EPFL Section : **PH**
Prof John H. Maddocks

ANALYSE III **Corrigé Série 11** 2 Décembre 2016

Remarque Important : La formule donnée dans l'exercice 1b) nous permet de calculer directement un potentiel vecteur dans le cas d'un champs de vecteur $\mathbf{f}$ qui satisfait $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$, définit dans un domaine étoilé. Par contre, pour un domaine, pas forcement étoile, qui est définit entre deux graphes de function la méthode alternative présenté en classe (voir page 57 du Stuart partie I), qui permet de assumer une composante du potentiel vecteur égale à zero (voir aussi exercice 6 et figure dans l'énonce de cette série), peut ramener à des calcules plus simples.

1. a) Pour $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ on a donc

$$\begin{aligned}\langle \nabla\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{v}\rangle = \frac{d}{ds}_{|s=0}\varphi(\mathbf{x}+s\mathbf{v}) &= \int_0^1 \langle \nabla \mathbf{f}(t\mathbf{x})t\mathbf{v}, \mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{f}(t\mathbf{x}), \mathbf{v}\rangle \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \langle t\nabla\mathbf{f}(t\mathbf{x})^T\mathbf{x} + \mathbf{f}(t\mathbf{x}), \mathbf{v}\rangle \,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

En utilisant que $\frac{d}{dt}\left[t\mathbf{f}(t\mathbf{x})\right] = \mathbf{f}(t\mathbf{x}) + t\nabla\mathbf{f}(t\mathbf{x})\mathbf{x}$ on trouve

$$\langle \nabla\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \int_0^1 t(\nabla\mathbf{f}^T - \nabla\mathbf{f})(t\mathbf{x})\mathbf{x}\,\mathrm{d}t, \mathbf{v}\rangle \ \ \forall \mathbf{v}\in\mathbb{R}^3.$$

D'où

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla\varphi(\mathbf{x}) + \int_0^1 t(\nabla\mathbf{f} - \nabla\mathbf{f}^T)(t\mathbf{x})\mathbf{x}\,\mathrm{d}t.$$

Noter que l'on retrouve qu'une condition nécessaire pour que $\mathbf{f}$ *dérive d'un potentiel* <u>*scalaire*</u> *est* $\nabla\mathbf{f} = \nabla\mathbf{f}^T$*, le terme* $\int_0^1 t(\nabla\mathbf{f} - \nabla\mathbf{f}^T)(t\mathbf{x})\mathbf{x}\,\mathrm{d}t$ *peut être regardé comme un reste dans les cas où le champ* $\mathbf{f}$ *ne dérive pas d'un potentiel scalaire.*

b) En utilisant l'identité 4.d de la série 6 on a que

$$\begin{aligned}\nabla\wedge\psi(\mathbf{x}) &= \int_0^1 2t\mathbf{f}(t\mathbf{x}) - [\nabla\cdot\mathbf{f}(t\mathbf{x})]t^2\mathbf{x} + \nabla\mathbf{f}(t\mathbf{x})\cdot t^2\mathbf{x}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}[t^2\mathbf{x}\mathbf{f}(t\mathbf{x})] - [\nabla\cdot\mathbf{f}(t\mathbf{x})]t^2\mathbf{x}\,\mathrm{d}t \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \int_0^1 (\nabla\cdot\mathbf{f})(t\mathbf{x})t^2\mathbf{x}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

D'où

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\nabla\wedge\psi)(\mathbf{x}) + \int_0^1 (\nabla\cdot\mathbf{f})(t\mathbf{x})t^2\mathbf{x}\,\mathrm{d}t.$$

Noter que l'on retrouve qu'une condition nécessaire pour que $\mathbf{f}$ *dérive d'un potentiel* <u>*vecteur*</u> *est* $\nabla\cdot\mathbf{f} = 0$*, le terme* $\int_0^1(\nabla\cdot\mathbf{f})(t\mathbf{x})t^2\mathbf{x}\,\mathrm{d}t$ *peut être regardé comme un reste dans les cas où le champ* $\mathbf{f}$ *ne dérive pas d'un potentiel vecteur.*

2. a) Comme $\nabla\cdot f(x,y,z) = \cos y - \cos y + 0 = 0$ et $\mathbb{R}^3$ est étoilé il existe un potentiel vecteur pour f sur $\mathbb{R}^3$. Nous cherchons un potentiel vecteur g tel que $g_3 \equiv 0$.

