
ANALYSE III **Corrigé Série 12** 9 Décembre 2016

---

1. On pose $u(x,t) = f(x)g(t)$. Conséquemment l'équation de la chaleur se réécrit comme
$$f(x)\partial_t g(t) = a\partial_x^2 f(x)g(t)$$
ce qui est équivalent à
$$\frac{\partial_t g(t)}{g(t)} = \lambda = a\frac{\partial_x^2 f(x)}{f(x)}$$
pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour $f \neq 0$ et $g \neq 0$ sur intervalle ouvert autour de x et t.
Le membre de gauche admet comme solution générale (voire série 11 ex. 7a)
$$g(t) = g_0 e^{\lambda t}.$$
L'équation $\frac{\lambda}{a} f(x) = \partial_x^2 f(x)$ admet comme solution générale (voire série 11 ex. 7b)
$$f(x) = c_1 e^{\mu_1 x} + c_2 e^{\mu_2 x} \text{ avec } \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{\lambda}{a}}.$$
Noter que les solutions qu'on a vues au cours, où on a distingué plusieurs cas suivant le signe de λ, sont équivalentes puisque pour $\lambda < 0$, μ_1 et μ_2 sont imaginaires et conjugués et pour autant que la somme des deux exponentielles soit réelle, on peut la réécrire comme une somme de sin *et* cos.
Avant d'appliquer le principe de superposition, on cherche donc des solutions de la forme $u(x,t) = (C_1 e^{\mu_1 x} + C_2 e^{\mu_2 x})e^{\lambda t}$.

   a) En remplaçant $u(x,t)$ dans les conditions de bord, on obtient
$$\begin{cases} \partial_x u(0,t) = (\mu_1 C_1 + \mu_2 C_2)e^{\lambda t} \\ u(1,t) = \left(C_1 e^{\mu_1} + C_2 e^{\mu_2}\right) e^{\lambda t} \\ u(x,0) = C_1 e^{\mu_1 x} + C_2 e^{\mu_2 x}. \end{cases}$$
   Si $\lambda > 0$ alors $\mu_{1,2} \in \mathbb{R}$ et on conclut que $\partial_x u(0,t) = 0$ et $u(1,t) = 0$ implique $C_1 = C_1 = 0$ et donc $u \equiv 0$. A cause des conditions de bord le cas $\lambda = 0$ donne aussi $u \equiv 0$. Conséquemment il n'y a pas de valeur propre pour $\lambda \geq 0$.
   Si $\lambda < 0$ alors μ_1 et μ_2 sont imaginaires et conjugués et
$$u(x,t) = \left(\tilde{C}_1 \cos\left(\sqrt{\frac{|\lambda|}{a}}x\right) + \tilde{C}_2 \sin\left(\sqrt{\frac{|\lambda|}{a}}x\right)\right) e^{\lambda t}$$
   Cette fonction satisfait les conditions de bord seulement si
$$C_2 = 0 \text{ et } \lambda \in \left\{-a\pi^2(n+\frac{1}{2})^2 \,|\, n \in \mathbb{N}\right\}$$
   Par conséquent la solution générale s'écrit
$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{N} A_n \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x\right) e^{\lambda_n t} \text{ avec } \lambda_n = -a\pi^2(n+\frac{1}{2})^2.$$

pour un certain N à trouver. Pour satisfaire la condition initiale $u(x,0) = A\cos(\frac{5\pi}{2}x)$ il suffit de choisir $A_n = 0\ \forall n \neq 2$ et $A_2 = A$. On trouve donc comme solution particulière

$$u(x,t) = A\cos\left(\frac{5\pi}{2}x\right) e^{-\frac{25a}{4}\pi^2 t}$$

b) De manière analogue on trouve que si $\lambda \geq 0$ le problème n'admet aucune valeur propre et qu'il faut s'intéresser à des fonctions de la forme

$$u(x,t) = \left(C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{|\lambda|}{a}}x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{|\lambda|}{a}}x\right)\right) e^{\lambda t}.$$

