

1. a) V est la sphère de rayon 1.

$$\nabla \cdot \mathbf{f} \equiv 3. \text{ Donc } \int_V \nabla \cdot \mathbf{f} \, dx \, dy \, dz = 3 \cdot \text{volume}(V) = 4\pi.$$

$\mathbf{N}(x, y, z) = (x, y, z)$ est le champ de normales unitaires extérieures sur ∂V . Ainsi

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{N} \rangle = 1 \text{ sur } \partial V. \text{ Donc } \int_{\partial V} \langle \mathbf{f}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma = \int_{\partial V} d\sigma = |\partial V| = 4\pi.$$

b) $\nabla \cdot \mathbf{f}(x, y, z) = y + z + x$ et donc

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{f} \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left[\int_0^{1-x-y} (x + y + z) \, dz \right] dy \right\} dx = \frac{1}{8}.$$

Sur les plans $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$, on a

$$\int_{\partial V} \langle \mathbf{f}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma = 0.$$

Donc la seule face du tétraèdre qui comptera dans l'intégrale sur le bord de V est le triangle de sommets $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, qu'on peut paramétrer par

$$\alpha(x, y) = (x, y, 1 - x - y)$$

où $(x, y) \in \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1 - x\}$. La normale unitaire extérieure à V sur ce triangle est $1/\sqrt{3}(1, 1, 1)$. Ainsi

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}, \mathbf{N} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} [xy + yz + xz] \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} [xy + (x + y)(1 - x - y)] \text{ sur ce triangle.} \end{aligned}$$

Donc

$$\int_{\partial V} \langle \mathbf{f}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma = \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{\sqrt{3}} [xy + (x + y)(1 - x - y)] \sqrt{3} \, dx \, dy = \frac{1}{8}.$$

c) V est un cylindre. On a $\bar{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\}$ et $\partial V = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ où

$$A_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } z = 0\},$$

$$A_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } z = 1\},$$

$$A_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\},$$

$$A_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, y \leq 0 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\}$$

sont des nappes avec bord. En effet, posons

$$\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\},$$

$$\Omega_2 = \Omega_1,$$

$$\Omega_3 = [0, \pi] \times [0, 1],$$

$$\Omega_4 = [\pi, 2\pi] \times [0, 1].$$

Une représentation paramétrique de A_1, A_2, A_3 et A_4 est alors donnée respectivement par

$$\begin{aligned}\alpha_1 : \Omega_1 &\rightarrow A_1 \text{ est définie par } \alpha_1(x, y) = (x, y, 0), \\ \partial_x \alpha_1 \wedge \partial_y \alpha_1 &= (0, 0, 1), \\ \alpha_2 : \Omega_2 &\rightarrow A_2 \text{ est définie par } \alpha_2(x, y) = (x, y, 1), \\ \partial_x \alpha_2 \wedge \partial_y \alpha_2 &= (0, 0, 1), \\ \alpha_3 : \Omega_3 &\rightarrow A_3 \text{ est définie par } \alpha_3(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z), \\ \partial_\theta \alpha_3 \wedge \partial_z \alpha_3 &= (\cos \theta, \sin \theta, 0), \\ \alpha_4 : \Omega_4 &\rightarrow A_4 \text{ est définie par } \alpha_4(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z), \\ \partial_\theta \alpha_4 \wedge \partial_z \alpha_4 &= (\cos \theta, \sin \theta, 0).\end{aligned}$$

Comme $\nabla \cdot \mathbf{f} \equiv 2x$, on obtient en passant aux coordonnées cylindriques :

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{f} \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 2r \cos(\theta) r \, dz \, dr \, d\theta = 0.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}\int_{A_1} \langle \mathbf{f}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma &= - \int_{\Omega_1} \langle (x^2, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle \, dx \, dy = 0, \\ \int_{A_2} \langle \mathbf{f}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma &= \int_{\Omega_2} \langle (x^2, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle \, dx \, dy = 0, \\ \int_{A_3 \cup A_4} \langle \mathbf{f}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \langle (\cos^2 \theta, 0, 0), (\cos \theta, \sin \theta, 0) \rangle \, dz \, d\theta = 0,\end{aligned}$$

car

$$\int_0^{2\pi} \cos^3 \theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \{ \cos \theta - \cos \theta \sin^2 \theta \} \, d\theta = \sin \theta - \frac{1}{3} \sin^3 \theta \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Ainsi, le Théorème de la Divergence (ou Théorème de Gauss) est vérifié.

2. a) Posons $\mathbf{F} = \varphi \mathbf{f}$. Alors $\mathbf{F} \in C^1(\bar{V}, \mathbb{R}^3)$ et $\nabla \cdot \mathbf{F} = \langle \nabla \varphi, \mathbf{f} \rangle + \varphi(\nabla \cdot \mathbf{f})$ (cf. série 6 ex. 4).