Ceci est toujours possible car le potentiel vecteur est unique a un '$\nabla\phi$' près. Conséquemment $\nabla \wedge g = f$ s'écrit

$$-\partial_3 g_2(x,y,z) = x\cos y \tag{1}$$
$$\partial_3 g_1(x,y,z) = -\sin y \tag{2}$$
$$(\partial_1 g_2 - \partial_2 g_1)(x,y,z) = \sin x \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
&(1) \Rightarrow g_2(x,y,z) = -zx\cos y + k(x,y),\\
&(2) \Rightarrow g_1(x,y,z) = -z\sin y + h(x,y),\\
&(3) \Rightarrow -z\cos y + \partial_1 k(x,y) - [-z\cos y + \partial_2 h(x,y)] = \sin x\\
&\quad \Leftrightarrow \partial_1 k(x,y) - \partial_2 h(x,y) = \sin x
\end{aligned}$$

On peut donc choisir

$$k(x,y) = -\cos x \text{ et } h(x,y) \equiv 0.$$

Ainsi

$$g(x,y,z) = (-z\sin y, -zx\cos y - \cos x, 0)$$

est un potentiel vecteur pour f sur $\mathbb{R}^3$.

b) $\nabla \cdot f(x,y,z) = 2x + 2y + 2z = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 0$. Donc il n'y a pas de potentiel vecteur pour f sur $\mathbb{R}^3$ (ni sur un aucun ouvert de $\mathbb{R}^3$).

c) On a bien

$$\nabla \cdot f(x,y,z) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0.$$

mais Ω n'est pas étoilé, donc le théorème ne s'applique pas. Cependant pour tout sous-ensemble étoilé $E \subset \Omega$ on peut en trouver un. Soit

$$H^+ = \{(x,y,z) \in \Omega \,|\, x > 0\} \text{ et } H^- = \{(x,y,z) \in \Omega \,|\, x < 0\}$$

montrons qu'il existe un potentiel vecteur $g^\pm \in C^1\left(H^\pm, \mathbb{R}^3\right)$ pour f sur $H^\pm$ et que l'on peut construire un potentiel vecteur g pour f sur Ω.
Cherchons un potentiel vecteur g^+ sur H^+ tel que $g_3^+ \equiv 0$.

$$-\partial_3 g_2^+(x,y,z) = -\frac{y}{x^2+y^2} \tag{4}$$
$$\partial_3 g_1^+(x,y,z) = \frac{x}{x^2+y^2} \tag{5}$$
$$(\partial_1 g_2^+ - \partial_2 g_1^+)(x,y,z) = 0 \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
&(4) \Rightarrow g_2^+(x,y,z) = \frac{yz}{x^2+y^2} + k(x,y),\\
&(5) \Rightarrow g_1^+(x,y,z) = \frac{xz}{x^2+y^2} + h(x,y),\\
&(6) \Rightarrow -\frac{2xyz}{(x^2+y^2)^2} + \partial_1 k(x,y) - \left\{-\frac{2xyz}{(x^2+y^2)^2} + \partial_2 h(x,y)\right\} = 0\\
&\quad \Leftrightarrow \partial_1 k(x,y) - \partial_2 h(x,y) = 0
\end{aligned}$$

Donc on peut poser $k(x,y) = h(x,y) = 0$ et on conclut que

$$g^+(x,y,z) = \frac{z}{x^2+y^2}(x,y,0) \text{ sur } H^+.$$

Un raisonnement similaire amène à choisir

$$g^-(x,y,z) = \frac{z}{x^2+y^2}(x,y,0) \text{ sur } H^-.$$

et conséquemment

$$g(x,y,z) = \frac{z}{x^2+y^2}(x,y,0) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3).$$

comme potentiel vecteur pour f sur Ω.

3. Soit $\psi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ potentiel vecteur pour $\mathbf{g}$ sur Ω, i.e $\nabla \wedge \psi = \mathbf{g}$ sur Ω.

