EPFL Section : **PH**

Prof John H. Maddocks

ANALYSE III **Corrigé Série 8** 11 Novembre 2016

---

1. a) Une paramétrisation naturelle est $\alpha(x,\theta) = (x, \sin\theta, \cos\theta)$ où $x \in (0,1)$ et $\theta \in (0, \pi/2)$. Il s'agit bien une représentation paramétrique régulière de S.

   b) La normale unitaire est donnée par

$$\mathbf{N}(x,\theta) = \partial_x \alpha(x,\theta) \wedge \partial_\theta \alpha(x,\theta) = (0, \sin\theta, \cos\theta)$$

   qui est bien de troisième composante positive pour tout $(x,\theta) \in (0,1) \times (0, \pi/2)$. De plus, on a $\partial S = \alpha(\partial\Omega)$ et $\partial\Omega = \overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2} \cup \overline{\Gamma_3} \cup \overline{\Gamma_4}$ avec

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{(t,0) : t \in (0,1)\}, & \Gamma_2 &= \{(1,t) : t \in (0,\pi/2)\}, \\ \Gamma_3 &= \{(1-t, \pi/2) : t \in (0,1)\}, & \Gamma_4 &= \{(0, \pi/2 - t) : t \in (0, \pi/2)\}. \end{aligned}$$

   Donc $\partial S = \overline{C_1} \cup \overline{C_2} \cup \overline{C_3} \cup \overline{C_4}$ où

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(t,0,1) : t \in (0,1)\}, & C_2 &= \{(1, \sin t, \cos t) : t \in (0,\pi/2)\}, \\ C_3 &= \{(1-t,1,0) : t \in (0,1)\}, & C_4 &= \{(0, \cos t, \sin t) : t \in (0,\pi/2)\}. \end{aligned}$$

   Noter que ces représentations paramétriques orientent positivement ∂S par rapport à $\mathbf{N}$.

   c) On obtient donc

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \langle \mathbf{f}, \mathbf{T} \rangle \, \mathrm{d}s &= \int_0^1 \langle (0,0,0), (1,0,0) \rangle \, \mathrm{d}t = 0, \\ \int_{C_2} \langle \mathbf{f}, \mathbf{T} \rangle \, \mathrm{d}s &= \int_0^{\pi/2} \langle (\sin t, 0, 0), (0, \cos t, -\sin t) \rangle \, \mathrm{d}t = 0, \\ \int_{C_3} \langle \mathbf{f}, \mathbf{T} \rangle \, \mathrm{d}s &= \int_0^1 \langle (1-t, 0, 0), (-1, 0, 0) \rangle \, \mathrm{d}t = -1/2, \\ \int_{C_4} \langle \mathbf{f}, \mathbf{T} \rangle \, \mathrm{d}s &= \int_0^{\pi/2} \langle (0,0,0), (0, -\sin t, \cos t) \rangle \, \mathrm{d}t = 0, \\ \Rightarrow \int_{\partial S} \langle \mathbf{f}, \mathbf{T} \rangle \, \mathrm{d}s &= -1/2. \end{aligned}$$

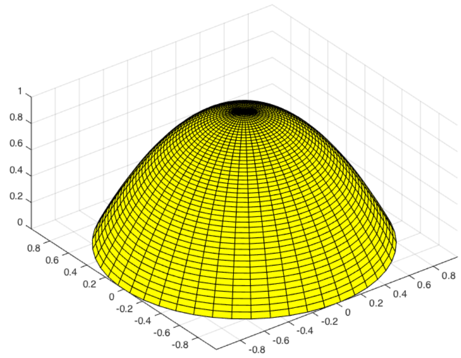
   D'autre part, on vérifie que $\nabla \wedge \mathbf{f} = (0,0,-x)$ et donc que

$$\begin{aligned} \int_S \langle \nabla \wedge \mathbf{f}, \mathbf{N} \rangle \, \mathrm{d}\sigma &= \int_\Omega \langle (0,0,-x), (0, \sin\theta, \cos\theta) \rangle \, \mathrm{d}x\mathrm{d}\theta \\ &= -\int_\Omega x \cos\theta \, \mathrm{d}x\mathrm{d}\theta = -\int_0^1 \int_0^{\pi/2} x \cos\theta \, \mathrm{d}x\mathrm{d}\theta \\ &= -\int_0^1 x \, \mathrm{d}x \int_0^{\pi/2} \cos\theta \mathrm{d}\theta = -1/2 \end{aligned}$$

   Remarque : Une autre paramétrisation de S serait $\alpha(x,y) = (x, y, (1-y^2)^{1/2})$ avec $x, y \in (0,1)$.

2. Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$ et $\alpha : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ défini par $\alpha(x,y) = (x,y,1-x^2-y^2)$. Alors α est une représentation paramétrique de S avec

$$\begin{aligned} \partial_1\alpha(x,y) &= (1,0,-2x) \\ \partial_2\alpha(x,y) &= (0,1,-2y) \\ \mathbf{N}(x,y) &= \frac{(2x,2y,1)}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}}. \end{aligned}$$



On a

$$\nabla \wedge \mathbf{f}(x,y,z) = (1,1,1) \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{(S,\mathbf{N})} \nabla \wedge \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\sigma &= \int_\Omega \langle (1,1,1),(2x,2y,1)\rangle \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_\Omega (2x+2y+1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (2r\cos\theta + 2r\sin\theta + 1)r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{\frac{2}{3}\cos\theta + \frac{2}{3}\sin\theta + \frac{1}{2}\right\} \mathrm{d}\theta = \pi. \end{aligned}$$

D'autre part $\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ pour $\theta \in [0,2\pi]$ est une représentation paramétrique de $\partial S = \left\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1\right\}$ dans le sens de l'orientation positive $\overrightarrow{\partial S}$ de ∂S par rapport à $\mathbf{N}$. Donc

$$\begin{aligned} \int_{\overrightarrow{\partial S}} \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\ell &= \int_0^{2\pi} \big\langle \mathbf{f}(\gamma(\theta)), \gamma'(\theta)\big\rangle \,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \langle (0,\cos\theta,\sin\theta), (-\sin\theta,\cos\theta,0)\rangle \,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \pi. \end{aligned}$$

3. a) En utilisant le Théorème de Stokes on a, pour tout champ $\mathbf{F} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, que

$$\int_{S_1} \nabla \wedge \mathbf{F} \cdot d\sigma = \int_{\overrightarrow{\partial S_1}} \mathbf{F} \cdot ds = \int_{\overrightarrow{\partial S_2}} \mathbf{F} \cdot ds = \int_{S_2} \nabla \wedge \mathbf{F} \cdot d\sigma$$

car $\overrightarrow{\partial S_1} = \overrightarrow{\partial S_2}$.

b) Comme $S = S_1 \cup S_2$ est une nappe orientée, il existe un champ continu de normales unitaires $\mathbf{N} : S \to \mathbb{R}^3$ sur S. En particulier ce champ est continu dans un voisinage de $\partial S_1 = \partial S_2 \subset S$. Ceci implique qui si l'on veut orienter positivement ∂S_1 et ∂S_2 par rapport à $\mathbf{N}$ on a forcément $\overrightarrow{\partial S_2} = -\overrightarrow{\partial S_1}$. On s'en convainc par le fait si on avait $\overrightarrow{\partial S_1} = \overrightarrow{\partial S_2}$ alors les nappes S_1 et S_2 devraient toutes les deux être du même coté de la courbe $\partial S_1 = \partial S_2$ puisque $\mathbf{N}_{|\partial S_1} = \mathbf{N}_{|\partial S_2}$, ce qui est en contradiction avec le fait que S soit régulière et que $\mathrm{int}(S_1) \cap \mathrm{int}(S_2) = \emptyset$.
Conséquemment, en utilisant a), on a $\int_{S_1} \nabla \wedge \mathbf{F} \cdot d\sigma = -\int_{S_2} \nabla \wedge \mathbf{F} \cdot d\sigma$ puisque $\overrightarrow{\partial S_2} = -\overrightarrow{\partial S_1}$, et donc

$$\int_S \nabla \wedge \mathbf{F} \cdot d\sigma = \int_{S_1} \nabla \wedge \mathbf{F} \cdot d\sigma + \int_{S_2} \nabla \wedge \mathbf{F} \cdot d\sigma = 0.$$

4. On propose d'utiliser le Théorème de Stokes. Notons que

$$\int_{\overrightarrow{C}} N_2 z \,\mathrm{d}x + N_3 x \,\mathrm{d}y + N_1 y \,\mathrm{d}z = \int_{\overrightarrow{C}} \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\ell$$

où

$$\mathbf{f}(x,y,z) = (N_2 z, N_3 x, N_1 y) \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Or, $\nabla \wedge \mathbf{f}(x,y,z) = (N_1, N_2, N_3) \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
Posons $S = (intC) \cup C$ où $intC$ est la partie de H qui est à l'intérieur de C. Alors $(S, \mathbf{N})$ est une nappe orientée avec bord et $\overrightarrow{C}$ a l'orientation positive par rapport à $\mathbf{N}$. Donc

$$\begin{aligned}\int_{\overrightarrow{C}} \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\ell &= \int_{(S,\mathbf{N})} \nabla \wedge \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\sigma = \int_S \langle \nabla \wedge \mathbf{f}, \mathbf{N} \rangle \,\mathrm{d}\sigma \\ &= \int_S \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle \mathrm{d}\sigma = \int_S \mathrm{d}\sigma = \text{l'aire de } S.\end{aligned}$$

