EPFL Section : **PH**

Prof John H. Maddocks

ANALYSE III **Corrigé Série 9** 17 Novembre 2017

---

1. a) V est la sphère de rayon 1.

   $\nabla \cdot \mathbf{f} \equiv 3$. Donc $\displaystyle\int_V \nabla \cdot \mathbf{f} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = 3 \cdot \text{volume}\,(V) = 4\pi$.

   $\mathbf{N}(x,y,z) = (x,y,z)$ est le champ de normales unitaires extérieures sur ∂V. Ainsi $\langle \mathbf{f}, \mathbf{N} \rangle = 1$ sur ∂V. Donc $\displaystyle\int_{\partial V} \langle \mathbf{f}, \mathbf{N} \rangle \, \mathrm{d}\sigma = \int_{\partial V} \mathrm{d}\sigma = |\partial V| = 4\pi$.

   b) $\nabla \cdot \mathbf{f}(x,y,z) = y + z + x$ et donc

   $$\int_V \nabla \cdot \mathbf{f} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left[\int_0^{1-x-y} (x+y+z) \, \mathrm{d}z \right] \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x = \frac{1}{8}.$$

   Sur les plans $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$, on a

   $$\int_{\partial V} \langle \mathbf{f}, \mathbf{N} \rangle \, \mathrm{d}\sigma = 0.$$

   Donc la seule face du tétraèdre qui comptera dans l'intégrale sur le bord de V est le triangle de sommets $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, qu'on peut paramétrer par

   $$\alpha(x,y) = (x, y, 1-x-y)$$

   où $(x,y) \in \Omega = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1-x\big\}$. La normale unitaire extérieure à V sur ce triangle est $1/\sqrt{3}(1,1,1)$. Ainsi

   $$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}, \mathbf{N} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} [xy + yz + xz] \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} [xy + (x+y)(1-x-y)] \text{ sur ce triangle.} \end{aligned}$$

   Donc

   $$\int_{\partial V} \langle \mathbf{f}, \mathbf{N} \rangle \, \mathrm{d}\sigma = \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{\sqrt{3}} [xy + (x+y)(1-x-y)] \sqrt{3} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \frac{1}{8}.$$

   c) V est un cylindre. On a $\overline{V} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\}$ et $\partial V = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ où

   $$\begin{aligned} A_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } z = 0\}, \\ A_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } z = 1\}, \\ A_3 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\}, \\ A_4 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, y \leq 0 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\} \end{aligned}$$

   sont des nappes avec bord. En effet, posons

   $$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}, \\ \Omega_2 &= \Omega_1, \\ \Omega_3 &= [0,\pi] \times [0,1], \\ \Omega_4 &= [\pi, 2\pi] \times [0,1]. \end{aligned}$$

Une représentation paramétrique de A_1, A_2, A_3 et A_4 est alors donnée respectivement par

$$\begin{aligned}
\alpha_1 : \Omega_1 \to A_1 &\text{ est définie par } \alpha_1(x,y) = (x,y,0),\\
\partial_x\alpha_1 \wedge \partial_y\alpha_1 = (0,0,1),&\\
\alpha_2 : \Omega_2 \to A_2 &\text{ est définie par } \alpha_2(x,y) = (x,y,1),\\
\partial_x\alpha_2 \wedge \partial_y\alpha_2 = (0,0,1),&\\
\alpha_3 : \Omega_3 \to A_3 &\text{ est définie par } \alpha_3(\theta,z) = (\cos\theta, \sin\theta, z),\\
\partial_\theta\alpha_3 \wedge \partial_z\alpha_3 = (\cos\theta, \sin\theta, 0),&\\
\alpha_4 : \Omega_4 \to A_4 &\text{ est définie par } \alpha_4(\theta,z) = (\cos\theta, \sin\theta, z),\\
\partial_\theta\alpha_4 \wedge \partial_z\alpha_4 = (\cos\theta, \sin\theta, 0).&
\end{aligned}$$

Comme $\nabla \cdot \mathbf{f} \equiv 2x$, on obtient en passant aux coordonnées cylindriques :

