EPFL Section : **PH**
Prof. John H. Maddocks

ANALYSE III **Corrigé Série 4** 13 Octobre 2017

---

1. Remarquons d'abord que $x^2 + y^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$.
   Première paramétrisation : Coordonnées cylindriques centrées au point $(1, 0, 0)$:

$$x - 1 = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z.$$

— (x, y, z) vérifie $x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow r = 1$.
— (x, y, z) vérifie $x^2 + y^2 + z^2 = 4 \Leftrightarrow (1 + r\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta + z^2 = 4$.

$$\begin{aligned}
\text{et donc } (x,y,z) \in C \Leftrightarrow & \begin{cases} r = 1 \text{ et } 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta + z^2 = 4 \\ 0 < \theta < \pi \text{ et } z > 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow r = 1 \text{ et } z^2 = 2(1-\cos\theta),\ 0 < \theta < \pi,\ z > 0 \\
& \Leftrightarrow r = 1,\ z = \sqrt{2(1-\cos\theta)},\ 0 < \theta < \pi.
\end{aligned}$$

Ceci motive la paramétrisation suivante

$$\alpha(\theta) = (1 + \cos\theta, \sin\theta, \sqrt{2(1-\cos\theta)}) \text{ pour } 0 < \theta < \pi.$$

Notons que $\sqrt{2(1-\cos\theta)}$ est strictement croissante sur $(0, \pi)$. On vérifie que $\alpha : (0, \pi) \to \mathbb{R}^3$ est une représentation paramétrique régulière de C et que (C, T_α) va du point $(2, 0, 0)$ au point $(0, 0, 2)$.
Donc

$$\begin{aligned}
& \int_{\vec{C}} y dx - (x-1)dy + zdz \\
= & \int_0^\pi [\alpha_2(\theta)\alpha_1'(\theta) - (\alpha_1(\theta) - 1)\alpha_2'(\theta) + \alpha_3(\theta)\alpha_3'(\theta)]\, d\theta \\
= & \int_0^\pi [-\sin^2\theta - \cos^2\theta + \{2(1-\cos\theta)\}^{1/2}\{2(1-\cos\theta)\}^{-1/2}\sin\theta]\, d\theta \\
= & \int_0^\pi (-1 + \sin\theta)\, d\theta = -\pi + 2.
\end{aligned}$$

Seconde paramétrisation : En coordonnées sphériques (centrées en (0,0,0)) :

$$x = r\sin\theta\sin\varphi \quad y = r\sin\theta\cos\varphi \quad z = r\cos\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi, \ \ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

(x, y, z) vérifie $x^2 + y^2 + z^2 = 4 \Leftrightarrow r = 2$.
(x, y, z) vérifie $x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow \sin\theta = 0$ ou $\sin\theta = \sin\varphi$.
(x, y, z) dans le premier octant $\Leftrightarrow x > 0$, $y > 0$ et $z > 0$.
Or $x > 0 \Rightarrow \sin\theta \neq 0$, d'où $\sin\theta = \sin\varphi$. Autrement dit, $\theta = \varphi$ ou $\theta = \pi - \varphi$.
$z > 0 \Rightarrow \cos\theta > 0 \Rightarrow \theta \in (0, \pi/2)$.
$y > 0 \Rightarrow \cos\varphi > 0 \Rightarrow \theta = \varphi$.
Donc $(x, y, z) \in C \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2, \theta = \varphi \\ 0 < \theta < \pi/2 \end{cases}$.

On obtient donc la paramétrisation :

$$\beta(\theta) = (2\sin^2\theta, 2\sin\theta\cos\theta, 2\cos\theta) \text{ pour } 0 < \theta < \pi/2.$$

On observe que $\beta(0) = (0,0,2)$ et $\beta(\pi/2) = (2,0,0)$ et qu'il faut donc choisir $-\beta'(\theta)/\|\beta'(\theta)\|$ comme vecteur tangent pour avoir la bonne orientation.
Donc

$$\int_{\overrightarrow{C}} ydx - (x-1)dy + zdz$$

$$= -\int_0^{\pi/2} \{8\sin^2\theta\cos^2\theta - 2(2\sin^2\theta - 1)(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 4\sin\theta\cos\theta\}d\theta$$

$$= -\int_0^{\pi/2} \{2\sin^2(2\theta) + 2\cos^2(2\theta) - 2\sin(2\theta)\}d\theta$$

$$= -\int_0^{\pi/2} \{2 - 2\sin(2\theta)\}d\theta = -\{2\theta + \cos(2\theta)\}\Big|_0^{\pi/2} = 2 - \pi.$$