Les conditions de bord périodiques se récrivent donc

$$\begin{cases} C_1 e^{\lambda t} = \left(C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{|\lambda|}{a}}\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{|\lambda|}{a}}\right)\right) e^{\lambda t} \\ C_2 e^{\lambda t} = \left(-C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{|\lambda|}{a}}\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{|\lambda|}{a}}\right)\right) e^{\lambda t} \end{cases}$$

et impliquent $\lambda \in \left\{-4a\pi^2 n^2 \,|\, n \in \mathbb{N}^\star\right\}$; donc la solution générale s'écrit

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \left[A_n \cos(2\pi n x) + B_n \sin(2\pi n x)\right] e^{\lambda_n t} \text{ avec } \lambda_n = -a4\pi^2 n^2.$$

Pour satisfaire la condition initiale, il faut donc choisir $A_n = 0\ \forall n \neq 2$, $A_2 = A$, $B_n = 0\ \forall n \neq 1$ et $B_1 = B$. On trouve donc comme solution particulière

$$u(x,t) = A\cos(4\pi x)\, e^{-16a\pi^2 t} + B\sin(2\pi x)\, e^{-4a\pi^2 t}.$$

2. a) L'équation caractéristique de l'équation différentielle est

$$z^2 - 3z + 2 + \lambda = 0.$$

Les solutions sont $z = \frac{3\pm\sqrt{9-4(2+\lambda)}}{2} = \frac{3\pm\sqrt{1-4\lambda}}{2}$.
La solution générale de l'équation différentielle est

$$u(x) = \begin{cases} Ae^{\left(\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda}\right)x} + Be^{\left(\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda}\right)x} & \text{si } \lambda < \frac{1}{4} \\ (A+Bx)\, e^{\frac{3}{2}x} & \text{si } \lambda = \frac{1}{4} \\ e^{\frac{3}{2}x}\left\{A\cos\left(\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}x\right) + B\sin\left(\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}x\right)\right\} & \text{si } \lambda > \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Cas $\lambda < \frac{1}{4}$: $u(0) = 0 \Leftrightarrow A + B = 0$. Donc $A = -B$ et

$$u(x) = 2e^{\frac{3}{2}x} A \sinh\left(\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda x}\right).$$

D'où $u(1) = 0 \Leftrightarrow A = 0$. Il n'y a donc aucune valeur propre dans $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$.

Cas $\lambda = \frac{1}{4}$: $u(0) = 0 \Leftrightarrow A = 0$ et donc $u(x) = Bxe^{\frac{3}{2}x}$.

Alors $u(1) = 0 \Leftrightarrow B = 0$ et $\lambda = \frac{1}{4}$ n'est pas une valeur propre.

Cas $\lambda > \frac{1}{4}$: $u(0) = 0 \Leftrightarrow A = 0$ et donc $u(x) = Be^{\frac{3}{2}x} \sin\left(\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}} x\right)$.

$u(1) = 0 \Leftrightarrow B \sin\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}} = 0$.

Les valeurs propres sont donc les solutions de $\sin\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}} = 0$. D'où $\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}} = n\pi$ où $n \in \mathbb{Z}$ et $\lambda = \frac{1}{4} + (n\pi)^2$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ car $\lambda > \frac{1}{4}$.
Le spectre est $\left\{\frac{1}{4} + (n\pi)^2 \; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$.
Une fonction propre associée à $\lambda_n = \frac{1}{4} + (n\pi)^2$ est $f_n(x) = Be^{\frac{3}{2}x} \sin(n\pi x)$ où $B \neq 0$.

b) Afin de réduire le problème à un cas avec conditions homogènes, on cherche une fonction $v : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} v''(x) - 3v'(x) + 2v(x) = 0 \text{ pour } 0 < x < 1 \\ v(0) = 2 \text{ et } v(1) = 0. \end{cases}$$

La solution générale de l'équation différentielle est $v(x) = Ae^x + Be^{2x}$. Avec les conditions de bord, $v(0) = 2 \Leftrightarrow 2 = A + B$ et $v(1) = 0 \Leftrightarrow Ae^1 + Be^2 = 0$. Donc $A = -\dfrac{2e}{1-e}$ et $B = \dfrac{2}{1-e}$. D'où

$$v(x) = \frac{2e^x}{1-e}(e^x - e).$$

Posons $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$. On doit trouver w telle que

$$\partial_t w(x,t) = \partial_x^2 w(x,t) - 3\partial_x w(x,t) + 2w(x,t) \qquad \text{pour } 0 < x < 1 \text{ et } t > 0 \tag{1}$$

$$w(0,t) = w(1,t) = 0 \qquad \text{pour } t > 0 \tag{2}$$

$$w(x,0) = u(x,0) - v(x) = e^{\frac{3}{2}x}\{\sin\pi x - \sin 3\pi x\} \qquad \text{pour } 0 < x < 1 \tag{3}$$