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{f} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 2r\cos(\theta) r \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = 0.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
\int_{A_1} \langle \mathbf{f}, \mathbf{N} \rangle \, \mathrm{d}\sigma &= -\int_{\Omega_1} \langle (x^2,0,0), (0,0,1) \rangle \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 0,\\
\int_{A_2} \langle \mathbf{f}, \mathbf{N} \rangle \, \mathrm{d}\sigma &= \int_{\Omega_2} \langle (x^2,0,0), (0,0,1) \rangle \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 0,\\
\int_{A_3 \cup A_4} \langle \mathbf{f}, \mathbf{N} \rangle \, \mathrm{d}\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \langle (\cos^2\theta, 0, 0), (\cos\theta, \sin\theta, 0) \rangle \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\theta = 0,
\end{aligned}$$

car

$$\int_0^{2\pi} \cos^3\theta \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \left\{ \cos\theta - \cos\theta \sin^2\theta \right\} \mathrm{d}\theta = \sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Ainsi, le Théorème de la Divergence (ou Théorème de Gauss) est vérifié.

2. a) Posons $\mathbf{F} = \varphi\mathbf{f}$. Alors $\mathbf{F} \in C^1(\overline{V}, \mathbb{R}^3)$ et $\nabla \cdot \mathbf{F} = \langle \nabla\varphi, \mathbf{f} \rangle + \varphi(\nabla \cdot \mathbf{f})$ (cf. série 6 ex. 4).
   Par le Théorème de la Divergence (ou Théorème de Gauss),

$$\begin{aligned}
\int_V \{ \langle \nabla\varphi, \mathbf{f} \rangle + \varphi(\nabla \cdot \mathbf{f}) \} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z &= \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z\\
&= \int_{\partial V} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle \, \mathrm{d}\sigma = \int_{\partial V} \varphi \langle \mathbf{f}, \mathbf{N} \rangle \, \mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}$$

   b) Appliquer le Théorème de la Divergence (ou Théorème de Gauss) à la fonction $\mathbf{F} = \nabla\varphi$.
   c) Remplacer $\varphi = v$ et $\mathbf{f} = \nabla u$ dans a).
   d) Permuter les rôles de u et v dans c) et éliminer le terme

$$\int_V \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$

3. a) On trouve $h_r = \left|\dfrac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial r}\right| = 1$, $h_\theta = \left|\dfrac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial \theta}\right| = r$, $h_\phi = \left|\dfrac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial \phi}\right| = r\sin\theta$ et

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\epsilon}_r &= \frac{1}{h_r}\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial r} = \sin\theta\cos\phi\,\mathbf{e}_1 + \sin\theta\sin\phi\,\mathbf{e}_2 + \cos\theta\,\mathbf{e}_3,\\ \boldsymbol{\epsilon}_\theta &= \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial \theta} = \cos\theta\cos\phi\,\mathbf{e}_1 + \cos\theta\sin\phi\,\mathbf{e}_2 - \sin\theta\,\mathbf{e}_3,\\ \boldsymbol{\epsilon}_\phi &= \frac{1}{h_\phi}\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial \phi} = -\sin\phi\,\mathbf{e}_1 + \cos\phi\,\mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

b) En calculant les produits scalaires deux à deux de $\boldsymbol{\epsilon}_r$, $\boldsymbol{\epsilon}_\theta$ et $\boldsymbol{\epsilon}_\phi$, on voit qu'ils forment bien une base orthonormée et donc que le système de coordonnées curvilignes $\boldsymbol{\alpha}$ est orthogonal.

Les lignes de coordonnées pour r sont toutes les droites passants par l'origine, sauf l'axe z, les lignes de coordonnées pour θ sont tout les demi cercles verticaux et les lignes de coordonnées pour ϕ sont tout les cercles horizaux. Finalement, les vecteur $\boldsymbol{\epsilon}_r, \boldsymbol{\epsilon}_\theta, \boldsymbol{\epsilon}_\phi$ sont tous tangent à leur ligne de coordonnées respectives.

c) En utilisant les expressions trouvées pour h_r, h_θ, h_ϕ et $\boldsymbol{\epsilon}_r$, $\boldsymbol{\epsilon}_\theta$, $\boldsymbol{\epsilon}_\phi$ on trouve

i) $\mathrm{d}V = h_1 h_2 h_3\ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = r^2\,\sin\theta\ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$.