Première Possibilité En utilisant le théorème de Stokes et le fait que la surface est fermée, on trouve

$$\int_S \mathbf{g} \cdot d\sigma = \int_S (\nabla \wedge \psi) \cdot d\sigma = 0.$$

Seconde Possibilité En utilisant le théorème de la divergence et le fait que la surface est fermée, on trouve

$$\int_S \mathbf{g} \cdot d\sigma = \int_{Int(S)} \nabla \cdot (\nabla \wedge \psi) dV = 0.$$

4. a) Cherchons ψ avec $\psi_3 \equiv 0$. C'est-à-dire

$$-\partial_3 \psi_2(x,y,z) = \frac{x}{r^3} \tag{7}$$

$$\partial_3 \psi_1(x,y,z) = \frac{y}{r^3} \tag{8}$$

$$(\partial_1 \psi_2 - \partial_2 \psi_1)(x,y,z) = \frac{z}{r^3} \tag{9}$$

où $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$. De (7), on tire

$$\psi_2(x,y,z) = -\int_0^z \frac{x}{(x^2+y^2+t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t + k(x,y).$$

Noter qu'en intégrant par parties, on a pour tout $s > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_0^s \frac{1}{(1+u^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u &= \int_0^s \frac{1+u^2}{(1+u^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u - \int_0^s \frac{u^2}{(1+u^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^s \frac{1}{(1+u^2)^{1/2}}\,\mathrm{d}u - \int_0^s u\frac{u}{(1+u^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^s \frac{1}{(1+u^2)^{1/2}}\,\mathrm{d}u + u\frac{1}{(1+u^2)^{1/2}}\Big|_0^s - \int_0^s \frac{1}{(1+u^2)^{1/2}}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{s}{(1+s^2)^{1/2}}.
\end{aligned}$$

Conséquemment en faisant le changement de variable $u = t/\sqrt{x^2+y^2}$ on trouve

$$\begin{aligned}
\int_0^z \frac{1}{(x^2+y^2+t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t &= \int_0^z \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}(1+\frac{t^2}{x^2+y^2})^{3/2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{z/\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{(x^2+y^2)(1+u^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)\sqrt{1+\frac{z^2}{x^2+y^2}}} = \frac{z}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.
\end{aligned}$$

et donc

$$\psi_2(x,y,z) = \frac{-xz}{(x^2+y^2)r} + k(x,y).$$

De (8) on conclut de manière analogue que

$$\psi_1(x,y,z) = \frac{yz}{(x^2+y^2)r} + c(x,y).$$

Finalement (9) implique que $\partial_1 k(x,y) - \partial_2 c(x,y) \equiv 0$. On peut donc choisir

$$\psi(x,y,z) = \frac{z}{(x^2+y^2)r}(y,-x,0) \quad \text{pour } (x,y,z) \in A.$$

Un potentiel vecteur pour $\mathbf{f}$ sur A est donc de la forme générale $\psi(x,y,z) + \nabla\phi(x,y,z) + C$.

Remarquez que

$$\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3} = \nabla\left(-\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\right)$$

et donc le champ $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|^3$ possède à la fois le potentiel scalaire $-1/\|\mathbf{x}\|$ et le potentiel vectoriel ψ sur A.

b) L'intégrale sur S donne

$$\int_S \mathbf{f}\cdot \mathrm{d}\sigma = \int_S 1\,\mathrm{d}\sigma = 4\pi.$$

ce qui est en contradiction avec l'exercice 3. On conclut donc qu'il n'existe pas de $\psi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ tel que $\nabla \wedge \psi(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ sur Ω.

c) L'ensemble B est un sous-ensemble étoilé par rapport au point $\mathbf{a} = (0,0,1)$ et de plus $\nabla\cdot\mathbf{f} = 0$ sur B. Par conséquent il existe un champ vectoriel $\psi \in C^1(B, \mathbb{R}^3)$.

Première Possibilité Il se trouve que le champ (trouvé au point a)

$$\psi(x,y,z) = \frac{z}{(x^2+y^2)r}(y,-x,0) \text{ pour } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus D$$

est un potentiel vecteur pour $\mathbf{f}$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus D$ où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\}$. Pour obtenir un potentiel vecteur sur B on peut lui ajouter n'importe quel champ g avec la propriété que $\nabla \wedge g = 0$ et $\psi + g \in C^1(B, \mathbb{R}^3)$. Par exemple, on peut choisir $g(x,y,z) = \frac{-1}{(x^2+y^2)}(y,-x,0)$ pour définir

$$\Psi(x,y,z) = (\psi + g)(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2)}\left(1 - \frac{z}{r}\right)(y,-x,0) \text{ pour } (x,y,z) \in B.$$

Noter que Ψ est continu sur B car pour tout $z \geq 0$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \Psi(x,y,z) = 0$ (puisque $\lim_{(x,y)\to(0,0)} r = z$).