Cherchons w sous la forme $w(x,t) = f(x)g(t)$. Alors

$$f(x)g'(t) = \{f''(x) - 3f'(x) + 2f(x)\}g(t)$$

et donc il y a une constante λ Telle que

$$\begin{aligned} &f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = \lambda f(x) && \text{pour } 0 < x < 1 \\ &g'(t) = \lambda g(t) && \text{pour } t > 0. \end{aligned}$$

D'autre part $f(0) = f(1) = 0$.
Le spectre du problème

$$\begin{cases} f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = \lambda f(x) \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases}$$

est $\sigma = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ où $\lambda_n = -\left(\frac{1}{4} + (n\pi)^2\right)$ et $f_n(x) = e^{\frac{3x}{2}} \sin(n\pi x)$ est une fonction propre associée à λ_n.
Pour $\lambda = \lambda_n$, $g(t) = Ae^{\lambda_n t} = Ae^{-\left(\frac{1}{4}+(n\pi)^2\right)t}$.

Donc $w(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{m} A_n e^{\frac{3x}{2}} \sin(n\pi x)\ e^{-\left(\frac{1}{4}+(n\pi)^2\right)t}$ est une solution de (1) et (2). Avec (3), on voit qu'il faut choisir les coefficients A_n tels que

$$w(0,x) = \sum_{n=1}^{m} A_n e^{\frac{3x}{2}} \sin(n\pi x) = (\sin(\pi x) - \sin(3\pi x))\, e^{\frac{3x}{2}}.$$

Il suffit de poser $A_1 = 1$, $A_3 = -1$ et $A_n = 0$ sinon. D'où

$$w(x,t) = e^{\frac{3x}{2}} \left\{ \sin(\pi x)\ e^{-\left(\frac{1}{4}+\pi^2\right)t} - \sin(3\pi x)\ e^{-\left(\frac{1}{4}+9\pi^2\right)t} \right\}$$

et

$$u(x,t) = \frac{2e^x(e^x - e)}{1-e} + w(x,t).$$

3. a) Cherchons des solutions du problème

$$\begin{aligned} &\partial_t^2 u(x,t) = c^2 \partial_x^2 u(x,t) && \text{pour } 0 < x < 1 \text{ et } t > 0 && (4)\\ &u(0,t) = u(1,t) = 0 && \text{pour } t > 0 && (5) \end{aligned}$$

de la forme

$$u(x,t) = f(x)\, g(t),\ u \neq 0.$$

(4) devient $f(x)\, g''(t) = c^2 f''(x)\, g(t)$ et donc il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $g''(t) = \lambda g(t)$ et $f''(x) = \frac{\lambda}{c^2} f(x)$ pour $t > 0$ et $0 < x < 1$.
Les conditions (5) deviennent

$$\begin{aligned} &f(0)\, g(t) = f(1)\, g(t) = 0 && \text{pour } t > 0\\ \Rightarrow &f(0) = f(1) = 0, \text{ sinon } u = 0. \end{aligned}$$

Le spectre du problème

$$\begin{cases} f''(x) = \dfrac{\lambda}{c^2} f(x) \ \text{ pour } \ 0 < x < 1 \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

est $\sigma = \left\{ \lambda_n = -(cn\pi)^2 : n \in \mathbb{N}^\star \right\}$ et une fonction propre associée à λ_n est $f_n(x) = B_n \sin(n\pi x)$ pour une constante B_n.
Pour $\lambda = \lambda_n$, $g''(t) = \lambda_n g(t)$ et donc $g_n(t) = P\cos(cn\pi t) + Q\sin(cn\pi t)$.
Donc les solutions de (4) et (5) sont

$$\sin(n\pi x)\, \{P\cos(cn\pi t) + Q\sin(cn\pi t)\}$$

où P, Q sont des constantes arbitraires.
Considérons

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{m} \sin(n\pi x)\, \{P_n \cos(cn\pi t) + Q_n \sin(cn\pi t)\}.$$

Alors $u(x,0) = \sum\limits_{n=1}^{m} P_n \sin(n\pi x)$ et $\partial_t u(x,0) = \sum\limits_{n=1}^{m} cn\pi Q_n \sin(n\pi x)$.