ii) $\nabla u = \dfrac{\partial u}{\partial r}\,\boldsymbol{\epsilon}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\,\boldsymbol{\epsilon}_\theta + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial u}{\partial \phi}\,\boldsymbol{\epsilon}_\phi$.

iii) $\nabla\cdot\mathbf{f} = \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\,\big(\partial_r\,(r^2\sin\theta f_r) + \partial_\theta\,(r\sin\theta f_\theta) + \partial_\phi(r f_\phi)\big)$.

iv) $\nabla\wedge\mathbf{f} = \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\boldsymbol{\epsilon}_r & r\,\boldsymbol{\epsilon}_\theta & r\,\sin\theta\,\boldsymbol{\epsilon}_\phi\\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\phi\\ f_r & r\,f_\theta & r\,\sin\theta\,f_\phi\end{vmatrix}$.

v) $\Delta u = \dfrac{1}{r^2}\,\partial_r(r^2\,\partial_r u) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\,\partial_\theta(\sin\theta\,\partial_\theta\,u) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\partial_\phi\,\partial_\phi\,u$.

d) Commençons par le champ scalaire u et donc par le gradient et le laplacien. Le champ scalaire u exprime dans le coordonnes sphérique s'écrit :

$$u(r,\theta,\phi) = r^{-p}. \tag{1}$$

D'après la partie c) de cet exercise on a les expression suivante pour le gradient et le laplacien :

$$\begin{aligned}\nabla u &= -pr^{-(p+1)}\boldsymbol{\epsilon}_r, &(2)\\ \Delta u &= p(p-1)r^{-(p+2)}. &(3)\end{aligned}$$

Considérons maintenant le champ de vecteur $\mathbf{f}$ et les opérateur de la divergence et du rotationnel. D'abord nous exprimons $\mathbf{f}$ dans le coordonnes sphérique comme ceci,

$$\mathbf{f}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r^p}(r\boldsymbol{\epsilon}_r + 0\boldsymbol{\epsilon}_\theta + 0\boldsymbol{\epsilon}_\phi) = r^{1-p}\boldsymbol{\epsilon}_r. \tag{4}$$

Ainsi la divergence et le rotationnel s'écrivent :

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{f} &= (3-p)r^{-p}. &(5)\\ \nabla\wedge\mathbf{f} &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\boldsymbol{\epsilon}_r & r\,\boldsymbol{\epsilon}_\theta & r\,\sin\theta\,\boldsymbol{\epsilon}_\phi\\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\phi\\ r & 0 & 0\end{vmatrix} = 0. &(6)\end{aligned}$$

4. $\Leftarrow$) Le flux de $\rho\mathbf{v}$ au travers de ∂V s'écrit

$$\int_{\partial V} \langle \rho\mathbf{v}, \mathbf{N}\rangle \, d\sigma = \int_V \rho(\operatorname{div}\mathbf{v}) dxdydz$$

où $\mathbf{N}$ est la normale unitaire extérieure à ∂V. Donc si $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ alors

$$\int_{\partial V} \langle \rho\mathbf{v}, \mathbf{N}\rangle \, d\sigma = 0, \, \forall V$$

et donc le fluide est incompressible.

$\Rightarrow$) Supposons maintenant que le fluide est incompressible. Alors on a par définition que

$$0 = \int_{\partial V} \langle \rho\mathbf{v}, \mathbf{N}\rangle \, d\sigma = \rho \int_V (\operatorname{div}\mathbf{v}) dxdydz, \, \forall V \subset \Omega. \tag{7}$$

Cette dernière égalité implique $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ sur Ω. Pour le montrer supposons qu'il existe un ouvert $U \subset \Omega$ sur lequel $\operatorname{div}\mathbf{v} > 0$. Alors il existe une boule de rayon ϵ, notée B_ϵ, contenue dans U telle que

$$\rho \int_{B_\epsilon} (\operatorname{div}\mathbf{v}) dxdydz > 0.$$

Comme cette boule est un domaine régulier cela contredit (7) et on en conclut donc que (7) implique que $(\operatorname{div}\mathbf{v}) = 0$ sur Ω.

