EPFL Section : **PH**
Prof John H. Maddocks

ANALYSE III **Corrigé Série 7** 3 Novembre 2017

---

1. a)
$$\int_A \left\{ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right\} dxdy = \int_A (3+3)\, dxdy = 6|A| = 12.$$

Or, $\partial A = \cup_{i=1}^4 C_i$ où $C_i = \alpha_i([0,1])$ et

$$\begin{aligned}
\alpha^1(t) &= t(2,0), \\
\alpha^2(t) &= t(2,1) + (1-t)(2,0) = (2,t), \\
\alpha^3(t) &= t(0,1) + (1-t)(2,1) = (2(1-t),1), \\
\alpha^4(t) &= (1-t)(0,1).
\end{aligned}$$

Pour l'orientation positive de ∂A,

$$\begin{aligned}
\int_{\overrightarrow{\partial A}} f dx + g dy &= \sum_{i=1}^4 \int_0^1 f(\alpha^i(t))(\alpha_1^i)'(t)dt + g(\alpha^i(t))(\alpha_2^i)'dt \\
&= \int_0^1 2 \cdot 2t \cdot 2dt + \int_0^1 (6+2t) \cdot 1dt + \int_0^1 (2 \cdot 2(1-t) - 3)(-2)dt \\
&\quad + \int_0^1 2(1-t) \cdot (-1)dt = 4 + 7 + 2 - 1 = 12.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\int_A \left\{ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right\} dxdy &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (1-2x)\, dydx \\
&= \int_0^1 (1-2x)(\sqrt{x} - x^2)\, dx = \frac{1}{30}.
\end{aligned}$$

Or, $\partial A = C_1 \cup C_2$ où $C_i = \alpha^i([0,1])$ et $\alpha^1(t) = (t, t^2)$, $\alpha^2(t) = (t^2, t)$.
Pour l'orientation positive de ∂A,

$$\begin{aligned}
\int_{\overrightarrow{\partial A}} f dx + g dy &= \int_0^1 f(\alpha^1(t))(\alpha_1^1)'(t) + g(\alpha^1(t))(\alpha_2^1)'(t)dt \\
&\quad - \int_0^1 f(\alpha^2(t))(\alpha_1^2)'(t) + g(\alpha^2(t))(\alpha_2^2)'(t)dt \\
&= \int_0^1 (2t^3 - t^2) + (t + t^4)2tdt - \int_0^1 (2t^3 - t^4)2t + (t^2 + t^2)dt = \frac{1}{30}.
\end{aligned}$$

c)
$$\int_A \left\{ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right\} dxdy = \int_A dxdy = |A| = 4\pi - 2\pi(1/4) = 7\pi/2.$$

Or, $\partial A = \cup_{i=1}^{3} C_i$ où $C_i = \alpha^i([0, 2\pi])$ et

$$\begin{aligned}
\alpha^1(\theta) &= 2(\cos\theta, \sin\theta),\\
\alpha^2(\theta) &= (0, 1) + 1/2(\cos\theta, \sin\theta),\\
\alpha^3(\theta) &= (0, -1) + 1/2(\cos\theta, \sin\theta).
\end{aligned}$$

Pour l'orientation positive de ∂A,

$$\begin{aligned}
\int_{\overrightarrow{\partial A}} f dx + g dy &= \int_0^{2\pi} f(\alpha^1(\theta))(\alpha_1^1)'(\theta) d\theta - \sum_{i=2}^{3} \int_0^{2\pi} f(\alpha^i(\theta))(\alpha_1^i)'(\theta)\, d\theta\\
&= \int_0^{2\pi} -2\sin\theta(-2\sin\theta) d\theta - \Big\{ \int_0^{2\pi} -(1 + 1/2\sin\theta)(-1/2\sin\theta)\, d\theta\\
&\quad + \int_0^{2\pi} -(-1 + 1/2\sin\theta)(-1/2\sin\theta)\, d\theta \Big\}\\
&= \frac{7}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta = \frac{7\pi}{2}.
\end{aligned}$$

2. a) Si u est solution de (P), alors

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Delta u(x, y)\, dxdy &= -\int_\Omega \rho(x, y)\, dxdy \quad \text{et}\\
\int_{\partial\Omega} \langle \nabla u(x, y), n(x, y)\rangle\, ds &= \int_{\partial\Omega} f(x, y)\, ds.
\end{aligned}$$

Par le Théorème de Green, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Delta u(x, y)\, dxdy &= \int_\Omega \nabla \cdot \nabla u(x, y)\, dxdy\\
&= \int_{\partial\Omega} \langle \nabla u(x, y), n(x, y)\rangle\, ds.
\end{aligned}$$

