EPFL Section : **PH**
Prof John H. Maddocks

ANALYSE III **Corrigé Série 5** 21 Octobre 2015

---

1. a) $x^2 = 1-(y^2+z^2)$ et $x>0 \Leftrightarrow y^2+z^2<1$ et $x=\{1-(y^2+z^2)\}^{1/2}$.
Posons $\Omega = \{(y,z)\in \mathbb{R}^2 : y^2+z^2<1\}$ et $\alpha(y,z) = (\{1-(y^2+z^2)\}^{1/2}, y, z)$ pour $(y,z)\in\Omega$.
Ω est ouvert et connexe dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathrm{Im}\alpha = S$. De plus, $\alpha\in C^1(\Omega,\mathbb{R}^3)$ et $\alpha:\Omega\to\mathbb{R}^3$ est injective.
Pour $(x,y,z)\in S$, $\alpha^{-1}(x,y,z)=(y,z)$. Ainsi $\alpha:\Omega\to S$ est un homéomorphisme.
Or,

$$\begin{aligned}
\partial_1\alpha(y,z) &= (-y\{1-(y^2+z^2)\}^{-1/2}, 1, 0)\\
\partial_2\alpha(y,z) &= (-z\{1-(y^2+z^2)\}^{-1/2}, 0, 1)
\end{aligned}$$

sont linéairement indépendants pour tout $(y,z)\in\Omega$, montrant que S est une nappe régulière et que α est représentation paramérique régulière de S.

$$\begin{aligned}
N_\alpha(\alpha(y,z)) &= \frac{\partial_1\alpha(y,z)\wedge\partial_2\alpha(y,z)}{\|\partial_1\alpha(y,z)\wedge\partial_2\alpha(y,z)\|}\\
&= \frac{(1, y\{1-(y^2+z^2)\}^{-1/2}, z\{1-(y^2+z^2)\}^{-1/2})}{\left\{1+\frac{y^2}{1-(y^2+z^2)}+\frac{z^2}{1-(y^2+z^2)}\right\}^{1/2}}\\
&= (\{1-(y^2+z^2)\}^{1/2}, y, z) = \alpha(y,z).
\end{aligned}$$

Donc $N(P)=P$ est un champ continu de normales unitaires sur S.

b) Commençons par une paramétrisation de l'arc régulier C défini par $\frac{y^2}{4}+z^2=1$, $y<1$: posons $\beta(\theta)=(2\cos\theta,\sin\theta)$ pour $\pi/3<\theta<5\pi/3$.
On voit que $(x,y,z)\in S \Leftrightarrow 0<x<1$ et $(y,z)\in C$.
Posons $\Omega=(0,1)\times(\pi/3,5\pi/3)$ et $\alpha(x,\theta)=(x,2\cos\theta,\sin\theta)$ pour $(x,\theta)\in\Omega$. Alors Ω est ouvert et connexe dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathrm{Im}\ \alpha=S$. De plus, $\alpha\in C^1(\Omega,\mathbb{R}^3)$ et $\alpha:\Omega\to\mathbb{R}^3$ est injective. $\alpha^{-1}(x,y,z)=(x,\theta)$ pour $(x,y,z)\in S$, où θ est l'unique angle dans $(\pi/3,5\pi/3)$ tel que $(\cos\theta,\sin\theta)=(y/2,z)$, i.e. $\theta=\arccos(y/2)$ si $z\geq 0$ et $\theta=\pi+\arccos(-y/2)$ si $z<0$ (et on vérifie que α^{-1} est continue). Ainsi $\alpha:\Omega\to S$ est un homéomorphisme. En outre, on a

$$\begin{aligned}
\partial_1\alpha(x,\theta) &= (1,0,0)\\
\partial_2\alpha(x,\theta) &= (0,-2\sin\theta,\cos\theta)\\
(\partial_1\alpha\wedge\partial_2\alpha)(x,\theta) &= (0,-\cos\theta,-2\sin\theta)\neq(0,0,0)\quad\forall(x,\theta)\in\Omega.
\end{aligned}$$

Ceci montre que S est une nappe régulière. Puis,

$$N_\alpha(\alpha(x,\theta)) = \frac{(0,-\cos\theta,-2\sin\theta)}{[\cos^2\theta+4\sin^2\theta]^{1/2}}.$$

Donc $N(x,y,z)=\dfrac{(0,-y/2,-2z)}{\{y^2/4+4z^2\}^{1/2}}$ pour tout $(x,y,z)\in S$.