5. On rappelle la règle de permutation du triple produit : pour $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\langle \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{c} \wedge \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle.$$

i) Posons $\mathbf{f} = u\,\mathbf{g}$. On a alors $\nabla \wedge \mathbf{f} = (\nabla u) \wedge \mathbf{g} + u\,\nabla \wedge \mathbf{g}$. Il suffit de remplacer dans le théorème de Stokes et d'utiliser la règle de permutation du triple produit.

ii) Les deux premières intégrales s'obtiennent directement en remplaçant $\mathbf{g}$ dans (1). Pour la troisième intégrale, on a $\nabla \wedge \mathbf{g} = (\nabla v) \wedge \mathbf{A} + v\,\nabla \wedge \mathbf{A} = (\nabla v) \wedge \mathbf{A}$ puisque $\mathbf{A}$ est constant, puis on utilise la règle de permutation du triple produit. L'équation (3) s'obtient sans calculs supplémentaires.

iii) On applique (3) trois fois avec $u = f_1$ et $\mathbf{A} = \mathbf{e}_1$, $u = f_2$ et $\mathbf{A} = \mathbf{e}_2$ et $u = f_3$ et $\mathbf{A} = \mathbf{e}_3$, puis on additionne. L'intégrale sur ∂S s'obtient sans calcul supplémentaire puisque $\mathbf{f} = f_1\mathbf{e}_1 + f_2\mathbf{e}_2 + f_3\mathbf{e}_3$. Pour l'intégrale sur S, il suffit de voir que $\nabla \wedge \mathbf{f} = \sum_{i=1}^3 \nabla \wedge (f_i \mathbf{e}_i)$ et que $\nabla \wedge (f_i\mathbf{e}_i) = (\nabla f_i) \wedge \mathbf{e}_i$, puis d'utiliser la règle de permutation sur le triple produit.

6. a) i) On applique la formule (3) de l'exercice précédent avec $u = \varphi$ et $\mathbf{A} = \mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ et on utilise la règle de permutation du triple produit.

ii) On applique la formule (2) de l'exercice précédent avec $\mathbf{A} = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$ et on utilise la règle de permutation du triple produit.

b) Si $S \subset \mathbb{R}^2 \equiv \{(x, y, 0) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$, on peut choisir $\mathbf{N} = (0, 0, 1)$ et alors l'orientation positive correspond à l'orientation positive habituelle dans $\mathbb{R}^2$. De plus on a $\mathbf{N} \wedge (\nabla\varphi) = (-\partial_2\varphi, \partial_1\varphi, 0)$.
Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ une représentation paramétrique de C choisie pour parcourir la courbe dans le sens positif. Alors $\gamma_3 \equiv 0$ et $\displaystyle\int_C \varphi\, T_i \,\mathrm{d}s = \int_a^b \varphi(\gamma(t))\, \gamma_i'(t) \,\mathrm{d}t$.
Soit $\nu : C \to \mathbb{R}^2$ le champ de normales unitaires extérieures à C dans $\mathbb{R}^2$. Alors $\nu(\gamma(t)) = (\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))/\|\gamma'(t)\|$.
Ainsi

$$\begin{aligned} \int_C \varphi\, T_1 \,\mathrm{d}s &= \int_a^b \varphi(\gamma(t))\gamma_1'(t) \,\mathrm{d}t = -\int_C \varphi\nu_2 \,\mathrm{d}s \\ \text{et } \int_C \varphi\, T_2 \,\mathrm{d}s &= \int_a^b \varphi(\gamma(t))\gamma_2'(t) \,\mathrm{d}t = \int_C \varphi\nu_1 \,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Donc la première formule se simplifie en

$$\begin{aligned} \int_S \partial_2\varphi \,\mathrm{d}\sigma &= \int_{\partial S} \varphi\nu_2 \,\mathrm{d}s \\ \text{et } \int_S \partial_1\varphi \,\mathrm{d}\sigma &= \int_{\partial S} \varphi\nu_1 \,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

En posant $\varphi = u\, v$ pour obtenir la deuxième formule, on retrouve les formules d'intégration par partie dans le plan :

$$\int_S u\, \partial_i v d\sigma = \int_{\partial S} u\, v\, \nu_i \,\mathrm{d}s - \int_S v\, \partial_i u d\sigma.$$