EPFL Section : **PH**

Prof John H. Maddocks

ANALYSE III **Corrigé Série 6** 27 octobre 2017

---

1. L'équation du plan passant par $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$ est

$$\langle (x,y,z)-(1,0,0),(1,1,1)\rangle = 0 \Leftrightarrow x+y+z=1.$$

Soient $\Omega = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : 0<x<1 \text{ et } 0<y<1-x\}$ et $\alpha(x,y)=(x,y,1-x-y)$. On vérifie facilement que $\alpha:\Omega\to S$ est une représentation paramétrique régulière de la nappe S et que $\partial_1\alpha(x,y)\wedge\partial_2\alpha(x,y)=(1,1,1)$ pour tout $(x,y)\in\Omega$. On alors que $N_\alpha(\alpha(x,y))=1/\sqrt{3}(1,1,1)$ ce qui constitue l'orientation demandée de S. Donc, pour l'orientation donnée par N_α, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_S f\cdot d\sigma &= \int_\Omega \langle f(\alpha(x,y)),(\partial_1\alpha\wedge\partial_2\alpha)(x,y)\rangle dxdy\\
&= \int_0^1\int_0^{1-x}\{\alpha_1(x,y)+1+(-2\alpha_2(x,y)-1)+\alpha_3(x,y)\}\,dydx\\
&= \int_0^1\int_0^{1-x}\{x+1-2y-1+1-x-y\}\,dydx\\
&= \int_0^1\int_0^{1-x}(1-3y)\,dydx = 0.
\end{aligned}$$

2. Soient

$$\Omega = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0 \ \text{ et } \ 1<x^2+y^2<4\big\}$$

et $\alpha(x,y)=(x,y,\sqrt{x^2+y^2})$. On vérifie que $\alpha:\Omega\to S$ est une représentation paramétrique régulière de S et que

$$\partial_1\alpha(x,y)\wedge\partial_2\alpha(x,y) = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},1\right)$$

et

$$\|\partial_1\alpha(x,y)\wedge\partial_2\alpha(x,y)\| = \sqrt{2} \quad \forall\,(x,y)\in\Omega.$$

Ainsi,

$$N_\alpha(\alpha(x,y)) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},1\right)$$

et donc $(N_\alpha)_3 > 0$. Ainsi le flux à travers S dans la direction de croissance de z est

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \langle f(\alpha(x,y)), (\partial_1\alpha \wedge \partial_2\alpha)(x,y)\rangle \, dxdy \\
=\ & \int_\Omega \left\langle (x^2, y^2, x^2+y^2), \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)\right\rangle dxdy \\
=\ & \int_\Omega \frac{-x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{-y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} + (x^2+y^2)\, dxdy \\
=\ & \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_1^2 \left\{-\frac{r^3\cos^3\theta}{r} - \frac{r^3\sin^3\theta}{r} + r^2\right\} r\, drd\theta \\
=\ & \int_1^2 r^3\, dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{1 - \cos^3\theta - \sin^3\theta\right\} d\theta = \frac{15}{4}\left(\pi - \frac{4}{3}\right) = \frac{15\pi}{4} - 5.
\end{aligned}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3\theta\, d\theta &= 0 \quad \text{(intégration d'une fonction impaire sur } (-\pi/2, \pi/2)),\\
\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\theta\, d\theta &= 2\int_0^{\pi/2} \cos\theta(1-\sin^2\theta)\, d\theta = 2\Big[\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta\Big]_0^{\pi/2} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

