ANALYSE III **Corrigé Série 13** 16 Décembre 2016

1. Le domaine Ω n'est pas le produit de deux intervalles, donc on peut pas utiliser la méthode de séparation des variables directement. Mais on peut essayer de chercher u sous la forme
$$u(x,y) = v(r,\theta)$$
où $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, avec $0 \leq r \leq 1$ et $0 \leq \theta \leq \pi$.
Comme
$$\Delta u(x,y) = \partial_r^2 v(r,\theta) + \frac{1}{r}\partial_r v(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 v(r,\theta),$$
l'équation
$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{pour } (x,y) \in \Omega, \\ u(x,0) = 0 \text{ et } u(x,y) = 3y - 4y^3 & \text{pour } (x,y) \in \partial\Omega \end{cases}$$
devient
$$r^2\partial_r^2 v(r,\theta) + r\partial_r v(r,\theta) + \partial_\theta^2 v(r,\theta) = 0 \quad \text{pour } 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \tag{1}$$
$$v(r,0) = v(r,\pi) = 0, \tag{2}$$
$$v(1,\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = \sin 3\theta. \tag{3}$$
Cherchons des solutions de la forme
$$v(r,\theta) = f(r)g(\theta).$$
Alors
$$r^2 f''(r)g(\theta) + rf'(r)g(\theta) + f(r)g''(\theta) = 0,$$
et donc
$$\frac{r^2 f''(r) + rf'(r)}{f(r)} = -\frac{g''(\theta)}{g(\theta)} = \lambda, \tag{4}$$
où λ est une constante.
La fonction g doit être une solution du problème aux limites
$$g''(\theta) = -\lambda g(\theta) \quad \text{pour } 0 \leq \theta \leq \pi, \tag{5}$$
$$g(0) = g(\pi) = 0. \tag{6}$$
— Si $\lambda < 0$, la solution de (5) est $g(\theta) = Ae^{-\sqrt{-\lambda}\,\theta} + Be^{\sqrt{-\lambda}\,\theta}$. Mais de (6) on obtient que $A = B = 0$.
— Si $\lambda = 0$, $g(\theta) = A + B\theta$. Donc (6) implique que $A = B = 0$.
— Si $\lambda > 0$, $g(\theta) = A\sin\sqrt{\lambda}\,\theta + B\cos\sqrt{\lambda}\,\theta$. Cette fois (6) implique que $B = 0$, $A \in \mathbb{R}$ et $\lambda = n^2$, $n \in \mathbb{N}$.
Alors le spectre du problème (4) est $\{\sigma = \lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$, où $\lambda_n = n^2$ et une fonction propre associée à λ_n est
$$g_n = A_n \sin n\,\theta, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pour $\lambda = \lambda_n$ la fonction f doit satisfaire l'équation différentielle

$$r^2 f''(r) + r f'(r) = n^2 f(r) \quad \text{pour } 0 \leq r \leq 1 \tag{7}$$

qui est linéaire mais à coefficient non-constants. Le changement de variable $r = e^s$ et $h(s) := f(e^s)$ permet de réécrire (7) comme l'équation aux coefficients constants

$$\frac{d^2 h(s)}{ds^2} - n^2 h(s) = 0.$$

On trouve donc

$$f_n(r) = P r^n + Q r^{-n}, \quad P, Q \in \mathbb{R}.$$

Ici on doit poser $Q = 0$ pour assurer que $v = f(r)g(\theta)$ soit continue en $(0,0)$. Donc on obtient

$$v(r,\theta) = r^n A \sin n\,\theta, \quad A \in \mathbb{R}.$$

La solution générale de (1) et (2) est

$$v(r,\theta) = \sum_{n=1}^{m} r^n A_n \sin n\theta.$$

Pour satisfaire aussi (3), on a que

$$\sum_{n=1}^{m} A_n \sin n\theta = \sin 3\theta.$$

Alors, $m = 3$, $A_1, A_2 = 0$, $A_3 = 1$ et la solution du problème posé est

$$v(r,\theta) = r^3 \sin 3\theta = 3r^3 \sin\theta - 4r^3 \sin^3\theta$$

et

$$u(x,y) = 3(x^2+y^2)y - 4y^3 = 3x^2 y - y^3.$$

2. a) **Première solution** Les fonction $\sin(nx)$ sont les solution du problème de Sturm-Liouville

$$-u''(x) = \lambda_n u(x) \text{ avec } \lambda_n = n^2$$

pour les conditions de bord $u(0) = 0$ et $u(\pi) = 0$. Elles sont donc orthogonales par le théorème du cours. Ou sinon, en notant $\phi_n(x) = \sin(nx)$, on observe que

$$\lambda_n \langle \phi_n, \phi_m \rangle = -\int_0^\pi \phi_n''(x)\phi_m(x)dx = -\int_0^\pi \phi_n(x)\phi_m''(x)dx = \lambda_m \langle \phi_n, \phi_m \rangle$$

pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ en intégrant par parties. Ceci implique que $(\lambda_n - \lambda_m)\langle \phi_n, \phi_m \rangle = 0$ et donc si $n \neq m$ alors $\langle \phi_n, \phi_m \rangle = 0$.