2. Soit $\beta(t) = t(2,1) + (1-t)(4,5) = (-2t+4, -4t+5)$ pour $t \in [0,1]$. On observe que $\beta : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ est une représentation paramétrique de $\overrightarrow{C_1}$ et on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{\overrightarrow{C_1}} xydx + x^2dy &= \int_0^1 \beta_1(t)\beta_2(t)\beta_1'(t) + \beta_1^2(t)\beta_2'(t)dt \\
&= \int_0^1 (-2t+4)(-4t+5)(-2) + (-2t+4)^2(-4)dt \\
&= (-2)\int_0^1 (-2t+4)\{-4t+5-4t+8\}dt \\
&= -4\left(\frac{23}{2} + \frac{8}{3}\right) = -\frac{170}{3}.
\end{aligned}$$

Notons d'abord que $\alpha(1) = (2,1)$ et $\alpha(\frac{5}{3}) = (4,5)$ et donc que $-\alpha(t)$ est bien un chemin orienté allant de $(4,5)$ à $(2,1)$. On trouve alors que

$$\begin{aligned}
\int_{\overrightarrow{C_2}} xydx + x^2dy &= -\int_1^{5/3} \alpha_1(t)\alpha_2(t)\alpha_1'(t) + \alpha_1^2(t)\alpha_2'(t)dt \\
&= -\int_1^{5/3} (3t-1)(3t^2-2t)3 + (3t-1)^2(6t-2)dt = -58.
\end{aligned}$$

3. a) L'équation $x^2 + y^2 = x$ est équivalente à $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 - 1/4 = 0$.
   Les coordonnées polaires centrées au point $(\frac{1}{2}, 0)$ avec un rayon de $\frac{1}{2}$ sont

   $$x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cos\theta, \quad y = \frac{1}{2}\sin\theta.$$

   Une paramétrisation de C_1 en tant que chemin entre les points $(1,0)$ et $(0,0)$ est donc $\alpha_1 : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ avec $\alpha_1(\theta) = \left(\frac{1}{2}(1+\cos\theta), \frac{1}{2}\sin\theta\right)$. Noter que $\alpha_1|_{]0,\pi[}$ est régulière et que $\alpha_1(0) = (1,0)$ et $\alpha_1(\pi) = (0,0)$.

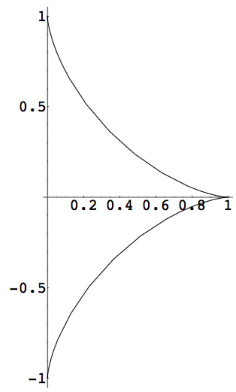
   b) Par un raisonnement analogue on obtient $\alpha_2 : [\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ avec $\alpha_2(\theta) = \left(\frac{1}{2}(1+\cos\theta), \frac{1}{2}\sin\theta\right)$.

c) Par définition

$$\begin{aligned}
\int_C (x+y)ds &= \sum_{i=1}^{2} \int_{C_i} (x+y)ds \\
&= \left(\int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi}\right) [\alpha_1(\theta)+\alpha_2(\theta)] \|\alpha'(\theta)\| d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}(1+\cos\theta) + \frac{1}{2}\sin\theta\right] \frac{1}{2} d\theta = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

car $\alpha'(\theta) = (-\frac{1}{2}\sin\theta, \frac{1}{2}\cos\theta)$ et donc $\|\alpha'(\theta)\| = 1/2$.

4. a) L'application $\alpha \in C^\infty((-\pi/2,\pi/2), A)$ et il existe $\alpha^{-1} \in C^0(A, (-\pi/2,\pi/2))$ car l'application $\sin t$ restreinte à $(-\pi/2,\pi/2)$ est strictement croissante : donc α est un homéomorphisme. Cependant, $\alpha'(0) = 0$ et donc α n'est pas une représentation paramétrique régulière de A.



b) Le fait que α n'est pas une représentation paramétrique régulière de A n'est pas suffisant pour affirmer que A n'est pas un arc régulier ! Pour le montrer, il faut encore prouver *qu'il n'existe aucune représentation paramétrique régulière de A*. Admettons par l'absurde que $\beta : J \to A$ est une représentation paramétrique régulière de A. Alors, pour tout $s \in J$, il existe $t(s) \in (-\pi/2, \pi/2)$ tel que $\beta(s) = (\cos^3 t(s), \sin^3 t(s))$ car par hypothèse on a $\operatorname{Im}\beta = \operatorname{Im}\alpha$. On a aussi que

$$\beta_1(s)^{2/3} + \beta_2(s)^{2/3} = 1,$$

pour tout $s \in J$.
Soit $s_0 \in J$ le point tel que $\beta(s_0) = \alpha(0) = (1,0) \in \mathbb{R}^2$, montrons que $\beta'(s_0) = (0,0)$.
D'une part,

$$\beta_1'(s_0) = 0 \quad \text{car} \quad 1 = \beta_1(s_0) = \max_{s\in J} \beta_1(s).$$