3. En commençant par l'intégrale avec $\mathbf{e}$ on a

$$\begin{aligned}
&\iint_\Omega \mathbf{e}\cdot(\mathbf{e}_s \wedge \mathbf{e}_t)\, dsdt = \iint_\Omega \frac{\alpha}{\|\alpha\|}\cdot\left(\left(\frac{\alpha_s}{\|\alpha\|} - \frac{\alpha\otimes\alpha}{\|\alpha\|^3}\alpha_s\right)\wedge\left(\frac{\alpha_t}{\|\alpha\|} - \frac{\alpha\otimes\alpha}{\|\alpha\|^3}\alpha_t\right)\right) dsdt \\
&= \iint_\Omega \frac{\alpha}{\|\alpha\|^3}\cdot(\alpha_s\wedge\alpha_t)\, dsdt - \iint_\Omega \frac{\alpha}{\|\alpha\|^5}\cdot\left(\alpha\left(\alpha^\top\alpha_s\right)\wedge\alpha_t\right) dsdt \\
&\quad - \iint_\Omega \frac{\alpha}{\|\alpha\|^5}\cdot\left(\alpha_s\wedge\alpha\left(\alpha^\top\alpha_t\right)\right) dsdt + \iint_\Omega \frac{\alpha}{\|\alpha\|^7}\cdot\left(\alpha\left(\alpha^\top\alpha_s\right)\wedge\alpha\left(\alpha^\top\alpha_t\right)\right) dsdt \\
&= \iint_\Omega \frac{\alpha}{\|\alpha\|^3}\cdot(\alpha_s\wedge\alpha_t)\, dsdt - \iint_\Omega \frac{\left(\alpha^\top\alpha_s\right)}{\|\alpha\|^5}\alpha_t\cdot(\alpha\wedge\alpha)\, dsdt \\
&\quad - \iint_\Omega \frac{\left(\alpha^\top\alpha_t\right)}{\|\alpha\|^5}\alpha_s\cdot(\alpha\wedge\alpha)\, dsdt + \iint_\Omega \frac{\left(\alpha^\top\alpha_s\right)\left(\alpha^\top\alpha_t\right)}{\|\alpha\|^7}\alpha\cdot(\alpha\wedge\alpha)\, dsdt \\
&= \iint_\Omega \frac{\alpha}{\|\alpha\|^3}\cdot(\alpha_s\wedge\alpha_t)\, dsdt = \int_S \frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot d\sigma
\end{aligned}$$

a) La surface est un disque horizontal de rayon 1 placé à hauteur γ. On peut le paramétrer en utilisant les coordonnées cylindriques par $\alpha(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \gamma)$ pour $r \in [0,1)$ et $\theta \in [0, 2\pi)$.
On a alors $\|\alpha\| = \sqrt{r^2+\gamma^2}$, $\alpha_r = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$, $\alpha_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$ et $\alpha_r \wedge \alpha_\theta = (0,0,r)$. Donc

$$\begin{aligned}
\omega(S) &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r\gamma}{(r^2+\gamma^2)^{3/2}} drd\theta \\
&= -2\pi\gamma\int_0^1 \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+\gamma^2}}\right) dr = 2\pi\gamma\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\right).
\end{aligned}$$

b) La surface est la partie de la sphère unitaire centrée en $(0,0,\gamma)$ que l'on peut voir depuis l'origine. Plus la sphère est loin, plus cette partie est grande. On peut paramétrer la sphère entière en utilisant les coordonnées sphériques par $\alpha(\phi,\theta) = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, \gamma+\sin\theta)$ avec $\phi \in [0,2\pi)$ $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

On a alors $\|\alpha\| = \sqrt{1+\gamma^2+2\gamma\sin\theta}$, $\alpha_\phi = (-\cos\theta\sin\phi, \cos\theta\cos\phi, 0)$, $\alpha_\theta = (-\sin\theta\cos\phi, -\sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ et $\alpha_\phi \wedge \alpha_\theta = \left(\cos^2\theta\cos\phi, \cos^2\theta\sin\phi, \cos\theta\sin\theta\right) = \cos\theta\,(\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, \sin\theta)$.

La condition $\alpha \cdot \mathbf{N} < 0$ est donc $\cos\theta\,(1+\gamma\sin\theta) < 0$. Pour $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, on a de toute manière $\cos\theta > 0$, donc on veut juste $1+\gamma\sin\theta < 0$. Pour $|\gamma| \leq 1$, la condition n'est jamais réalisée ; pour $\gamma > 1$, c'est équivalent à $\theta < \sin^{-1}\left(-\frac{1}{\gamma}\right)$ car sin est croissant sur l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; pour $\gamma < -1$, on a $\sin\theta > -\frac{1}{\gamma}$, ce qui est équivalent à $\theta > \sin^{-1}\left(-\frac{1}{\gamma}\right)$ pour $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. On suppose donc que $|\gamma| > 1$. Avec $\gamma > 1$, on a