5. On souhaite encore utiliser le théoreme de la Divergence, cependant la forme de la force $\mathbf{f}_{\partial V}$ n'est pas tout à fait adéquate. C'est pourquoi nous regardons plutôt la projection de la condition $\mathbf{f}_{\partial V} + \mathbf{f}_V = 0$ sur la base canonique $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, et on trouve pour tous $V \subset \Omega$ et pour $i = 1, 2, 3$ que

$$\begin{aligned} 0 = \langle \mathbf{f}_{\partial V} + \mathbf{f}_V, \mathbf{e}_i\rangle &= -\int_{\partial V} p \, \langle \mathbf{N}, \mathbf{e}_i\rangle \, d\sigma + \int_V \langle \mathbf{F}, \mathbf{e}_i\rangle \, dxdydz \\ &= \int_V \langle -\nabla p + \mathbf{F}, \mathbf{e}_i\rangle \, dxdydz \end{aligned}$$

car $\nabla \cdot (p\mathbf{e}_i) = \langle \nabla p, \mathbf{e}_i\rangle$. On conclut comme à l'exercice 4 que ceci implique que $\nabla p = \mathbf{F}$ sur Ω.

6. (a) D'abord on remarque que le rotationnel d'un champ vectoriel constant est nul, donc on a

$$\nabla \wedge \mathbf{v} = \nabla \wedge \mathbf{v}_0 + \nabla \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}) = \nabla \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}) \, .$$

Première solution On utilise l'identité suivante (série 6, ex. 4) :

$$\nabla \wedge (\mathbf{f} \wedge \mathbf{g}) = (\nabla \cdot \mathbf{g})\mathbf{f} - (\nabla \mathbf{g})\mathbf{f} - (\nabla \cdot \mathbf{f})\mathbf{g} + (\nabla \mathbf{f})\mathbf{g}$$

ce qui donne

$$\nabla \wedge \mathbf{v} = \nabla \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}) = (\nabla \cdot \mathbf{x})\boldsymbol{\omega} - (\nabla \mathbf{x})\boldsymbol{\omega} = 3\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\omega}$$

Deuxième solution En utilisant le Symbole de Levi-Civita ϵ_{ijk}, qu'on a introduit et défini dans la série 6, et la notation d'Einstein (sommation sur les indices qui se répètent), on a que la composante i du vecteur $\nabla \wedge \mathbf{v}$ s'écrit

$$\begin{aligned}
[\nabla \wedge \mathbf{v}]_i &= [\nabla \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x})]_i \\
&= \epsilon_{ijk}\, \partial_j\, [(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x})]_k \\
&= \epsilon_{ijk}\, \partial_j\, [\, \epsilon_{klm}\omega_l\, x_m] \\
&= \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}[\partial_j \omega_l]\, x_m + \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\omega_l\, [\partial_j x_m] \\
&= \epsilon_{imk}\epsilon_{klm}\omega_l \\
&= 2\, \delta_{il}\omega_l \\
&= 2\omega_i
\end{aligned} \tag{8}$$

où nous avons utilisé les égalités suivantes $[\partial_j \omega_l] = 0$, $[\partial_j x_m] = \delta_{jm}$ et

$$\epsilon_{imk}\epsilon_{klm} = \epsilon_{kim}\epsilon_{mkl} = \epsilon_{mki}\epsilon_{mkl} = 2\, \delta_{il}.$$

L'égalité (8), qui est vraie pour tout i, montre que $\nabla \wedge \mathbf{v} = 2\, \boldsymbol{\omega}$.

Troisième solution Une autre démonstration peut être trouvée à la page 88 du polycopié redigé par le Prof. J. Descloux.

(b) On a $\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x})$ car $\mathbf{v}_0$ est un vecteur qui ne dépend pas de $\mathbf{x}$. De plus $(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x})_k = \epsilon_{ijk}\omega_j\, x_i$ (sommation sur les indices qui se répètent) d'où $\partial_k(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x})_k = 0$ pour $k = 1, 2, 3$ et donc $\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}) = 0$. On peut aussi écrire explicitement chaque composante de $(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x})$, ou encore utiliser l'identité $\nabla \cdot (\mathbf{f} \wedge \mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}) - \mathbf{f} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{g})$ (série 6, ex. 4) pour se rendre compte que la divergence de ce champ vectoriel est nul.