

1. a) C est une hélice de diamètre R et de pas h dont l'axe se trouve dans la direction z .
b) Comme $C = \text{Im } \alpha$, il suffit de montrer que α est une représentation paramétrique régulière de C . Notons d'abord que α est une application injective car

$$\alpha(t) = \alpha(s) \Rightarrow \alpha_3(t) = \alpha_3(s) \Rightarrow t = s.$$

Réciproquement, pour tout $(x, y, z) \in C$, alors il existe $t \in (0, 2\pi)$ tel que $z = ht$ car $C = \text{Im } \alpha$, précisément on a $\alpha^{-1} : C \rightarrow (0, 2\pi)$ avec $\alpha^{-1}(x, y, z) = \frac{z}{h}$. On observe que $\alpha \in C^0((0, 2\pi), \mathbb{R}^3)$ et que $\alpha^{-1} \in C^0(\mathbb{R}^3, (0, 2\pi))$ et donc que $\alpha : (0, 2\pi) \rightarrow \text{Im } \alpha$ est un homéomorphisme. De plus comme

$$\alpha'(t) = (-R \sin t, R \cos t, h) \neq (0, 0, 0).$$

on conclut α est une représentation paramétrique régulière de C et donc que C est un arc régulier.

- c) Pour $p = (x, y, z) \in C$, la droite tangente en (x, y, z) peut être paramétrisée par

$$\begin{aligned} & (x, y, z) + \lambda \{ \alpha'(\alpha^{-1}(x, y, z)) \}, \lambda \in \mathbb{R} \\ &= (x, y, z) + \lambda \left(-R \sin \frac{z}{h}, R \cos \frac{z}{h}, h \right), \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- d) i. On trouve $\theta(t) = \int_0^t \sqrt{R^2 + h^2} d\tau = t\sqrt{R^2 + h^2}$ et donc $\psi(s) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}} s$
ii. La fonction $\theta(t)$ donne la longueur de C entre $\alpha(0)$ et $\alpha(t)$ en fonction de t , réciproquement $\psi(s)$ donne le paramètre t en fonction de la longueur s .
iii. On a donc la paramétrisation par la longueur d'arc suivante:

$$\beta(s) = \left(R \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}}, R \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}}, h \frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right)$$

on se convainc que β est représentation paramétrique régulière de C car α en est une et que ψ est un difféomorphisme, et que de plus $\psi'(s) > 0 \forall s$. Pour conclure que $\|\beta'(s)\| = 1$ on peut soit effectuer un calcul direct en utilisant explicitement β , soit utiliser les règles de dérivation en chaîne sur la définition $\beta = \alpha \circ \psi$.

2. a) La masse de C est donnée par

$$M = \int_C \rho ds = \rho \int_0^T \|\alpha'(t)\| dt = \rho \int_0^T \sqrt{1 + h^2} dt = \rho T \sqrt{1 + h^2}.$$

et le centre de gravité de C par

$$(x_C, y_C, z_C) = \frac{1}{M} \left(\int_C \rho x ds, \int_C \rho y ds, \int_C \rho z ds \right).$$

C'est-à-dire:

$$\begin{aligned}\int_C x ds &= \int_0^T \cos t \sqrt{1+h^2} dt = \sin T \sqrt{1+h^2}. \\ \int_C y ds &= \int_0^T \sin t \sqrt{1+h^2} dt = (1-\cos T) \sqrt{1+h^2}. \\ \int_C z ds &= \int_0^T ht \sqrt{1+h^2} dt = \frac{1}{2} h T^2 \sqrt{1+h^2}.\end{aligned}$$

D'où,

$$(x_C, y_C, z_C) = \left(\frac{1}{T} \sin T, \frac{1}{T} (1 - \cos T), \frac{1}{2} h T \right).$$

b) Sa masse serait:

$$\int_C \rho(x, y, z) ds = \int_0^T \rho(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^T (\cos^4 t + \sin^2 t) \sqrt{1+h^2} dt$$

En utilisant que $\sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2}$ et que

$$\cos^4 t = (\cos^2 t)^2 = \left(\frac{1+\cos(2t)}{2} \right)^2 = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos(2t) + \frac{1}{8} \cos(4t)$$

on obtient

$$\begin{aligned}& \int_0^T (\cos^4 t + \sin^2 t) \sqrt{1+h^2} dt \\ &= \sqrt{1+h^2} \int_0^T \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos(2t) + \frac{1}{8} \cos(4t) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2t) \right) dt \\ &= \sqrt{1+h^2} \left(\frac{7}{8} T + \frac{1}{32} \sin(4T) \right).\end{aligned}$$

c) La masse vaut dans ce cas $M = \int_C \rho ds = \int_0^T P h t \sqrt{1+h^2} dt = \frac{PhT^2}{2} \sqrt{1+h^2}$. Les coordonnées du centre de masse sont donc:

$$\begin{aligned}\frac{1}{M} \int_C \rho x ds &= \frac{2}{T^2} \int_0^T t \cos t dt = \frac{2}{T^2} (t \sin t + \cos t) \Big|_0^T = \frac{2}{T^2} (T \sin T + \cos T - 1). \\ \frac{1}{M} \int_C \rho y ds &= \frac{2}{T^2} \int_0^T t \sin t dt = \frac{-2}{T^2} (t \cos t - \sin t) \Big|_0^T = \frac{-2}{T^2} (T \cos T - \sin T). \\ \frac{1}{M} \int_C \rho z ds &= \frac{2h}{T^2} \int_0^T t^2 dt = \frac{2h}{3} T.\end{aligned}$$

3. L'ensemble C est un quart de cercle contenu dans le plan $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$ dont tous les points ont des coordonnées strictement positives. Ceci motive la paramétrisation suivante

$$\alpha(\phi) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \phi, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \phi, \cos \phi \right) \text{ avec } \phi \in (0, \pi/2).$$

On vérifie facilement que $\alpha : (0, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une représentation paramétrique régulière de C .