$$\begin{aligned}
\omega(S) &= \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\sin^{-1}\left(-\frac{1}{\gamma}\right)} \frac{\cos\theta\,(1+\gamma\sin\theta)}{(1+\gamma^2+2\gamma\sin\theta)^{3/2}}\,d\theta d\phi \\
&\underset{t=\gamma\sin\theta}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{2\pi}{\gamma}\int_{-\gamma}^{-1} \frac{1+t}{(1+\gamma^2+2t)^{3/2}}\,dt \\
&\underset{\text{intégration par partie}}{=} \frac{2\pi}{\gamma}\left[-\frac{1+t}{\sqrt{1+\gamma^2+2t}}\right]_{t=-\gamma}^{-1} + \frac{2\pi}{\gamma}\int_{-\gamma}^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2+2t}}\,dt \\
&= \frac{2\pi}{\gamma}\left(\frac{1-\gamma}{\sqrt{1-2\gamma+\gamma^2}} + \sqrt{\gamma^2-1} - \sqrt{1-2\gamma+\gamma^2}\right) \\
&= \frac{2\pi}{\gamma}\left(\operatorname{sign}(1-\gamma)\,(1-(1-\gamma)) + \sqrt{\gamma^2-1}\right) \\
&\underset{\operatorname{sign}(1-\gamma)=-\operatorname{sign}(\gamma)}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{2\pi}{\gamma}\left(\sqrt{\gamma^2-1} - \operatorname{sign}(\gamma)\,\gamma\right) \\
&= \frac{2\pi}{\gamma}\left(\sqrt{\gamma^2-1} - |\gamma|\right).
\end{aligned}$$

Avec $\gamma < -1$, on intègre de $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{\gamma}\right)$ à $\frac{\pi}{2}$ et l'intégrale vaut $\frac{2\pi}{\gamma}\left(|\gamma| - \sqrt{\gamma^2-1}\right)$.

c) On paramètre la sphère de la même manière qu'au point précédent. On a donc

$$\begin{aligned}
\omega(S) &= \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta\,(1+\gamma\sin\theta)}{(1+\gamma^2+2\gamma\sin\theta)^{3/2}}\,d\theta d\phi \\
&\underset{t=\gamma\sin\theta}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{2\pi}{\gamma}\int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{1+t}{(1+\gamma^2+2t)^{3/2}}\,d\theta \\
&= \frac{2\pi}{\gamma}\left(-\frac{1+\gamma}{|1+\gamma|} + \frac{1-\gamma}{|1-\gamma|} + \sqrt{1+2\gamma+\gamma^2} - \sqrt{1-2\gamma+\gamma^2}\right) \\
&= \frac{2\pi}{\gamma}\left(\operatorname{sign}(1+\gamma)\,(-1+1+\gamma) + \operatorname{sign}(1-\gamma)\,(1-1+\gamma)\right) \\
&= 2\pi\left(\operatorname{sign}(1+\gamma) + \operatorname{sign}(1-\gamma)\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\gamma| > 1 \\ 4\pi\gamma & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

4. Dans tout l'exercice, on dénote par f_i et g_i la i$^{\text{ème}}$ composante de $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ respectivement.

   a) Dans la notation qu'on a choisi le gradient d'un champ scalaire est une colonne $(N \times 1)$. La ligne i de cette colonne est donnée par :

$$[\nabla(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})]_i = \left[\nabla\left(\sum_{j=1}^{N} f_j\, g_j\right)\right]_i = \sum_{j=1}^{N} \partial_i\left(f_j\, g_j\right) = \sum_{j=1}^{N}\left[f_j\,\left(\partial g\right)_{ji} + g_j\,\left(\partial f\right)_{ji}\right],$$

   où $(\partial g)_{ji}$ et $(\partial f)_{ji}$ sont les lignes, respectivement, des matrices $\nabla\mathbf{g}$ et $\nabla\mathbf{f}$. Ce qui implique, en prenant en compte que $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sont des champs vectoriels, i.e. des matrices $(N \times 1)$ et que $\nabla\mathbf{f}$ et $\nabla\mathbf{g}$ sont des matrices $N \times N$:

$$\nabla(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}) = (\nabla\mathbf{g})\mathbf{f} + (\nabla\mathbf{f})\mathbf{g}.$$