2. Considérons le point $(x, h(x), 0)$. Sa rotation autour de l'axe des x engendre le cercle

$$\{(x, h(x)\cos\theta, h(x)\sin\theta) : \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Posons $\Omega = J \times (0, \pi)$ et

$$\alpha(x, \theta) = (x, h(x)\cos\theta, h(x)\sin\theta) \text{ pour } (x, \theta) \in \Omega.$$

Alors Ω est ouvert et connexe dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathrm{Im}\alpha = S$. De plus, $\alpha \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et $\alpha(x, \theta) = (x, y, z)$ pour $(x, y, z) \in S \Leftrightarrow \theta = \arccos(y/h(x))$.
Donc $\alpha : \Omega \to S$ est un homéomorphisme.

$$\begin{aligned}
\partial_1\alpha(x, \theta) &= (1, h'(x)\cos\theta, h'(x)\sin\theta) \\
\partial_2\alpha(x, \theta) &= (0, -h(x)\sin\theta, h(x)\cos\theta) \\
\partial_1\alpha(x, \theta) \wedge \partial_2\alpha(x, \theta) &= (h(x)h'(x), -h(x)\cos\theta, -h(x)\sin\theta) \\
&= h(x)(h'(x), -\cos\theta, -\sin\theta) \neq 0 \quad \forall (x, \theta) \in \Omega.
\end{aligned}$$

Donc S est une nappe régulière. Par la formule du cours on a

$$\begin{aligned}
|S| &= \int_\Omega \|\partial_1\alpha(x, \theta) \wedge \partial_2\alpha(x, \theta)\| dx d\theta \\
&= \int_0^\pi \int_J h(x)\{1 + h'(x)^2\}^{1/2} dx d\theta \\
&= \pi \int_J h(x)\{1 + h'(x)^2\}^{1/2} dx,
\end{aligned}$$

Notons que comme il s'agit d'une surface de révolution on a aussi

$$|T| = 2\pi \int_J h(x)\{1 + h'(x)^2\}^{1/2} dx$$

et donc $|S| = \pi \int_J h(x)\{1 + h'(x)^2\}^{1/2} dx$, ce qui amène à la même conclusion.

3. (a) Considérons la fonction $\alpha : (0, \pi) \times (0, 1) \to S$ définie par $\alpha(\theta, z) = (z\cos\theta, z\sin\theta, z)$. Si $\alpha(\theta_1, z_1) = \alpha(\theta_2, z_2)$, alors

$$(z_1\cos\theta_1, z_1\sin\theta_1, z_1) = (z_2\cos\theta_2, z_2\sin\theta_2, z_2).$$

Ceci implique que $z_1 = z_2$. De plus, $\cos\theta_1 = \cos\theta_2$ avec $\theta_1, \theta_2 \in (0, \pi)$ implique $\theta_1 = \theta_2$. Ainsi, α est injective. De plus, α est indéfiniment continûment dérivable et il est clair que

$$\partial_1\alpha(\theta, z) = (-z\sin\theta, z\cos\theta, 0) \quad \text{et} \quad \partial_2\alpha(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, 1)$$

sont linéairement indépendants. Pour déterminer α^{-1}, si $(x, y, z) \in S$, alors $z\cos\theta = x$ et donc $\theta = \arccos(x/z)$. Finalement

$$\begin{aligned}
\alpha^{-1} : \quad S &\to (0, \pi) \times (0, 1) \\
(x, y, z) &\mapsto (\arccos(x/z), z).
\end{aligned}$$

Donc α^{-1} est continue et α est bien une représentation paramétrique régulière de S.

(b) Comme

$$\partial_1\alpha(\theta,z)\wedge\partial_2\alpha(\theta,z)=(z\cos\theta,z\sin\theta,-z),$$

on a

$$\begin{aligned}|S| &= \int_0^\pi\int_0^1 \|\partial_1\alpha(\theta,z)\wedge\partial_2\alpha(\theta,z)\|dzd\theta\\ &= \int_0^\pi\int_0^1 \sqrt{z^2\cos^2\theta+z^2\sin^2\theta+z^2}dzd\theta\\ &= \sqrt{2}\int_0^\pi\int_0^1 zdzd\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.\end{aligned}$$