Cependant si $z < 0$, alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \Psi(x, yz)$ n'existe pas. La forme générale du potentiel sur B est donc $\Psi(x,y,z) + \nabla\phi(x,y,z) + C$ et comme la fonction $\nabla\phi(x,y,z)+C$ est continue on ne pourra pas modifier Ψ de manière à le rendre continu sur Ω.

Seconde Possibilité Pour trouver un potentiel vecteur pour $\mathbf{f}$ sur $\forall x \in B$, on calcule l'intégrale de chemin sur les segments joignant $\mathbf{a}$ à $\mathbf{x}$.

5. a) i. Comme Ω est étoilé et que $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$ alors il existe un potentiel vecteur pour $\mathbf{f}$ sur Ω. Montrons que l'on peut le choisir de la forme $\bar{\Psi} = (0, 0, \psi)$ avec $\psi \in C^2(\Omega)$.

Soit $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ un potentiel vecteur pour $\mathbf{f}$ sur Ω. La forme particulière de $\mathbf{f}$ implique que $f_3 = 0 = \partial_1\Psi_2 - \partial_2\Psi_1$ sur Ω, ce qui montre qu'il existe un potentiel scalaire $P \in C^1(\Omega)$ tel que $\partial_1 P = \Psi_1$ et $\partial_2 P = \Psi_2$ car Ω est étoilé (et donc simplement connexe).

On peut donc définir $\bar{\Psi} = \Psi - \nabla P = (0, 0, \Psi_3 - \partial_3 P)$ qui est encore un potentiel vecteur pour $\mathbf{f}$ sur Ω. Conséquemment on peut toujours assumer que le potentiel vecteur pour $\mathbf{f}$ est de la forme $\bar{\Psi} = (0, 0, \psi)$ pour un écoulement plannaire incompressible.

ii. Soient J un intervalle ouvert et $\mathbf{x} \in C^1(J, \mathbb{R}^2)$ une fonction telle que $\mathbf{x}(t)$ décrit la position d'une particule à l'instant t i.e.
$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = (\partial_2\psi, -\partial_1\psi)(\mathbf{x}(t))$.
On trouve que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\psi(\mathbf{x}(t)) &= \langle \nabla\psi(\mathbf{x}(t)), \mathbf{x}'(t)\rangle = \langle \nabla\psi(\mathbf{x}(t)), \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))\rangle \\ &= \partial_1\psi(\mathbf{x}(t))\mathbf{f}_1(\mathbf{x}(t)) + \partial_2\psi(\mathbf{x}(t))\mathbf{f}_2(\mathbf{x}(t)) = 0, \qquad \forall t \in J.\end{aligned}$$

et on conclut que les trajectoires $\mathbf{x}(t)$ appartiennent aux ensembles de niveaux de ψ.

De plus, à cause de la forme particulière du champ de vitesse $\mathbf{f}$ les trajectoires restent dans un plan $x_3 = const$, elles coïncident donc exactement avec l'intersection des surface de niveaux de ψ et de ce plan.

iii. Noter que $\partial_{x_3}\psi = 0$ car $\partial_{x_3}\mathbf{f} = 0$. On a donc que $0 = (\nabla \wedge \mathbf{f})_3 = \triangle\psi$ sur Ω. Donc ψ est harmonique sur Ω.

b) i. Comme Ω est étoilé (et donc simplement connexe), et que $\nabla \wedge \mathbf{f} = 0$ alors il existe un potentiel scalaire pour $\mathbf{f}$ sur Ω.

ii. Comme en général pour une fonction $a \in C^1(\Omega)$, le vecteur ∇a est orthogonal aux surfaces de niveaux de a, on a que $\mathbf{f} = \nabla\phi$ est orthogonal aux surfaces de niveaux de ϕ. De plus comme les trajectoires appartiennent aux surfaces de niveaux de ψ, alors $\mathbf{f}$ est orthogonal à $\nabla\psi$ (car $\mathbf{f}$ est tangent aux surfaces de niveaux de ψ). Conséquemment $\nabla\phi$ est orthogonal à $\nabla\psi$ sur les plans $x_3 = const$, et donc les lignes de niveaux sur ces plans sont elles aussi orthogonales en tout points.

iii. On trouve $0 = \nabla \cdot \mathbf{f} = \nabla \cdot \nabla\phi = \triangle\phi$.

c) i. Comme Ω est étoilé et que $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$ alors il existe un potentiel vecteur pour $\mathbf{f}$ sur Ω. Comme $f_3 = 0$, il existe donc une fonction de courant ψ.