D'autre part, en dérivant par rapport à s la relation qui lie β_1 et β_2, on obtient

$$\frac{d}{ds}(\beta_1(s)^{2/3} + \beta_2(s)^{2/3}) = \frac{d}{ds}\,1$$

$$\Rightarrow \ \frac{2}{3}\beta_1(s)^{-1/3}\beta_1'(s) + \frac{2}{3}\beta_2(s)^{-1/3}\beta_2'(s) = 0,$$

pour tout $s \neq s_0$ (car $\beta_1(s) > 0$ pour tout $s \in J$ et $\beta_2(s) \neq 0$ pour tout $s \in J \backslash \{s_0\}$).

$$\Rightarrow \quad \beta_2'(s) = -\left(\frac{\beta_2(s)}{\beta_1(s)}\right)^{1/3} \beta_1'(s),$$

pour tout $s \neq s_0$.

Or β est une représentation paramétrique régulière, donc β est de classe C^1 sur J. Par conséquent,

$$\beta_2'(s_0) = \lim_{\substack{s \to s_0 \\ s \neq s_0}} -\left(\frac{\beta_2(s)}{\beta_1(s)}\right)^{1/3} \beta_1'(s) = -\left(\frac{\beta_2(s_0)}{\beta_1(s_0)}\right)^{1/3} \beta_1'(s_0) = 0.$$

car $\beta_1(s_0) = 1$ et $\beta_2(s_0) = 0$. Donc $\beta'(s_0) = (0,0)$ et β ne peut pas être une représentation paramétrique régulière de A.

On conclut donc que A n'admet aucune représentation paramétrique régulière et n'est donc pas un arc régulier.

c) Comme montré précédemment, la courbe A ne peut être vue comme une courbe régulière à cause du point $(1,0) \in A$. Cependant la paramétrisation α est régulière entre les points $p_- = (0,-1)$ et $q = (1,0)$ (non-compris) ainsi qu'entre les points $q = (1,0)$ et $p_+ = (0,1)$ (non-compris). Il existe donc une paramétrisation par longueur d'arc sur l'intérieur de chacune de ces deux parties et elle s'étend au bord de manière continue. En particulier, puisque la norme est 1 à l'intérieur, elle est aussi 1 au bord. On peut donc définir un premier chemin (régulier) entre p_- et q, puis un autre entre q et p_+. L'union de ces deux chemins forme un chemin de p_- à p_+ et donc A est un chemin du point $(0,-1)$ au point $(0,1)$.

5. Par définition, $C = \bigcup_{i=1}^{3} C_i$ où C_1, C_2 et C_3 sont par exemple définis par

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(t,0) : 0 \leq t \leq 1\}, \\ C_2 &= \{(1,t) : 0 \leq t \leq 1\}, \\ C_3 &= \{(1-t,1-t) : 0 \leq t \leq 1\}. \end{aligned}$$

Les normes unitaires extérieures sont dans ce cas :

— $n_1 = (0,-1)$, la normale unitaire extérieure sur C_1

— $n_2 = (1,0)$, la normale unitaire extérieure sur C_2

— $n_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$, la normale unitaire extérieure sur C_3.

Le flux de f vers l'extérieur de C est donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} \int_{C_i} \langle f, n_i \rangle ds &= \int_0^1 \langle f(t,0), (0,-1) \rangle dt + \int_0^1 \langle f(1,t), (1,0) \rangle dt \\ &+ \int_0^1 \langle f(1-t,1-t), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1) \rangle \sqrt{2} dt \\ &= \int_0^1 (-1) dt + \int_0^1 t dt + \int_0^1 1 dt = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

6. i. On trouve que les dérivées partielles de α sont $\frac{\partial}{\partial x}\alpha(x,y) = (1,0,y)$ et $\frac{\partial}{\partial y}\alpha(x,y) = (0,1,x)$. Donc $|\frac{\partial}{\partial x}\alpha \wedge \frac{\partial}{\partial y}\alpha|(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$ pour tous $(x,y) \in \Omega$.

ii. Par définition de l'intégrale de surface on a

$$\int_S 1 d\sigma = \int_\Omega \left| \frac{\partial}{\partial x}\alpha \wedge \frac{\partial}{\partial y}\alpha \right| (x,y) dxdy = \int_\Omega \sqrt{1+x^2+y^2} dxdy.$$

En faisant le changement de variables $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ avec $\theta \in]0,2\pi[$ et $r \in]0,1[$, on trouve

$$\int_S 1 d\sigma = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{1+r^2} r dr d\theta = \frac{2\pi}{3}\left(2^{\frac{3}{2}} - 1\right).$$