   Le calcul avec φ et ψ correspond au cas particulier des champs scalaires.

   b) $\nabla(\varphi\mathbf{f})$: La j$^{\text{ème}}$ composante de $\varphi\mathbf{f}$ est φf_j. On a donc

$$[\nabla(\varphi\mathbf{f})]_{ij} = \partial_i(\varphi f_j) = f_j\partial_i\varphi + \varphi\partial_i f_j = \left[(\nabla\varphi)\mathbf{f}^\top + \varphi\nabla\mathbf{f}\right]_{ij}.$$

   On a donc bien l'égalité recherchée.
   $\nabla(\mathbf{f}\wedge\mathbf{g})$: La i$^{\text{ème}}$ ligne de $\nabla(\mathbf{f}\wedge\mathbf{g})$ est $[\nabla(\mathbf{f}\wedge\mathbf{g})]_{ij} = \partial_i(\mathbf{f}\wedge\mathbf{g})_j$ avec $j = 1,2,3$. Pour démontrer l'égalité, nous introduisons le symbole de Levi-Civita (d'ordre 3) ϵ_{ijk} qui est défini comme suit pour $i,j,k = 1,2,3$:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j,k) = (1,2,3),\ (2,3,1),\ (3,1,2) \text{ (permutations paires)} \\ -1 & \text{si } (i,j,k) = (2,1,3),\ (3,2,1),\ (1,3,2) \text{ (permutations impaires)} \\ 0 & \text{si } i = j \text{ ou } j = k \text{ ou } k = i. \end{cases}$$

   Ce symbole nous permet d'écrire le produit vectoriel composante par composante comme suit

$$(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})_i = \epsilon_{ijk}\, a_j\, b_k$$

   où a_j et b_j sont les composantes de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ et avec la convention de sommation d'Einstein (on somme sur les indices répétés qui ne sont pas autrement définis, c'est-à-dire ici qu'on somme sur j et k). Donc par example

$$(\mathbf{f}\wedge\mathbf{g})_1 = \epsilon_{123} f_2 g_3 + \epsilon_{132} f_3 g_2 = f_2 g_3 - f_3 g_2.$$

   La composante ij de la matrice $\nabla(\mathbf{f}\wedge\mathbf{g})$ est donc (toujours avec la convention de sommation d'Einstein)

$$\begin{aligned}[][\partial(\mathbf{f}\wedge\mathbf{g})]_{ij} &= \partial_i(\mathbf{f}\wedge\mathbf{g})_j = \epsilon_{jlk}\partial_i\left(f_l\, g_k\right) \\ &= \epsilon_{jlk}\left(\partial_i\, f_l\right) g_k + \epsilon_{jlk} f_l\left(\partial_i\, g_k\right) \\ &= \epsilon_{jlk}\left[\partial f\right]_{li}\, g_k + \epsilon_{jlk} f_l\left[\partial g\right]_{ki}.\end{aligned}$$

   Donc, pour la première ligne de la matrice $\nabla(\mathbf{f}\wedge\mathbf{g})$ on aura :

$$[\partial(\mathbf{f}\wedge\mathbf{g})]_{1j} = (\partial_1\mathbf{f}\wedge\mathbf{g})_j + (\mathbf{f}\wedge\partial_1\mathbf{g})_j,$$

   ainsi la première ligne est donnée par $[\partial_1\mathbf{f}\wedge\mathbf{g} + \mathbf{f}\wedge\partial_1\mathbf{g}]^\top$. La démonstration est la même pour les autres colonnes.

c) Pour $\nabla \cdot (\varphi \mathbf{f})$ on a

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\varphi \mathbf{f}) &= \partial_i (\varphi \mathbf{f})_i = (\partial_i \varphi)\ f_i + \varphi\, \partial_i f_i \\ &= (\nabla \varphi)^\top \mathbf{f} + \varphi\, (\nabla \cdot \mathbf{f})\end{aligned}$$