(c) La masse est donnée par

$$\begin{aligned}M &= \int_0^\pi\int_0^1 \rho(\alpha(\theta,z))\|\partial_1\alpha(\theta,z)\wedge\partial_2\alpha(\theta,z)\|dzd\theta\\ &= \sqrt{2}\int_0^\pi\int_0^1 z^2\cos^2(\theta)zdzd\theta\\ &= \sqrt{2}\int_0^1 z^3dz\int_0^\pi\cos^2(\theta)d\theta\\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{2}\Big[\theta+\sin\theta\cos\theta\Big]_0^\pi=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi.\end{aligned}$$

(d) Dans ce cas, la masse est donnée par

$$\begin{aligned}M &= \int_0^\pi\int_0^1 \rho(\alpha(\theta,z))\|\partial_1\alpha(\theta,z)\wedge\partial_2\alpha(\theta,z)\|dzd\theta\\ &= \sqrt{2}\int_0^\pi\int_0^1 (z^2\cos^2\theta+z^2\sin^2\theta)zdzd\theta\\ &= \sqrt{2}\int_0^\pi d\theta\int_0^1 z^3dz=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi.\end{aligned}$$

4. (a) Posons $\alpha(x,y)=(x,y,h(x,y))$ pour $(x,y)\in\Omega$. Alors Im $\alpha=G(h)$. α est continue et $\alpha^{-1}(x,y,z)=(x,y)$ pour tout $(x,y,z)\in$ Im α. Donc $\alpha:\Omega\to G(h)$ est un homéomorphisme. De plus, $\alpha\in C^1(\Omega,\mathbb{R}^3)$ et

$$\partial_1\alpha(x,y)=\left(1,0,\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\right),$$

$$\partial_2\alpha(x,y)=\left(0,1,\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right).$$

Ainsi, $\partial_1\alpha(x,y)$ et $\partial_2\alpha(x,y)$ sont linéairement indépendants pour tout $(x,y)\in\Omega$ et $S=G(h)$ est une nappe régulière.

(b) De plus,

$$\partial_1\alpha(x,y)\wedge\partial_2\alpha(x,y)=\left(-\frac{\partial h}{\partial x}(x,y),-\frac{\partial h}{\partial y}(x,y),1\right)$$

et donc

$$\|\partial_1\alpha(x,y)\wedge\partial_2\alpha(x,y)\|=\left\{1+(\frac{\partial h}{\partial x}(x,y))^2+(\frac{\partial h}{\partial y}(x,y))^2\right\}^{1/2}.$$

Pour tout $(x,y) \in \Omega$, on a :

$$N_\alpha(\alpha(x,y)) = \frac{(-\frac{\partial h}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial h}{\partial y}(x,y), 1)}{\left\{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right)^2\right\}^{1/2}}.$$

Finalement, $N : S \to \mathbb{R}^3$ est donné par

$$N(x,y,z) = \frac{(-\frac{\partial h}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial h}{\partial y}(x,y), 1)}{\left\{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right)^2\right\}^{1/2}} \quad \forall\,(x,y,z) \in S.$$

(c)

$$\begin{aligned}
\int_{G(h)} f d\sigma &= \int_\Omega f(\alpha(x,y)) \|\partial_1 \alpha(x,y) \wedge \partial_2 \alpha(x,y)\|\, dxdy \\
&= \int_\Omega f(x,y,h(x,y)) \left\{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right)^2\right\}^{1/2} dxdy.
\end{aligned}$$

(d) On a

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega f(x,y,h(x,y)) \left\{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right)^2\right\}^{1/2} dxdy \\
= &\int_0^1 \int_{-1}^1 y\sqrt{1+y^2+x^2}\, dydx = 0
\end{aligned}$$

car on intègre par rapport à y une fonction impaire sur le domaine symétrique $(-1,1)$.

(e) On a

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega f(x,y,h(x,y)) \left\{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right)^2\right\}^{1/2} dxdy \\
= &\int_0^1 \int_0^{2\sqrt{2}} y\sqrt{1+y^2+x^2} dydx \\
= &\frac{1}{3}\int_0^1 \left[(1+x^2+y^2)^{3/2}\right]_{y=0}^{y=2\sqrt{2}} dx \\
= &\frac{1}{3}\int_0^1 (9+x^2)^{3/2} - (1+x^2)^{3/2}\, dx.
\end{aligned}$$