Par le Théorème de la Divergence (ou Théorème de Gauss),

$$\begin{aligned}\int_V \{ \langle \nabla \varphi, \mathbf{f} \rangle + \varphi(\nabla \cdot \mathbf{f}) \} \, dx \, dy \, dz &= \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_{\partial V} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma = \int_{\partial V} \varphi \langle \mathbf{f}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma.\end{aligned}$$

- b) Appliquer le Théorème de la Divergence (ou Théorème de Gauss) à la fonction $\mathbf{F} = \nabla \varphi$.
c) Remplacer $\varphi = v$ et $\mathbf{f} = \nabla u$ dans a).
d) Permuter les rôles de u et v dans c) et éliminer le terme

$$\int_V \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dx \, dy \, dz.$$

3. a) On trouve $h_r = \left| \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial r} \right| = 1$, $h_\theta = \left| \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial \theta} \right| = r$, $h_\phi = \left| \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial \phi} \right| = r \sin \theta$ et

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\epsilon}_r &= \frac{1}{h_r} \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial r} = \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3, \\ \boldsymbol{\epsilon}_\theta &= \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial \theta} = \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_1 + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_2 - \sin \theta \mathbf{e}_3, \\ \boldsymbol{\epsilon}_\phi &= \frac{1}{h_\phi} \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial \phi} = -\sin \phi \mathbf{e}_1 + \cos \phi \mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

b) En calculant les produits scalaires deux à deux de $\boldsymbol{\epsilon}_r$, $\boldsymbol{\epsilon}_\theta$ et $\boldsymbol{\epsilon}_\phi$, on voit qu'ils forment bien une base orthonormée et donc que le système de coordonnées curvilignes $\boldsymbol{\alpha}$ est orthogonal.

Les lignes de coordonnées pour r sont toutes les droites passant par l'origine, sauf l'axe z , les lignes de coordonnées pour θ sont tout les demi cercles verticaux et les lignes de coordonnées pour ϕ sont tout les cercles horizontaux. Finalement, les vecteur $\boldsymbol{\epsilon}_r$, $\boldsymbol{\epsilon}_\theta$, $\boldsymbol{\epsilon}_\phi$ sont tous tangent à leur ligne de coordonnées respectives.

c) En utilisant les expressions trouvées pour h_r , h_θ , h_ϕ et $\boldsymbol{\epsilon}_r$, $\boldsymbol{\epsilon}_\theta$, $\boldsymbol{\epsilon}_\phi$ on trouve

i) $dV = h_1 h_2 h_3 dr d\theta d\phi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi.$

ii) $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r} \boldsymbol{\epsilon}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \boldsymbol{\epsilon}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} \boldsymbol{\epsilon}_\phi.$

iii) $\Delta u = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r u) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta u) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi \partial_\phi u.$

iv) $\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\partial_r (r^2 \sin \theta f_r) + \partial_\theta (r \sin \theta f_\theta) + \partial_\phi (r f_\phi)).$

v) $\nabla \wedge \mathbf{f} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_r & r \boldsymbol{\epsilon}_\theta & r \sin \theta \boldsymbol{\epsilon}_\phi \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\phi \\ f_r & r f_\theta & r \sin \theta f_\phi \end{vmatrix}.$

d) Commençons par le champ scalaire u et donc par le gradient et le laplacien. Le champ scalaire u exprime dans le coordonnes sphérique s'écrit :

$$u(r, \theta, \phi) = r^{-p}. \quad (1)$$

D'après la partie c) de cet exercice on a les expression suivante pour le gradient et le laplacien :

$$\nabla u = -pr^{-(p+1)} \boldsymbol{\epsilon}_r, \quad (2)$$

$$\Delta u = p(p-1)r^{-(p+2)}. \quad (3)$$

Considérons maintenant le champ de vecteur \mathbf{f} et les opérateur de la divergence et du rotationnel. D'abord nous exprimons \mathbf{f} dans le coordonnes sphérique comme ceci,

$$\mathbf{f}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^p} (r \boldsymbol{\epsilon}_r + 0 \boldsymbol{\epsilon}_\theta + 0 \boldsymbol{\epsilon}_\phi) = r^{1-p} \boldsymbol{\epsilon}_r. \quad (4)$$

Ainsi la divergence et le rotationnel s'écrivent :

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = -(p-3)r^{2-p}. \quad (5)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{f} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_r & r \boldsymbol{\epsilon}_\theta & r \sin \theta \boldsymbol{\epsilon}_\phi \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\phi \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

4. \Leftarrow) Le flux de $\rho \mathbf{v}$ au travers de ∂V s'écrit

$$\int_{\partial V} \langle \rho \mathbf{v}, \mathbf{N} \rangle d\sigma = \int_V \rho (\operatorname{div} \mathbf{v}) dx dy dz$$

où \mathbf{N} est la normale unitaire extérieure à ∂V . Donc si $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ alors

$$\int_{\partial V} \langle \rho \mathbf{v}, \mathbf{N} \rangle d\sigma = 0, \forall V$$

et donc le fluide est incompressible.