Pour $\nabla \cdot (\mathbf{f} \wedge \mathbf{g})$, soit on écrit

$$\nabla \cdot (\mathbf{f} \wedge \mathbf{g}) = \partial_1 \{f_2 g_3 - f_3 g_2\} + \partial_2 \{f_3 g_1 - f_1 g_3\} + \partial_3 \{f_1 g_2 - f_2 g_1\}$$

Puis en développant cette expression, on obtient $\nabla \cdot (\mathbf{f} \wedge \mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}) - \mathbf{f} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{g})$. Ou en utilisant le symbole de Levi-Civita :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{f} \wedge \mathbf{g}) &= \partial_i \left(\mathbf{f} \wedge \mathbf{g}\right)_i = \epsilon_{ijk} \partial_i \left(f_j\, g_k\right) = \epsilon_{ijk} \left(\partial_i f_j\right) g_k + \epsilon_{ijk} f_j \left(\partial_i g_k\right) \\ &= \epsilon_{kij} \left(\partial_i f_j\right) g_k - \epsilon_{jik} f_j \left(\partial_i g_k\right) = g_k \left(\nabla \wedge \mathbf{f}\right)_k - f_j \left(\nabla \wedge \mathbf{g}\right)_j \\ &= \mathbf{g} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}) - \mathbf{f} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{g}).\end{aligned}$$

d) La i$^{\text{ème}}$ composante de $\nabla \wedge (\varphi \mathbf{f})$ est

$$\left[\nabla \wedge (\varphi \mathbf{f})\right]_i = \epsilon_{ijk} \partial_j \left(\varphi\, \mathbf{f}\right)_k = \epsilon_{ijk} \left(\partial_j \varphi\right)\ f_k + \epsilon_{ijk} \varphi\ \left(\partial_j f_k\right) = \left[\nabla \varphi \wedge \mathbf{f}\right]_i + \varphi \left[\nabla \wedge \mathbf{f}\right]_i$$

et donc on a bien $\nabla \wedge (\varphi \mathbf{f}) = \nabla \varphi \wedge \mathbf{f} + \varphi \nabla \wedge \mathbf{f}$.
La i$^{\text{ème}}$ composante de $\nabla \wedge (\mathbf{f} \wedge \mathbf{g})$ est

$$\begin{aligned}\left[\nabla \wedge (\mathbf{f} \wedge \mathbf{g})\right]_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j \left(\epsilon_{klm} f_l g_m\right) \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \left[\left(\partial_j f_l\right)\ g_m + f_l \left(\partial_j g_m\right)\right] \\ &= \left[\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}\right] \left[\left(\partial_j f_l\right)\ g_m + f_l \left(\partial_j g_m\right)\right] \\ &= \left[\partial_m g_m\right] f_i - f_l\, \partial_l g_i + \left[\partial_m f_i\right] g_m - \left[\partial_l f_l\right] g_i \\ &= \left[(\nabla \cdot \mathbf{g})\ \mathbf{f}\right]_i - \left[(\nabla \cdot \mathbf{f})\ \mathbf{g}\right]_i + \left[(\nabla \mathbf{f})^\top \mathbf{g}\right]_i - \left[(\nabla \mathbf{g})^\top \mathbf{f}\right]_i,\end{aligned}$$

où on a utilisé la proprieté

$$\epsilon_{ijk}\, \epsilon_{klm} = \epsilon_{kij}\, \epsilon_{klm} = \left[\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}\right]. \tag{1}$$

On a donc bien l'égalité recherchée.

5. a) La composante ij de $\nabla(\nabla \varphi)$ est $\nabla(\nabla \varphi)_{ij} = \partial_j(\partial_i \varphi) = H(\varphi)_{ij}$. On a donc l'égalité recherchée.