On trouve $\psi(x,y,z) = xy$. Les trajectoires sont donc toutes de la forme $\mathbf{x}(t) = \big(c_1 e^t, c_2 e^{-t}, 0\big)$ pour des constantes c_1 et c_2 et en posant $s = c_1 e^t$ on voit que les trajectoires correspondent aux graphes de $\boldsymbol{\alpha}(s) = (s, const \times \frac{1}{s}, 0)$ qui sont des branches d'hyperboles.

ii. Comme Ω est étoilé (et donc simplement connexe), et que $\nabla \wedge \mathbf{f} = 0$ alors il existe un potentiel scalaire pour $\mathbf{f}$ sur Ω. On trouve $\phi(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ et ses lignes de niveaux sont de la forme $\boldsymbol{\beta}(t) = (\cosh(t), \sinh(t), 0)$ aussi des branches d'hyperboles, mais orthogonales en tous points à celle de ψ.

6. Il s'agit de vérifier que $\nabla \wedge \mathbf{F} = \mathbf{W}$. Par composantes

$$\begin{aligned}
(\nabla \wedge \mathbf{F})_1 &= \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 = f_1 = W_1,\\
(\nabla \wedge \mathbf{F})_2 &= \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 = f_2 = W_2,\\
(\nabla \wedge \mathbf{F})_3 &= \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 = -G_3 = W_3.
\end{aligned}$$

7. a) i. On a bien $u'(t) = \lambda u(t)$ pour tous $t \in J$, donc $u(t)$ est une solution de l'équation différentielle $y'(t) = \lambda y(t)$.

ii. Comme $A(\alpha f(t) + \beta g(t)) = (\alpha f(t) + \beta g(t))' = \alpha f'(t) + \beta g'(t) = \alpha A(f(t)) + \beta A(g(t))$ pour toutes constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et pour toutes fonctions $f, g \in V$, l'opérateur A est linéaire.

De plus, on bien que $A(u(t)) = \lambda u(t)$ pour tous $t \in]a, b[$ et donc la fonction u est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. Observer que cela montre que A admet une famille infini (non-dńombrable) de vecteur propre linéairement indépendants.

b) i. On calcule $L(u(t))$, et on trouve

$$L(u(t)) = au''(t) + bu'(t) + cu(t) = u(t)(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0.$$

Donc $u(t)$ est une solution l'équation différentielle (1).

ii. On observe que l'opérateur L qui défini l'équation différentielle (1) est linéaire. Conséquemment,

$$L(u(t)) = C_1 L(e^{\lambda_1 t}) + C_2 L(e^{\lambda_2 t}) = 0$$

car en utilisant le point i. on a que $L(e^{\lambda_i t}) = 0$ pour $i = 1, 2$.

iii. De maniére similaire, on calcule $L(u(t))$ et on trouve

$$L(u(t)) = 2a\lambda + b = 0$$

car comme λ est une (la) racine double du polynôme $a\lambda^2 + b\lambda + c$ on a bien $\lambda = -\frac{b}{2a}$.

c) On applique les résultats du point b. On commence par calculer les racines du polynôme $\lambda^2 + a = 0$, ce qui donne

pour $a < 0$ les deux racines sont distinctes et valent $\lambda_{1,2} = \pm a$, les solutions rélles sont donc de la forme

$$u(t) = C_1 e^{-at} + C_2 e^{at}$$

pour $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

pour $a = 0$ la racine est double et vaut $\lambda = 0$, les solutions réelles sont donc de la forme

$$u(t) = C_1 + C_2 t$$

pour $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

pour $a > 0$ les deux racines sont distinctes et valent $\lambda_{1,2} = \pm ia$ avec $i = \sqrt{-1}$, les solutions réelles sont donc de la forme

$$u(t) = C_1 \cos(|a|t) + C_2 \sin(|a|t)$$

pour $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

d) Par linéarité de L, on a simplement que $L(u(t)) = L(u_p(t)) + L(u_h(t)) = f(t)$ car u_p est une solution de (2) et que u_h est une solution du problème homogène (1).