Combinant les trois égalités ci-dessus, on obtient que si (P) admet une solution, alors on a

$$\int_\Omega \rho(x, y)\, dxdy + \int_{\partial\Omega} f(x, y)\, ds = 0.$$

b) D'une part,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \rho(x, y)\, dxdy &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\sin r^2}{2 + \cos r^2} r\, dr d\theta\\
&= -\pi \ln(2 + \cos r^2)\Big|_0^1 = \pi \ln \frac{3}{2 + \cos 1}.
\end{aligned}$$

Soit $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ défini par $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$. Alors α est une représentation paramétrique de $\partial\Omega$

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} f(x, y)\, ds &= \int_0^{\pi} f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|\, dt\\
&= \int_0^{2\pi} \sin^3 t\, dt = \int_0^{2\pi} \sin t(1 - \cos^2 t)\, dt = \Big[-\cos t + \frac{1}{3}\cos^3 t \Big]_0^{2\pi}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

La condition nécessaire pour que (P) admette une solution n'est donc pas satisfaite. Ceci prouve (ii).

3. Par le Théorème de Green,

$$\begin{aligned}
\int_{\overrightarrow{C}} (-y,x)\cdot d\ell &= \int_{intC} \Big\{ \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \Big\}\, dxdy = 2\int_{intC} dxdy = 2|intC|,\\
\int_{\overrightarrow{C}} x\,dy &= \int_{\overrightarrow{C}} (0,x)\cdot d\ell = \int_{intC} \{1-0\}\, dxdy = |intC|,\\
\int_{\overrightarrow{C}} y\,dx &= \int_{\overrightarrow{C}} (y,0)\cdot d\ell = \int_{intC} \{-1\}\, dxdy = -|intC|.
\end{aligned}$$

a) $\alpha(\theta) = (a\cos\theta, b\sin\theta)$ pour $\theta \in [0,2\pi]$ est une représentation paramétrique de l'ellipse avec l'orientation positive.

$$\begin{aligned}
\int_{\overrightarrow{C}} (-y,x)\cdot d\ell &= \int_0^{2\pi} \big\langle(-b\sin\theta, a\cos\theta), \alpha'(\theta)\big\rangle\, d\theta\\
&= \int_0^{2\pi} \langle(-b\sin\theta, a\cos\theta), (-a\sin\theta, b\cos\theta)\rangle\, d\theta\\
&= ab\int_0^{2\pi} d\theta = 2ab\pi.
\end{aligned}$$

D'où $|A| = ab\pi$.

b) $\partial A = C_1 \cup C_2$. Pour l'orientation positive de ∂A

$$\int_{\overrightarrow{\partial A}} x\,dy = -\int_{\pi/2}^{3\pi/2} (t-\sin t)\sin t\,dt + \int_{\pi/2-1}^{3\pi/2+1} t\cdot 0\,dt = 2 + \frac{\pi}{2}.$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sin^2 t\,dt &= \frac{1}{2}\Big[t - \sin t\cos t\Big]_{\pi/2}^{3\pi/2} = \frac{\pi}{2},\\
\int_{\pi/2}^{3\pi/2} t(-\sin t)\,dt &= t\cos t\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos t\,dt = 2.
\end{aligned}$$

4. Le champ de normales unitaires est

$$N_\alpha(\alpha(x,y)) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{x}{r}, -\frac{y}{r}, 1\right)$$

Alors

$$\begin{aligned}
\int_S (N\wedge\nabla u)\,d\sigma &= \int_S \begin{pmatrix} N_2\partial_3 u - N_3\partial_2 u\\ N_3\partial_1 u - N_1\partial_3 u\\ N_1\partial_2 u - N_2\partial_1 u\end{pmatrix} d\sigma = \int_\Omega \begin{pmatrix} -\frac{y}{r}\\ \frac{x}{r}\\ 0\end{pmatrix} dxdy\\
&= \int_0^{2\pi}\int_a^b \begin{pmatrix} -\sin\theta\\ \cos\theta\\ 0\end{pmatrix} rdrd\theta = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Le bord de S est $\partial S = \alpha(C_1)\cup\alpha(C_2)$, où C_1 et C_2 sont des cercles

$$C_1 = (x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = b^2 \text{ et } C_2 = (x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = a^2.$$

Des représentations paramétriques de C_1 et C_2 sont $\gamma_1(\theta) = b(\cos\theta, \sin\theta)$ et $\gamma_2(\theta) = a(\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Les champs de tangentes unitaires, qui correspondent à l'orientation positive de ∂S par rapport à N sont

$$\begin{aligned}
T^1 &: \alpha(C_1) \to \mathbb{R}^3, \text{ où } T^1(x, y, b-a) = (-y, x, 0)/b \text{ pour } (x, y) \in C_1,\\
T^2 &: \alpha(C_2) \to \mathbb{R}^3, \text{ où } T^2(x, y, 0) = (y, -x, 0)/a \text{ pour } (x, y) \in C_2.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial S} uT\,ds &= \int uT^1\,ds + \int uT^2\,ds\\
&= (b-a)\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} bd\theta + 0\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} bd\theta\\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$