Pour la deuxième égalité, $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{f}) = \nabla(\sum_{i=1}^{N} \partial_i f_i) = \sum_{i=1}^{N} \nabla \partial_i f_i$ par linéarité de l'opérateur ∇.

b) On a $\nabla \cdot (\nabla \varphi) = \sum_{i=1}^{3} \partial_i(\partial_i \varphi) = \Delta \varphi$.
Pour $\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f})$ on a

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}) &= \epsilon_{ijk} \partial_i \left(\partial_j f_k\right) \\ &= \partial_1 \{\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2\} + \partial_2 \{\partial_3 f_1 - \partial_1 f_3\} + \partial_3 \{\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1\} \\ &= 0\end{aligned}$$

car $\partial_i \partial_j f_k = \partial_j \partial_i f_k$ pour $i, j, k = 1, 2, 3$, vu que $\mathbf{f} \in C^2(\Omega)$.

c) La i$^{\text{ème}}$ composante de $\nabla \wedge (\nabla\varphi)$ est

$$[\nabla \wedge (\nabla\varphi)]_i = \epsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi = \partial_j\partial_k\varphi - \partial_k\partial_j\varphi = 0$$

vu que $\partial_i\partial_j\varphi = \partial_j\partial_i\varphi$ car $\varphi \in C^2(\Omega)$. Donc $[\nabla \wedge (\nabla\varphi)]$ est le vecteur nul.
La i$^{\text{ème}}$ composante de $\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{f})$ est

$$\begin{aligned}
[\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{f})]_i &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\partial_j\partial_l f_m = [\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}]\,\partial_j\partial_l f_m \\
&= \partial_m\partial_i f_m - \partial_l\partial_l f_i = \partial_i\partial_m f_m - \partial_l\partial_l f_i \\
&= [\nabla\,(\nabla \cdot \mathbf{f})]_i - [\Delta\mathbf{f}]_i
\end{aligned}$$

où on a utilisé la proprieté (1) et le fait que $\mathbf{f} \in C^2(\Omega)$. Finalement, on a bien que $\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{f}) = \nabla\,(\nabla \cdot \mathbf{f}) - \Delta\mathbf{f}$.

6. a) En voyant les quatres entrées de la matrice R comme un vector de $\mathbb{R}^4$, on a $\|R\,(\theta)'\| = \left\|\begin{matrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & -\sin\theta \end{matrix}\right\| = \sqrt{2}$ donc le volume de $SO(2)$ vu comme une courbe dans $\mathbb{R}^4$ est

$$\int_0^{2\pi} R'\,(\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}d\theta = 2\pi\sqrt{2}.$$

(Remarque optionnelle) Dans cet exemple la définition de l'élément de volume ou de longueur dépend d'un facteur d'échelle global pour lequel il n'existe pas de choix évident. Pour un volume réel dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^N$, il est naturel de vouloir qu'un cube unitaire dont les sommets sont $(0,0,0)$, $(1,0,0)$ etc. ait des arrêtes de longueur un, des faces d'aire un et un volume un ; mais pour le groupe $SO(2)$, le choix n'est pas évident. Par exemple, nous pourrions aussi identifier $SO(2)$ avec la courbe (dans ce cas le cercle) $(\sin\theta, \cos\theta)$ et alors la longueur de $SO(2)$ comme courbe dans $\mathbb{R}^2$ (avec la norme usuelle de $\mathbb{R}^2$ serait 2π et non $2\pi\sqrt{2}$. De manière équivalente, on peut voir un élément de $SO(2)$ comme un élément de $\mathbb{R}^4$ comme on l'a fait dans le calcul précédent, mais en utilisant comme norme sur $\mathbb{R}^4$ la norme adaptée $\|\cdot\|/\sqrt{2}$, auquel cas le cube unitaire de sommets $(0,0,0,0)$, $(1,0,0,0)$ etc. aurait des arrêtes de longueur $1/\sqrt{2}$, des faces 2D d'aire $1/2$, des faces 3d de "volume" $1/2\sqrt{2}$ et un volume quadridimensionnel de $1/4$. L'échelle spécifique à la norme choisie est arbitraire par essence et les longueurs, aires et volumes sont normalisés avec les facteurs appropriés.