Pour satisfaire les conditions initiales, on pose $P_1 = 3$, $P_2 = 2$ et $P_n = 0$ pour $n \geq 3$, $Q_1 = \frac{1}{c\pi}$ et $Q_3 = \frac{2}{3c\pi}$ et $Q_n = 0$ sinon.
La solution est donc

$$\begin{aligned} u(x,t) &= 3\sin(\pi x)\cos(c\pi t) + 2\sin(2\pi x)\cos(2c\pi t) + \frac{1}{c\pi}\sin(\pi x)\sin(c\pi t) \\ &\quad + \frac{2}{3c\pi}\sin(3\pi x)\sin(3c\pi t). \end{aligned}$$

b) u est la solution du problème :

$$\begin{aligned} &\Delta u = 0 && \text{dans } \Omega && (7) \\ &\partial_y u(x,0) = \partial_y u(x,\pi) = 0 && \text{pour } 0 < x < 1 && (8) \\ &u(0,y) = 1 + \cos 2y \quad \text{et} \quad u(1,y) = 0 && \text{pour } 0 < y < \pi && (9) \end{aligned}$$

En observant le problème, on constate que les conditions de bord en y sont homogènes. On peut donc séparer les variables immédiatement. On commence par calculer les solutions de (7), (8) qui sont de la forme $u(x,y) = f(x)g(y)$. Alors il y a une constante λ telle que

$$f''(x) = \lambda f(x) \quad \text{et} \quad g''(y) = -\lambda g(y).$$

Par la condition (8), $g'(0) = g'(\pi) = 0$.
Les valeurs propres du problème

$$\begin{cases} g''(y) = -\lambda g(y) \\ g'(0) = g'(\pi) = 0 \end{cases}$$

sont $\lambda_n = n^2$ où $n \in \mathbb{N}$ et une fonction propre associée à λ_n est $A\cos(nx)$ où $A \neq 0$.
Pour $\lambda = n^2$, f doit vérifier $f''(x) = n^2 f(x)$ et donc

$$f(x) = \begin{cases} P + Qx & \text{si } n = 0 \\ Pe^{nx} + Qe^{-nx} & \text{si } n \in \mathbb{N}^\star \end{cases}$$

Cherchons une solution de (7), (8), (9) de la forme

$$u(x,y) = P_0 + Q_0 x + \sum_{n=1}^{m} \left\{P_n e^{nx} + Q_n e^{-nx}\right\}\cos(ny).$$

Alors

$$\begin{aligned} u(0,y) &= P_0 + \sum_{n=1}^{m} \{P_n + Q_n\}\cos(ny) \\ u(1,y) &= P_0 + Q_0 + \sum_{n=1}^{m} \left\{P_n e^{n} + Q_n e^{-n}\right\}\cos(ny). \end{aligned}$$

Posons $Q_0 = -P_0$ et $Q_n = -P_n e^{2n}$ pour $n \geq 1$, on voit que

$$\begin{aligned} &u(1,y) = 0 && \text{pour tout } y \in (0,\pi) \\ &u(0,y) = P_0 + \sum_{n=1}^{m} P_n\left(1 - e^{2n}\right)\cos(ny). \end{aligned}$$

Pour satisfaire (9), il suffit de poser $P_0 = 1$, $P_2 = \frac{1}{1-e^4}$, $P_n = 0$ sinon et alors $u(0, y) = 1 + \cos 2y$.

Donc la solution du problème est donnée par

$$\begin{aligned} u(x, y) &= 1 - x + \left\{ \frac{1}{1-e^4}\ e^{2x} - \frac{e^4}{1-e^4}\ e^{-2x} \right\} \cos(2y) \\ &= 1 - x + \frac{2e^2}{1-e^4} \sinh\left(2(x-1)\right) \cos(2y). \end{aligned}$$