Nous sommes donc amenés à calculer une intégrale de la forme $I_a = \displaystyle\int_0^1 (a^2+x^2)^{3/2}\, dx$. Or, pour $a > 0$, on a

$$\int_0^1 (a^2+x^2)^{3/2} dx = \int_0^{\operatorname{arc\,sinh}(1/a)} (a^2 + a^2 \cdot \sinh^2 t)^{3/2} a \cdot \cosh t\, dt,$$

en faisant le changement de variable $x = a \cdot \sinh t$. Donc

$$\begin{aligned}
I_a &= a^4 \int_0^{\operatorname{arc\,sinh}(1/a)} \cosh^4 t dt = a^4 \int_0^{\operatorname{arc\,sinh}(1/a)} \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^4 dt \\
&= \left(\frac{a}{2}\right)^4 \int_0^{\operatorname{arc\,sinh}(1/a)} (e^{4t} + 4e^{2t} + 6 + 4e^{-2t} + e^{-4t})\, dt \\
&= \left(\frac{a}{2}\right)^4 \left[\frac{1}{2}\sinh(4t) + 4\sinh(2t) + 6t\right]_0^{\operatorname{arc\,sinh}(1/a)} \\
&= \left(\frac{a}{2}\right)^4 \left[2\sinh t\cosh t(2\sinh^2 t + 1) + 8\sinh t\cosh t + 6t\right]_0^{\operatorname{arc\,sinh}(1/a)},
\end{aligned}$$

en utilisant que $\sinh(2\alpha) = 2\sinh(\alpha)\cosh(\alpha)$ et $\cosh(2\alpha) = 2\sinh^2(\alpha) + 1$.

$$\begin{aligned}
I_a &= \left(\frac{a}{2}\right)^4 \left[4\sinh^3 t\cosh t + 10\sinh t\cosh t + 6t\right]_0^{\operatorname{arc\,sinh}(1/a)} \\
&= \left(\frac{a}{2}\right)^4 \left[4\sinh^3 t\sqrt{\sinh^2 t + 1} + 10\sinh t\sqrt{\sinh^2 t + 1} + 6t\right]_0^{\operatorname{arc\,sinh}(1/a)},
\end{aligned}$$

car $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ et $\cosh t > 0$

$$I_a = \frac{5a^2 + 2}{8}\sqrt{1 + a^2} + \frac{3a^4}{8}\operatorname{arc\,sinh}(1/a)$$

Par conséquent, l'intégrale cherchée vaut

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}(I_3 - I_1) &= \frac{1}{3}\left(\frac{5\cdot 9 + 2}{8}\sqrt{1+9} + \frac{3\cdot 81}{8}\operatorname{arc\,sinh}(1/3) - \frac{5+2}{8}\sqrt{1+1} - \frac{3}{8}\operatorname{arc\,sinh}(1)\right) \\
&= \frac{47}{24}\sqrt{10} + \frac{81}{8}\operatorname{arc\,sinh}(1/3) - \frac{7}{24}\sqrt{2} - \frac{1}{8}\operatorname{arc\,sinh}(1), \quad \text{ou encore} \\
&= \frac{47}{24}\sqrt{10} + \frac{81}{8}\log\frac{1+\sqrt{10}}{3} - \frac{7}{24}\sqrt{2} - \frac{1}{8}\log(1+\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

(f) En passant aux coordonnées polaires $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, le Jacobien de cette transformation vaut r et on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{G(h)} f d\sigma &= \int_\Omega y^2\sqrt{1 + y^2 + x^2}\, dydx \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2\sin^2\theta\sqrt{1+r^2} r\, d\theta dr \\
&= \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta \int_0^1 r^2\{r\sqrt{1+r^2}\} dr.
\end{aligned}$$

Or, d'une part, on a

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta - \sin\theta\cos\theta\right]_0^{2\pi} = \pi.$$

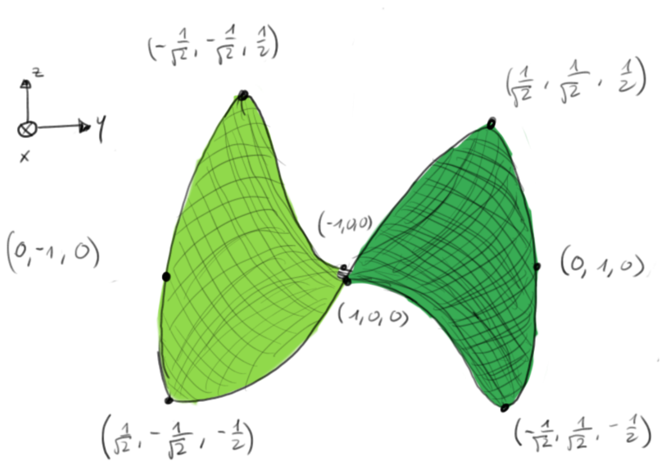
D'autre part, en intégrant par parties, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 r^2\{r\sqrt{1+r^2}\} dr &= \frac{r^2}{3}(1+r^2)^{3/2}\Big|_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 r(1+r^2)^{3/2} dr \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{15}(1+r^2)^{5/2}\Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{15}\{4\sqrt{2} - 1\} \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{15} + \frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

Le résultat final est donc :

$$\int_{G(h)} f \, d\sigma = \frac{2\pi}{15}\left\{\sqrt{2}+1\right\}.$$

5. a) La nappe S est appelée paraboloïde hyperbolique et ressemble à une chips, il s'agit de l'exemple typique du point-selle.