8. a) On a

$$\mathbf{u}'(t) = \lambda \xi_\mathbf{0} e^{\lambda t} = \lambda \mathbf{u}(t) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t),$$

alors $\mathbf{u}(t)$ est une solution de l'équation $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

b) i. On a

$$\begin{aligned}\mathbf{u}'(t) &= \xi_\mathbf{0} e^{\lambda t} + \lambda(t\xi_\mathbf{0} + \xi_\mathbf{1})e^{\lambda t} \\ &= (\xi_\mathbf{0} + t\mathbf{A}\xi_\mathbf{0} + \mathbf{A}\xi_\mathbf{1} - \xi_\mathbf{0})e^{\lambda t} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{u}(t),\end{aligned}$$

alors $\mathbf{u}(t)$ est une solution de l'équation $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

ii. On a

$$\begin{aligned}\mathbf{u}'(t) &= (t\xi_\mathbf{0} + \xi_\mathbf{1})e^{\lambda t} + \lambda\left(\frac{1}{2}t^2\xi_\mathbf{0} + t\xi_\mathbf{1} + \xi_\mathbf{2}\right)e^{\lambda t} \\ &= (t\xi_\mathbf{0} + \xi_\mathbf{1} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{A}\xi_\mathbf{0} + t\mathbf{A}\xi_\mathbf{1} - t\xi_\mathbf{0} + \mathbf{A}\xi_\mathbf{2} - \xi_\mathbf{1})e^{\lambda t} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{u}(t),\end{aligned}$$

alors $\mathbf{u}(t)$ est une solution de l'équation $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

c) i. On peut réécrire l'équation (3) comme le système $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, ou

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice $\mathbf{A}$ sont les racines de l'équation $\lambda(\frac{b}{a} + \lambda) + \frac{c}{a} = 0$, ce qui est équivalent à dire que λ_1 et λ_2 sont les racines de $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

ii. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, les deux solutions sont de la forme du cas a), i.e. $\mathbf{x}(t) = \xi_0 e^{\lambda t}$, et donc la solution générale de (3) est pour

le cas $b^2 - 4ac > 0$ **:**

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

le cas $b^2 - 4ac < 0$ **:** $w(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ il s'agit d'une solution complexe avec $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$. Sa partie réelle est

$$y(t) = a_1\, e^{\alpha t} \sin \beta t + a_2\, e^{\alpha t} \cos \beta t.$$

le cas $b^2-4ac=0$: Si $\lambda_1=\lambda_2$, il existe un vecteur propre généralisé et une des solutions est de la forme du cas (b), i.e $\mathbf{x}(t)=(t\xi_{\mathbf{0}}+\xi_{\mathbf{1}})\,e^{\lambda t}$, et donc la solution générale de $(*)$ est pour le cas $b^2-4ac=0$,

$$y(t)=c_1e^{\lambda t}+c_2te^{\lambda t},\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

d) Rappelons, que une matrice $\mathbf{J}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ est dite en forme canonique de Jordan, si

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix}\mathbf{J}_1 & & & 0\\ & \mathbf{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathbf{J}_s\end{bmatrix},\ \text{où } \mathbf{J}_k=\begin{bmatrix}\lambda_k & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda_k\end{bmatrix},\quad k=1,\dots,s.$$

Si, $\mathbf{A}=\mathbf{SJS}^{-1}$, alors

$$\mathbf{S}=[\xi_0^{(1)}\ \dots\ \xi_{m_1}^{(1)}\dots\ \dots\xi_0^{(k)}\ \dots\ \xi_{m_k}^{(k)}\ \dots\ \dots\xi_0^{(s)}\ \dots\ \xi_{m_s}^{(s)}],$$

où m_k est l'ordre du block $\mathbf{J}_k$ et $\xi_0^{(k)}\dots\xi_{m_k}^{(k)}$ sont les vecteurs propres généralisés de $\mathbf{A}$, correspondants à la valeur propre λ_k.
La multiplicité algébrique de la valeur propre 2 est donc de 5 et sa multiplicité géométrique est donc de 2.
Alors, d'après b) et c), la solution générale de $\mathbf{x}'=\mathbf{Ax}$ est

$$\mathbf{u}(t)=c_1\begin{bmatrix}3\\3\\0\\0\\0\end{bmatrix}e^{2t}+c_2\left(t\begin{bmatrix}3\\3\\0\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\3\\2\\0\\0\end{bmatrix}\right)e^{2t}+c_3\left(\frac{1}{2}t^2\begin{bmatrix}3\\3\\0\\0\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\3\\2\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right)e^{2t}$$
$$+c_4\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}e^{2t}+c_5\left(t\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right)e^{2t}.$$