Par définition

$$\int_C (x + y) ds = \int_0^{\pi/2} (\alpha_1(\phi) + \alpha_2(\phi)) \|\alpha'(\phi)\| d\phi$$

où $\alpha'(\phi) = (\sqrt{2}/2 \cos \phi, \sqrt{2}/2 \cos \phi, -\sin \phi)$. Or comme $\|\alpha'(\phi)\| = 1$ on a

$$\int_C (x + y) ds = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2} \sin \phi d\phi = \sqrt{2}.$$

4. a) De la série 2 ex. 6. on a

$$\theta(t) = \sqrt{3} \int_{-\pi}^t e^\tau d\tau = \sqrt{3} \{e^t - e^{-\pi}\}$$

d' où

$$\psi(s) := \theta^{-1}(s) = \log \left\{ \frac{s}{\sqrt{3}} + e^{-\pi} \right\}.$$

On trouve donc $\beta(s) := (\alpha \circ \psi)(s)$.

b) i. Pour tout $\tau \in (-\pi^{1/3}, \pi^{1/3})$, on pose $t = \phi(\tau) := \tau^3$.

On observe que ϕ est un homéomorphisme dont l'inverse est donné par $\phi^{-1}(t) = t^{1/3}$.

Alors d'une part on a bien que

$$\phi(\tau) \in (-\pi, \pi)$$

et que

$$\alpha(\phi(\tau)) = \alpha(\tau^3) = (e^{\tau^3} \cos(\tau^3), e^{\tau^3} \sin(\tau^3), e^{\tau^3}) = \gamma(\tau) \quad \forall \tau \in (-\pi^{1/3}, \pi^{1/3})$$

D'où $\text{Im } \gamma \subset C$.

D'autre part, on a bien que pour tout $t \in (-\pi, \pi)$

$$\phi^{-1}(t) \in (-\pi^{1/3}, \pi^{1/3})$$

et

$$\gamma(\tau) = \gamma(t^{1/3}) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t) = \alpha(t), \quad \forall t \in (-\pi, \pi),$$

donc $C = \text{Im } \alpha \subset \text{Im } \gamma$. On conclut que $C = \text{Im } \gamma$.

ii. On définit $\phi: (-\pi^{1/3}, \pi^{1/3}) \rightarrow (-\pi, \pi) = \text{Im } \phi$ en posant $\phi(\tau) = \tau^3$. Par la définition de γ , on a alors

$$\gamma(\tau) = \alpha(\phi(\tau)),$$

pour tout $\tau \in (-\pi^{1/3}, \pi^{1/3})$.

Il est clair que ϕ est un homéomorphisme et ϕ est de classe C^1 . Par contre, $\phi'(\tau) = 3\tau^2$ et donc $\phi'(0) = 0$. Ce qui implique que $\gamma'(0) = \alpha'(\phi(0))\phi'(0) = 0$. Donc γ n'est pas une représentation paramétrique régulière de C (bien que C soit un arc régulier..!).

5. a) On définit $T_\alpha : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ par

$$T_\alpha(\alpha(t)) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{(e^t, -e^{-t}, 2e^{2t})}{(e^{2t} + e^{-2t} + 4e^{4t})^{1/2}}.$$

Pour $(x, y, z) \in C$, on a, par exemple, $\alpha^{-1}(x, y, z) = \ln x$. On peut donc définir $T_1 : C \rightarrow \mathbb{R}^3$ par

$$T_1(x, y, z) := T_\alpha(\alpha^{-1}(x, y, z)) = \frac{(x, -\frac{1}{x}, 2x^2)}{(x^2 + \frac{1}{x^2} + 4x^4)^{1/2}} = \frac{(x, -y, 2z)}{(x^2 + y^2 + 4z^2)^{1/2}}.$$

et $T_2(x, y, z) = -T_1(x, y, z)$ pour tous $(x, y, z) \in C$.

b) On a donc

$$\begin{aligned} \int_{(C, T_1)} f \cdot ds &= \int_0^1 \langle f(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle dt \\ &= \int_0^1 \langle f(e^t, e^{-t}, e^{2t}), (e^t, -e^{-t}, 2e^{2t}) \rangle dt \\ &= \int_0^1 e^t e^{2t} e^t + [e^{-t} + e^t](-e^{-t}) + e^t 2e^{2t} dt \\ &= \int_0^1 e^{4t} - e^{-2t} - 1 + 2e^{3t} dt \\ &= \frac{1}{4}[e^4 - 1] + \frac{1}{2}[e^{-2} - 1] - 1 + \frac{2}{3}[e^3 - 1]. \end{aligned}$$

et $\int_{(C, T_2)} f \cdot ds = - \int_{(C, T_1)} f \cdot ds$.