L'application $\psi \in C^1(]0,1[\times]0,2\pi[,\mathbb{R}^2)$ est inversible sur Ω et sa matrix jacobienne vaut $\partial\psi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ qui est non-singulière pour tout (r,θ) car son déterminant vaut r. On conclut donc $\beta = \alpha \circ \psi$ est aussi une représentation paramétrique régulière car ψ constitue un changement de coordonnées régulier.

b) Soit $p \in S$ avec $p = \alpha(s_0,t_0) = \beta(r_0,\theta_0)$, les champs α_s, α_t, β_r et β_θ vu comme des vecteurs partant du point p sont tous tangent à la nappe S en p. Précisément $\alpha_s(s,t_0)$ est tangent en p à la courbe $\alpha(s,t_0)$, et de même pour α_t, β_r et β_θ.
Les espaces engendrés $\mathrm{Span}\{\alpha_s,\alpha_t\}(s_0,t_0)$ et $\mathrm{Span}\{\beta_r,\beta_\theta\}(r_0,\theta_0)$ sont les mêmes car ils constituent tout les deux le plan tangent à S en p. Pour se convaincre on explicite le changement de base $\cos\theta\alpha_s(\psi(r,\theta)) + \sin\theta\alpha_t(\psi(r,\theta)) = \beta_r(r,\theta)$ et $-r\sin\theta\alpha_s(\psi(r,\theta)) + r\cos\theta\alpha_t(\psi(r,\theta)) = \beta_\theta(r,\theta)$ pour tout (r,θ), où sous forme matricielle

$$\partial_{(s,t)}\alpha(\psi(r,\theta))\partial_{(r,\theta)}\psi(r,\theta) = \partial_{(r,\theta)}\beta(r,\theta)$$

(ce qui n'est rien d'autre que la règle de dérivée en chaine). Ceci montre que la matrice de changement de base est donnée par la matrice jabonienne de ψ.

c) L'aire du parallélogramme engendré par $\{\alpha_s,\alpha_t\}$ vaut $|\alpha_s \wedge \alpha_t| = \sqrt{1+x^2+y^2}$ (comme montré dans la série 5), et l'aire de celui engendré par l'application β vaut $|\beta_r \wedge \beta_\theta| = r\sqrt{1+r^2}$. De plus, $|\alpha_s \wedge \alpha_t| = \sqrt{\det(\partial_{(s,t)}\alpha^T\partial_{(s,t)}\alpha)}$, comme montré dans la série 1, ce qui implique que

$$|\beta_r \wedge \beta_\theta|(r,\theta) = \sqrt{\det(\partial_{(r,\theta)}\beta^T\partial_{(r,\theta)}\beta)}(r,\theta)$$

$$= \sqrt{\det(\partial_{(s,t)}\alpha^T\partial_{(s,t)}\alpha)}(\psi(r,\theta))\sqrt{\det(\partial_{(r,\theta)}\psi^T\partial_{(r,\theta)}\psi)}(r,\theta)$$

$$= |\alpha_s \wedge \alpha_t|(\psi(r,\theta))|\det\partial_{(r,\theta)}\psi|(r,\theta)$$

car $\partial_{(r,\theta)}\psi$ est une matrice carrée. On observe que dans ce cas on a bien $r\sqrt{1+r^2} = (\sqrt{1+r^2})r$.

d) Par définition on a $\int_S f ds = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2\theta r\sqrt{1+r^2} dr d\theta = \frac{2\pi}{15}(\sqrt{2}+1)$ comme dans l'exercice 4.f). On observe que le changement de variable effectué dans l'exercice 4.f) pour calculer la valeur de l'intégrale peut être interprêté comme un changement de paramétrisation globale de la nappe S, avec $S = \mathrm{Im}\beta$. Ou inversement, on observe que *toutes* les paramétrisations de la nappe S induisent la *même* intégrale de surface à un changement de variable près.