b) *(Exercice optionnel)* On a

$$R_\phi = \begin{bmatrix} -\cos\psi\sin\phi - \cos\theta\cos\phi\sin\psi & \cos\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\sin\psi & 0 \\ \sin\psi\sin\phi - \cos\theta\cos\phi\cos\psi & -\sin\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\cos\psi & 0 \\ \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_\psi = \begin{bmatrix} -\sin\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\cos\psi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\cos\psi & \cos\psi\sin\theta \\ -\cos\psi\cos\phi + \cos\theta\sin\phi\sin\psi & -\cos\psi\sin\phi - \cos\theta\cos\phi\sin\psi & -\sin\psi\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \sin\theta\sin\phi\sin\psi & -\sin\theta\cos\phi\sin\psi & \sin\psi\cos\theta \\ \sin\theta\sin\phi\cos\psi & -\sin\theta\cos\phi\cos\psi & \cos\psi\cos\theta \\ \cos\theta\sin\phi & -\cos\theta\cos\phi & -\sin\theta \end{bmatrix}.$$

En considérant les entrées de ces matrices comme des éléments de vectors in $\mathbb{R}^9$ et en utilisant le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^9$, on obtient

$$\begin{array}{lll} R_\phi \cdot R_\phi = 2 & R_\phi \cdot R_\psi = 2\cos\theta & R_\phi \cdot R_\theta = 0 \\ R_\psi \cdot R_\psi = 2 & R_\psi \cdot R_\theta = 0 & R_\theta \cdot R_\theta = 2 \end{array}$$

et ainsi le volume de $SO(3)$ est

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sqrt{\det G\,(\partial R)} d\theta d\psi d\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \begin{vmatrix} 2 & 2\cos\theta & 0 \\ 2\cos\theta & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}^{1/2} d\theta d\psi d\phi$$

$$= 4\pi^2 \int_0^{\pi} \sqrt{8 - 8\cos^2\theta} d\theta = 8\pi^2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = 16\pi^2\sqrt{2}$$

(Remarque optionnelle) Dans la littérature, on trouve en général que le volume de $SO(3)$ est $8\pi^2$. Comme pour $SO(2)$, cette différence peut être expliquée en prenant la norme adaptée $\|\cdot\|/\sqrt{2}$ et le produit scalaire associé dans $\mathbb{R}^9$ plutôt que la norme et le produit scalaire habituels, ce qui donne un résultat de $8\pi^2$ à la place de $8\pi^2(\sqrt{2})^3$. Il y a aussi une autre manière naturelle de voir cette normalisation, car le même résultat est obtenu en définissant le produit scalaire sur l'ensemble des matrices 3×3 comme $\langle A, B\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}B_{ij}$, c'est à dire la moitié du produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^9$. Ce produit scalaire a du sens, car on a

$$R_\phi = R\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times\right]$$
$$R_\psi = R\left[\begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\cos\phi \\ -\cos\theta \end{pmatrix} \times\right]$$
$$R_\theta = R\left[\begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \times\right]$$

où pour $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ on définit la matrice

$$[\mathbf{a}\times] = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

de sorte que pour $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ on ait $[\mathbf{a}\times]\,\mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$.
Avec le nouveau produit scalaire qu'on a défini sur $\mathbb{R}^{3\times 3}$ (= ensemble des matrices 3×3), on a que

$$\begin{array}{lll} \langle R_\phi, R_\phi\rangle = \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_\phi = 1 & \langle R_\phi, R_\psi\rangle = \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_\psi = \cos\theta & \langle R_\phi, R_\theta\rangle = \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_\theta = 0 \\ \langle R_\psi, R_\psi\rangle = \mathbf{a}_\psi \cdot \mathbf{a}_\psi = 1 & \langle R_\psi, R_\theta\rangle = \mathbf{a}_\psi \cdot \mathbf{a}_\theta = 0 & \langle R_\theta, R_\theta\rangle = \mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_\theta = 1 \end{array}$$

où $\cdot$ dénote le produite scalaire usuel sur $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{a}_\phi = (0, 0, -1)^\top$,
$\mathbf{a}_\psi = (-\sin\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\phi, -\cos\theta)^\top$ et $\mathbf{a}_\theta = (\cos\phi, \sin\phi, 0)^\top$. Et de nouveau, en ce sens, on trouve le résultat $8\pi^2$.