

1. a)

$$\int_A \left\{ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right\} dx dy = \int_A (3 + 3) dx dy = 6|A| = 12.$$

Or,  $\partial A = \cup_{i=1}^4 C_i$  où  $C_i = \alpha_i([0, 1])$  et

$$\begin{aligned} \alpha^1(t) &= t(2, 0), \\ \alpha^2(t) &= t(2, 1) + (1-t)(2, 0) = (2, t), \\ \alpha^3(t) &= t(0, 1) + (1-t)(2, 1) = (2(1-t), 1), \\ \alpha^4(t) &= (1-t)(0, 1). \end{aligned}$$

Pour l'orientation positive de  $\partial A$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\partial A} f dx + g dy &= \sum_{i=1}^4 \int_0^1 f(\alpha^i(t))(\alpha_1^i)'(t) dt + g(\alpha^i(t))(\alpha_2^i)'(t) dt \\ &= \int_0^1 2 \cdot 2t \cdot 2 dt + \int_0^1 (6 + 2t) \cdot 1 dt + \int_0^1 (2 \cdot 2(1-t) - 3)(-2) dt \\ &\quad + \int_0^1 2(1-t) \cdot (-1) dt = 4 + 7 + 2 - 1 = 12. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \int_A \left\{ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right\} dx dy &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x) dy dx \\ &= \int_0^1 (1 - 2x)(\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{1}{30}. \end{aligned}$$

Or,  $\partial A = C_1 \cup C_2$  où  $C_i = \alpha^i([0, 1])$  et  $\alpha^1(t) = (t, t^2)$ ,  $\alpha^2(t) = (t^2, t)$ .

Pour l'orientation positive de  $\partial A$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\partial A} f dx + g dy &= \int_0^1 f(\alpha^1(t))(\alpha_1^1)'(t) + g(\alpha^1(t))(\alpha_2^1)'(t) dt \\ &\quad - \int_0^1 f(\alpha^2(t))(\alpha_1^2)'(t) + g(\alpha^2(t))(\alpha_2^2)'(t) dt \\ &= \int_0^1 (2t^3 - t^2) + (t + t^4)2t dt - \int_0^1 (2t^3 - t^4)2t + (t^2 + t^2) dt = \frac{1}{30}. \end{aligned}$$

c)

$$\int_A \left\{ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right\} dx dy = \int_A dx dy = |A| = 4\pi - 2\pi(1/4) = 7\pi/2.$$

Or,  $\partial A = \cup_{i=1}^3 C_i$  où  $C_i = \alpha^i([0, 2\pi])$  et

$$\begin{aligned}\alpha^1(\theta) &= 2(\cos \theta, \sin \theta), \\ \alpha^2(\theta) &= (0, 1) + 1/2(\cos \theta, \sin \theta), \\ \alpha^3(\theta) &= (0, -1) + 1/2(\cos \theta, \sin \theta).\end{aligned}$$

Pour l'orientation positive de  $\partial A$ ,

$$\begin{aligned}\int_{\overrightarrow{\partial A}} f dx + g dy &= \int_0^{2\pi} f(\alpha^1(\theta))(\alpha_1^1)'(\theta) d\theta - \sum_{i=2}^3 \int_0^{2\pi} f(\alpha^i(\theta))(\alpha_1^i)'(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} -2 \sin \theta (-2 \sin \theta) d\theta - \left\{ \int_0^{2\pi} -(1 + 1/2 \sin \theta)(-1/2 \sin \theta) d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{2\pi} -(-1 + 1/2 \sin \theta)(-1/2 \sin \theta) d\theta \right\} \\ &= \frac{7}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{7\pi}{2}.\end{aligned}$$

2. a) Si  $u$  est solution de  $(P)$ , alors

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \Delta u(x, y) dx dy &= - \int_{\Omega} \rho(x, y) dx dy \quad \text{et} \\ \int_{\partial \Omega} \langle \nabla u(x, y), n(x, y) \rangle ds &= \int_{\partial \Omega} f(x, y) ds.\end{aligned}$$

Par le Théorème de Green, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \Delta u(x, y) dx dy &= \int_{\Omega} \nabla \cdot \nabla u(x, y) dx dy \\ &= \int_{\partial \Omega} \langle \nabla u(x, y), n(x, y) \rangle ds.\end{aligned}$$

Combinant les trois égalités ci-dessus, on obtient que si  $(P)$  admet une solution, alors on a

$$\int_{\Omega} \rho(x, y) dx dy + \int_{\partial \Omega} f(x, y) ds = 0.$$

b) D'une part,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \rho(x, y) dx dy &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\sin r^2}{2 + \cos r^2} r dr d\theta \\ &= -\pi \ln(2 + \cos r^2) \Big|_0^1 = \pi \ln \frac{3}{2 + \cos 1}.\end{aligned}$$