La solution du probléme de Cauchy $\mathbf{x}'=\mathbf{Ax}$, $\mathbf{x}(0)=\mathbf{e}_1$ est

$$\mathbf{u}_0(t)=\begin{bmatrix}e^{2t}-\frac{1}{2}te^{2t}+\frac{3}{2}t^2e^{2t}\\ \frac{3}{2}te^{2t}+\frac{3}{2}t^2e^{2t}\\ 2te^{2t}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Facultatif : une autre méthode. L'exponentielle d'une matrice $\mathbf{J}$ en forme canonique de Jordan est

$$e^{\mathbf{J}t}=\begin{bmatrix}e^{\mathbf{J}_1} & & & 0\\ & e^{\mathbf{J}_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\mathbf{J}_s}\end{bmatrix},\quad \text{avec}\quad e^{\mathbf{J}_k}=e^{\lambda_k t}\begin{bmatrix}1 & t & \dots & \frac{t^{m_k-1}}{(m_k-1)!}\\ & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & t\\ 0 & & & 1\end{bmatrix}$$

où m_k est l'ordre du block $\mathbf{J}_k$. Si une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est semblable à une matrice $\mathbf{J}$ en forme canonique de Jordan, i.e. il existe une matrice non singuliere $\mathbf{S}$ telle que $\mathbf{J} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$, alors

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{S}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{S}^{-1}.$$

$\mathbf{M}(t) = e^{\mathbf{A}t}$ est la matrice fondamentale principale en 0 de l'équation $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, i.e. les colonnes de $\mathbf{M}(t)$ sont n solutions réelles linéairement indépendants de cette equation, et la solution du problème de Cauchy $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \xi$ est $\mathbf{u}(t) = \mathbf{M}(t)\xi$.

Donc pour notre problème on trouve que

$$e^{\mathbf{J}t} = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{1}{2}t^2e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix},$$

et

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{S}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{S}^{-1} = e^{2t}\begin{bmatrix} 1-\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}t^2 & \frac{1}{2}t-\frac{3}{2}t^2 & t+\frac{3}{2}t^2 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2}t+\frac{3}{2}t^2 & 1-\frac{3}{2}t-\frac{3}{2}t^2 & 3t+\frac{3}{2}t^2 & 0 & 0 \\ 2t & -2t & 1+2t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La solution générale de l'équation $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ est de la forme

$$\mathbf{u}(t) = c_1e^{2t}\begin{bmatrix} 1-\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}t^2 \\ \frac{3}{2}t+\frac{3}{2}t^2 \\ 2t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2e^{2t}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}t-\frac{3}{2}t^2 \\ 1-\frac{3}{2}t-\frac{3}{2}t^2 \\ -2t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$+ c_3e^{2t}\begin{bmatrix} t+\frac{3}{2}t^2 \\ 3t+\frac{3}{2}t^2 \\ 1+2t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_4e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_5e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= e^{2t}\begin{bmatrix} c_1 + \frac{1}{2}(-c_1+c_2+2c_3)t + \frac{3}{2}(c_1-c_2+c_3)t^2 \\ c_2 + \frac{3}{2}(c_1-c_2+2c_3)t + \frac{3}{2}(c_1-c_2+c_3)t^2 \\ c_3 + 2(c_1-c_2+c_3)t \\ c_4 + c_5t \\ c_5e^{2t} \end{bmatrix},$$

avec des constantes c_1, c_2, c_3, c_4 et c_5 arbitraires. La solution du problème de Cauchy $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{e}_1$ est

$$\mathbf{u}_0(t) = \mathbf{M}(t)\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} e^{2t} - \frac{1}{2}te^{2t} + \frac{3}{2}t^2e^{2t} \\ \frac{3}{2}te^{2t} + \frac{3}{2}t^2e^{2t} \\ 2te^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$