\Rightarrow) Supposons maintenant que le fluide est incompressible. Alors on a par définition que

$$0 = \int_{\partial V} \langle \rho \mathbf{v}, \mathbf{N} \rangle d\sigma = \rho \int_V (\operatorname{div} \mathbf{v}) dx dy dz, \forall V \subset \Omega. \quad (7)$$

Cette dernière égalité implique $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ sur Ω . Pour le montrer supposons qu'il existe un ouvert $U \subset \Omega$ sur lequel $\operatorname{div} \mathbf{v} > 0$. Alors il existe une boule de rayon ϵ , notée B_ϵ , contenue dans U telle que

$$\rho \int_{B_\epsilon} (\operatorname{div} \mathbf{v}) dx dy dz > 0.$$

Comme cette boule est un domaine régulier cela contredit (7) et on en conclut donc que (7) implique que $(\operatorname{div} \mathbf{v}) = 0$ sur Ω .

5. On souhaite encore utiliser le théorème de la Divergence, cependant la forme de la force $\mathbf{f}_{\partial V}$ n'est pas tout à fait adéquate. C'est pourquoi nous regardons plutôt la projection de la condition $\mathbf{f}_{\partial V} + \mathbf{f}_V = 0$ sur la base canonique $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, et on trouve pour tous $V \subset \Omega$ et pour $i = 1, 2, 3$ que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{f}_{\partial V} + \mathbf{f}_V, \mathbf{e}_i \rangle = - \int_{\partial V} p \langle \mathbf{N}, \mathbf{e}_i \rangle d\sigma + \int_V \langle \mathbf{F}, \mathbf{e}_i \rangle dx dy dz \\ &= \int_V \langle -\nabla p + \mathbf{F}, \mathbf{e}_i \rangle dx dy dz \end{aligned}$$

car $\nabla \cdot (p \mathbf{e}_i) = \langle \nabla p, \mathbf{e}_i \rangle$. On conclut comme à l'exercice 4 que ceci implique que $\nabla p = \mathbf{F}$ sur Ω .

6. (a) D'abord on remarque que le rotationnel d'un champ vectoriel constant est nul, donc on a

$$\nabla \wedge \mathbf{v} = \nabla \wedge \mathbf{v}_0 + \nabla \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}) = \nabla \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}).$$

Première solution On utilise l'identité suivante (série 6, ex. 4) :

$$\nabla \wedge (\mathbf{f} \wedge \mathbf{g}) = (\nabla \cdot \mathbf{g}) \mathbf{f} - (\nabla \mathbf{g}) \mathbf{f} - (\nabla \cdot \mathbf{f}) \mathbf{g} + (\nabla \mathbf{f}) \mathbf{g}$$

ce qui donne

$$\nabla \wedge \mathbf{v} = \nabla \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}) = (\nabla \cdot \mathbf{x}) \boldsymbol{\omega} - (\nabla \mathbf{x}) \boldsymbol{\omega} = 3\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\omega}$$

Deuxième solution En utilisant le Symbole de Levi-Civita ϵ_{ijk} , qu'on a introduit et défini dans la série 6, et la notation d'Einstein (somme sur les

indices qui se répètent), on a que la composante i du vecteur $\nabla \wedge \mathbf{v}$ s'écrit

$$\begin{aligned}
[\nabla \wedge \mathbf{v}]_i &= [\nabla \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x})]_i \\
&= \epsilon_{ijk} \partial_j [(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x})]_k \\
&= \epsilon_{ijk} \partial_j [\epsilon_{klm} \omega_l x_m] \\
&= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} [\partial_j \omega_l] x_m + \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \omega_l [\partial_j x_m] \\
&= \epsilon_{imk} \epsilon_{klm} \omega_l \\
&= 2 \delta_{il} \omega_l \\
&= 2 \omega_i
\end{aligned} \tag{8}$$

où nous avons utilisé les égalités suivantes $[\partial_j \omega_l] = 0$, $[\partial_j x_m] = \delta_{jm}$ et

$$\epsilon_{imk} \epsilon_{klm} = \epsilon_{kim} \epsilon_{mkl} = \epsilon_{mki} \epsilon_{mkl} = 2 \delta_{il}.$$

L'égalité (8), qui est vraie pour tout i , montre que $\nabla \wedge \mathbf{v} = 2 \boldsymbol{\omega}$.

Troisième solution Une autre démonstration peut être trouvée à la page 88 du polycopié rédigé par le Prof. J. Descloux.

- (b) On a $\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x})$ car \mathbf{v}_0 est un vecteur qui ne dépend pas de \mathbf{x} . De plus $(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x})_k = \epsilon_{ijk} \omega_j x_i$ (sommation sur les indices qui se répètent) d'où $\partial_k (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x})_k = 0$ pour $k = 1, 2, 3$ et donc $\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}) = 0$. On peut aussi écrire explicitement chaque composante de $(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x})$, ou encore utiliser l'identité $\nabla \cdot (\mathbf{f} \wedge \mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}) - \mathbf{f} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{g})$ (série 6, ex. 4) pour se rendre compte que la divergence de ce champ vectoriel est nul.