Soit  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  défini par  $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ . Alors  $\alpha$  est une représentation paramétrique de  $\partial \Omega$

$$\begin{aligned}\int_{\partial \Omega} f(x, y) ds &= \int_0^{2\pi} f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^3 t dt = \int_0^{2\pi} \sin t (1 - \cos^2 t) dt = \left[ -\cos t + \frac{1}{3} \cos^3 t \right]_0^{2\pi} \\ &= 0.\end{aligned}$$

La condition nécessaire pour que  $(P)$  admette une solution n'est donc pas satisfaite. Ceci prouve (ii).

3. Par le Théorème de Green,

$$\begin{aligned}\int_{\vec{C}} (-y, x) \cdot d\ell &= \int_{\text{int}C} \left\{ \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right\} dx dy = 2 \int_{\text{int}C} dx dy = 2|\text{int}C|, \\ \int_{\vec{C}} x dy &= \int_{\vec{C}} (0, x) \cdot d\ell = \int_{\text{int}C} \{1 - 0\} dx dy = |\text{int}C|, \\ \int_{\vec{C}} y dx &= \int_{\vec{C}} (y, 0) \cdot d\ell = \int_{\text{int}C} \{-1\} dx dy = -|\text{int}C|.\end{aligned}$$

a)  $\alpha(\theta) = (a \cos \theta, b \sin \theta)$  pour  $\theta \in [0, 2\pi]$  est une représentation paramétrique de l'ellipse avec l'orientation positive.

$$\begin{aligned}\int_{\vec{C}} (-y, x) \cdot d\ell &= \int_0^{2\pi} \langle (-b \sin \theta, a \cos \theta), \alpha'(\theta) \rangle d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \langle (-b \sin \theta, a \cos \theta), (-a \sin \theta, b \cos \theta) \rangle d\theta \\ &= ab \int_0^{2\pi} d\theta = 2ab\pi.\end{aligned}$$

D'où  $|A| = ab\pi$ .

b)  $\partial A = C_1 \cup C_2$ . Pour l'orientation positive de  $\partial A$

$$\int_{\vec{\partial A}} x dy = - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (t - \sin t) \sin t dt + \int_{\pi/2-1}^{3\pi/2+1} t \cdot 0 dt = 2 + \frac{\pi}{2}.$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sin^2 t dt &= \frac{1}{2} \left[ t - \sin t \cos t \right]_{\pi/2}^{3\pi/2} = \frac{\pi}{2}, \\ \int_{\pi/2}^{3\pi/2} t(-\sin t) dt &= t \cos t \Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos t dt = 2.\end{aligned}$$

4. Le champ de normales unitaires est

$$N_\alpha(\alpha(x, y)) = \left( -\frac{x}{r}, -\frac{y}{r}, 1 \right) / \sqrt{2}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\int_S (N \wedge \nabla u) d\sigma &= \int_S \begin{pmatrix} N_2 \partial_3 u - N_3 \partial_2 u \\ N_3 \partial_1 u - N_1 \partial_3 u \\ N_1 \partial_2 u - N_2 \partial_1 u \end{pmatrix} d\sigma = \int_\Omega \begin{pmatrix} -\frac{y}{r} \\ \frac{x}{r} \\ 0 \end{pmatrix} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_a^b \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} r dr d\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Le bord de  $S$  est  $\partial S = \alpha(C_1) \cup \alpha(C_2)$ , où  $C_1$  et  $C_2$  sont des cercles

$$C_1 = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = b^2 \text{ et } C_2 = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a^2.$$

Des représentations paramétriques de  $C_1$  et  $C_2$  sont  $\gamma_1(\theta) = b(\cos \theta, \sin \theta)$  et  $\gamma_2(\theta) = a(\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Les champs de tangentes unitaires, qui correspondent à l'orientation positive de  $\partial S$  par rapport à  $N$  sont

$$\begin{aligned} T^1 & : \alpha(C_1) \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ où } T^1(x, y, b-a) = (-y, x, 0)/b \text{ pour } (x, y) \in C_1, \\ T^2 & : \alpha(C_2) \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ où } T^2(x, y, 0) = (y, -x, 0)/a \text{ pour } (x, y) \in C_2. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} uT \, ds & = \int uT^1 \, ds + \int uT^2 \, ds \\ & = (b-a) \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} b d\theta + 0 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} b d\theta \\ & = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$