm{Im}\alpha$, précisement on a $\alpha^{-1} : C \to (0, 2\pi)$ avec $\alpha^{-1}(x, y, z) = \frac{z}{h}$. On observe que $\alpha \in C^0\left((0, 2\pi), \mathbb{R}^3\right)$ et que $\alpha^{-1} \in C^0\left(\mathbb{R}^3, (0, 2\pi)\right)$ et donc que $\alpha : (0, 2\pi) \to \mathrm{Im}\,\alpha$ est un homéomorphisme. De plus comme

   $$\alpha'(t) = (-R\sin t, R\cos t, h) \neq (0, 0, 0).$$

   on conclut α est une représentation paramétrique régulière de C et donc que C est un arc régulier.

   c) Pour $p = (x, y, z) \in C$, la droite tangente en (x, y, z) peut être paramétrisée par

   $$\begin{aligned} & (x, y, z) + \lambda\{\alpha'((\alpha^{-1}(x, y, z)))\},\ \lambda \in \mathbb{R} \\ = \ & (x, y, z) + \lambda(-R\sin\frac{z}{h}, R\cos\frac{z}{h}, h),\ \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   d) i. On trouve $\theta(t) = \int_0^t \sqrt{R^2 + h^2}d\tau = t\sqrt{R^2 + h^2}$ et donc $\psi(s) = \frac{1}{\sqrt{R^2+h^2}}s$

   ii. La fonction $\theta(t)$ donne la longueur de C entre $\alpha(0)$ et $\alpha(t)$ en fonction de t, réciproquement $\psi(s)$ donne le paramétre t en fonction de la longueur s.

   iii. On a donc la paramétrisation par la longueur d'arc suivante:

   $$\beta(s) = \left(R\,\cos\frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}}, R\,\sin\frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}}, h\,\frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}}\right)$$

   on se convainc que β est représentation paramétrique régulière de C car α en est une et que ψ est un difféomorphisme, et que de plus $\psi'(s) > 0\ \forall s$. Pour conclure que $\|\beta'(s)\| = 1$ on peut soit effectuer un calcul direct en utilisant explicitement β, soit utiliser les rèlles de dérivation en chaine sur la définition $\beta = \alpha \circ \psi$.

2. a) La masse de C est donnée par

   $$M = \int_C \rho ds = \rho\int_0^T \|\alpha'(t)\|dt = \rho\int_0^T \sqrt{1 + h^2}dt = \rho T\sqrt{1 + h^2}.$$

   et le centre de gravité de C par

   $$(x_C, y_C, z_C) = \frac{1}{M}\Big(\int_C \rho x ds, \int_C \rho y ds, \int_C \rho z ds\Big).$$

C'est-à-dire:

$$\begin{aligned}
\int_C x ds &= \int_0^T \cos t\sqrt{1+h^2}dt = \sin T\sqrt{1+h^2}.\\
\int_C y ds &= \int_0^T \sin t\sqrt{1+h^2}dt = (1-\cos T)\sqrt{1+h^2}.\\
\int_C z ds &= \int_0^T ht\sqrt{1+h^2}dt = \frac{1}{2}hT^2\sqrt{1+h^2}.
\end{aligned}$$

D' où,

$$(x_C, y_C, z_C) = \left(\frac{1}{T}\sin T, \frac{1}{T}(1-\cos T), \frac{1}{2}hT\right).$$

b) Sa masse serait:

$$\int_C \rho(x,y,z)ds = \int_0^T \rho(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt = \int_0^T (\cos^4 t + \sin^2 t)\sqrt{1+h^2}dt$$

En utilisanrt que $\sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2}$ et que

$$\cos^4 t = \left(\cos^2 t\right)^2 = \left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right)^2 = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{8}\cos(4t)$$

on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^T (\cos^4 t + \sin^2 t)\sqrt{1+h^2}dt\\
&= \sqrt{1+h^2}\int_0^T \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{8}\cos(4t) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)\right) dt\\
&= \sqrt{1+h^2}\left(\frac{7}{8}T + \frac{1}{32}\sin(4T)\right).
\end{aligned}$$

c) La masse vaut dans ce cas $M = \int_C \rho ds = \int_0^T Pht\sqrt{1+h^2}dt = \frac{PhT^2}{2}\sqrt{1+h^2}$. Les coordonnées du centre de masse sont donc:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{M}\int_C x ds &= \frac{2}{T^2}\int_0^T t\cos t dt = \frac{2}{T^2}(t\sin t + \cos t)|_0^T = \frac{2}{T^2}(T\sin T + \cos T - 1).\\
\frac{1}{M}\int_C y ds &= \frac{2}{T^2}\int_0^T t\sin t dt = \frac{-2}{T^2}(t\cos t - \sin t)|_0^T = \frac{-2}{T^2}(T\cos T - \sin T).\\
\frac{1}{M}\int_C z ds &= \frac{2h}{T^2}\int_0^T t^2 dt = \frac{2h}{3}T.
\end{aligned}$$

3. L'ensemble C est un quart de cercle contenu dans le plan $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$ dont tous les points ont des coordonnées strictement positives. Ceci motive la paramétrisation suivante

$$\alpha(\phi) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\phi, \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\phi, \cos\phi\right) \quad \text{avec } \phi \in (0, \pi/2).$$

On vérifie facilement que $\alpha : (0, \pi/2) \to \mathbb{R}^3$ est une représentation paramétrique régulière de C.

Par définition

$$\int_C (x+y)ds = \int_0^{\pi/2} (\alpha_1(\phi) + \alpha_2(\phi))\|\alpha'(\phi)\| d\phi$$

où $\alpha'(\phi) = (\sqrt{2}/2\cos\phi, \sqrt{2}/2\cos\phi, -\sin\phi)$. Or comme $\|\alpha'(\phi)\| = 1$ on a

$$\int_C (x+y)ds = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2}\sin\phi \, d\phi = \sqrt{2}.$$

4. a) De la série 2 ex. 6. on a

$$\theta(t) = \sqrt{3}\int_{-\pi}^{t} e^{\tau} d\tau = \sqrt{3}\{e^t - e^{-\pi}\}$$

d' où

$$\psi(s) := \theta^{-1}(s) = \log\left\{\frac{s}{\sqrt{3}} + e^{-\pi}\right\}.$$

On trouve donc $\beta(s) := (\alpha \circ \psi)(s)$.

b) i. Pour tout $\tau \in (-\pi^{1/3}, \pi^{1/3})$, on pose $t = \phi(\tau) := \tau^3$.
On observe que ϕ est un homoéomorphisme dont l'inverse est donné par $\phi^{-1}(t) = t^{\frac{1}{3}}$.
Alors d'une part on a bien que

$$\phi(\tau) \in (-\pi, \pi)$$

et que

$$\alpha(\phi(\tau)) = \alpha(\tau^3) = (e^{\tau^3}\cos(\tau^3), e^{\tau^3}\sin(\tau^3), e^{\tau^3}) = \gamma(\tau) \ \forall \tau \in (-\pi^{1/3}, \pi^{1/3})$$

D'où $\operatorname{Im}\gamma \subset C$.
D'autre part, on a bien que pour tout $t \in (-\pi, \pi)$

$$\phi^{-1}(t) \in (-\pi^{1/3}, \pi^{1/3})$$

et

$$\gamma(\tau) = \gamma(t^{1/3}) = (e^t\cos t, e^t\sin t, e^t) = \alpha(t), \ \forall t \in (-\pi, \pi),$$

donc $C = \operatorname{Im}\alpha \subset \operatorname{Im}\gamma$. On conclut que $C = \operatorname{Im}\gamma$.

ii. On définit ϕ: $(-\pi^{1/3}, \pi^{1/3}) \to (-\pi, \pi) = \operatorname{Im}\phi$ en posant $\phi(\tau) = \tau^3$. Par la définition de γ, on a alors

$$\gamma(\tau) = \alpha(\phi(\tau)),$$

pour tout $\tau \in (-\pi^{1/3}, \pi^{1/3})$.
Il est clair que ϕ est un homéomorphisme et ϕ est de classe C^1. Par contre, $\phi'(\tau) = 3\tau^2$ et donc $\phi'(0) = 0$. Ce qui implique que $\gamma'(0) = \alpha'(\phi(0))\phi'(0) = 0$. Donc γ n'est pas une représentation paramétrique régulière de C (bien que C soit un arc régulier..!).

5. a) On définit $T_\alpha : (0,1) \to \mathbb{R}^3$ par

$$T_\alpha(\alpha(t)) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{(e^t, -e^{-t}, 2e^{2t})}{(e^{2t} + e^{-2t} + 4e^{4t})^{1/2}}.$$

Pour $(x,y,z) \in C$, on a, par exemple, $\alpha^{-1}(x,y,z) = \ln x$. On peut donc définir $T_1 : C \to \mathbb{R}^3$ par

$$T_1(x,y,z) := T_\alpha(\alpha^{-1}(x,y,z)) = \frac{\left(x, -\frac{1}{x}, 2x^2\right)}{\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 4x^4\right)^{1/2}} = \frac{(x, -y, 2z)}{(x^2 + y^2 + 4z^2)^{1/2}}.$$

et $T_2(x,y,z) = -T_1(x,y,z)$ pour tous $(x,y,z) \in C$.

b) On a donc

$$\begin{aligned}
\int_{(C,T_1)} f \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^1 \langle f(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle dt \\
&= \int_0^1 \langle f(e^t, e^{-t}, e^{2t}), (e^t, -e^{-t}, 2e^{2t}) \rangle dt \\
&= \int_0^1 e^t e^{2t} e^t + [e^{-t} + e^t](-e^{-t}) + e^t 2e^{2t} dt \\
&= \int_0^1 e^{4t} - e^{-2t} - 1 + 2e^{3t} dt \\
&= \frac{1}{4}[e^4 - 1] + \frac{1}{2}[e^{-2} - 1] - 1 + \frac{2}{3}[e^3 - 1].
\end{aligned}$$

et $\int_{(C,T_2)} f \cdot d\mathbf{s} = -\int_{(C,T_1)} f \cdot d\mathbf{s}$.