Seconde solution En utilisant les identitées $\sin(w) = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$ et $\cos(w) = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$ on a

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin(nx)\,\sin(mx)\,dx &= \int_0^\pi \left[\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}\right]\left[\frac{e^{imx} - e^{-imx}}{2i}\right] dx \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{2}\left[\cos((m-n)x) - \cos((n+m)x)\right] dx.\end{aligned}$$

Donc on obtient

$$\int_0^\pi \sin^2(nx)\,dx = \frac{\pi}{2} \qquad\qquad \text{si } m = n$$
$$\int_0^\pi \sin(nx)\sin(mx)\,dx = 0 \qquad\qquad \text{si } m \neq n.$$

b) En utilisant le point précédent, on se convainc que les séries i-iii sont orthogonales. et que $\|\phi_n\|^2 := \langle \phi_n, \phi_n \rangle = \frac{\pi}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pour une function $f(x)$ donnée nous voulons trouver les coefficients de la série suivante

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n + c_0 \phi_0 \ ,$$

où,

$$c_n = \frac{\langle f, \phi_n \rangle}{||\phi_n||^2},\ n \geq 1$$

et la valeur de c_0 dépend de la séries $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. D'après le cours on a que pour la série de sinus $c_0\phi_0 = 0$ et pour la série de cosinus $c_0\phi_0 = c_0 = \dfrac{1}{\pi}$.

A) i. Pour $n \geq 1$

$$\langle f, \phi_n \rangle = \int_0^\pi x \sin nx\,dx = \frac{\pi}{n}(-1)^{n+1}\ ,$$

donc $c_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$.

ii. Pour $n \geq 0$

$$\langle f, \phi_n \rangle = \int_0^\pi x \cos nx\,dx = \begin{cases} \frac{\pi^2}{2} & \text{si } n = 0 \\ -\frac{2}{n^2} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc $c_0 = \frac{\pi}{2}$, $c_n = -\frac{4}{\pi n^2}$ pour n impair et $c_n = 0$ sinon.

iii. En réutilisant les résultats précédents, on a donc $c_0^c = \frac{\pi}{2}$, $c_n^c = 0$ sinon et $c_n^s = -\frac{2}{n}$ (tous les n sont pairs).

B) i. Il est évident que $c_1 = 1$ et $c_n = 0$ sinon.

ii. Pour $n \geq 0$

$$\langle f, \phi_n \rangle = \int_0^\pi \sin x \cos nx\,dx = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ -\frac{2}{n^2-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

donc $c_0 = \frac{2}{\pi}$, $c_n = 0$ pour n impair et $c_n = -\frac{4}{\pi(n^2-1)}$ sinon.

iii. Avec les résultats précédents, $c_0^c = \frac{2}{\pi}$, $c_n^c = -\frac{4}{\pi(n^2-1)}$ sinon et $c_n^s = 0$ pour tout n (tous les n sont pairs).

C) i. Pour $n \geq 1$

$$\langle f, \phi_n \rangle = \int_0^\pi \cos x \sin nx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{2n}{n^2-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

donc $c_n = \frac{4n}{\pi(n^2-1)}$ pour n pair et $c_n = 0$ sinon.

ii. Evidemment, $c_1 = 1$ et $c_n = 0$ sinon.

iii. En utilisant les résultats précédents, $c_n^c = 0$ pour tout n et $c_n^s = \frac{4n}{\pi(n^2-1)}$ (tous les n sont pairs).

c) En appliquant la méthode de séparation de variables et le principe de superposition, on trouve que la solution générale est de la forme

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2 t} \sin(nx).$$

Il nous reste donc à trouver les coefficients A_n tels que

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) = x.$$

En utilisant le point précédent, on conclut que

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} e^{-n^2 t} \sin(nx).$$

On observe que la suite des sommes partielles converge (de manière uniforme), la fonction $u(x,t)$ est donc bien définie.

3. a) Pour la linéarité on vérifie que pour toutes constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ et pour toutes fonctions $f, g \in V$ on a bien que $c_1 f + c_2 g \in V$ (pour les conditions de bord) et que

$$\begin{aligned} L(c_1 f + c_2 g) &= -\{p(x)(c_1 f + c_2 g)'(x)\}' + q(x)(c_1 f + c_2 g)(x) \\ &= c_1 \left[-\{p(x)f'(x)\}' + q(x)f(x)\right] + c_2 \left[-\{p(x)g'(x)\}' + q(x)g(x)\right] \\ &= c_1 Lf + c_2 Lg \end{aligned}$$

par linéarité de la dérivée et de la multiplication dans $\mathbb{R}$.
Vérifions maintenant que L est auto-adjoint. Par définition on a

$$\langle Lf, g\rangle = \int_a^b \left[-\{p(x)f'(x)\}' + q(x)f(x)\right] g(x)\, dx.$$

En intégrant deux fois par partie on obtient

$$\begin{aligned} \langle Lf, g\rangle &= -p(x)f'(x)g(x)\big|_a^b + \int_a^b p(x)f'(x)g'(x) + q(x)f(x)g(x)\, dx \\ &= -p(x)f'(x)g(x)\big|_a^b + p(x)f(x)g'(x)\big|_a^b \\ &\quad + \int_a^b \left[-\{p(x)g'(x)\}' + q(x)g(x)\right] f(x)\, dx \\ &= \langle Lg, f\rangle \end{aligned}$$

car f, $g \in V$ et donc les conditions de bord annulent les termes $-p(x)f'(x)g(x)\big|_a^b$ et $p(x)f(x)g'(x)\big|_a^b$.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de l'opérateur L et soit y une fonction propre associée à valeurs dans $\mathbb{C}$. Le produit scalaire $\langle f_1, f_2 \rangle = \int_a^b \bar{f}_1 f_2 dx$ est évidemment hermitien. Sans perdre en généralité, on peut supposer que y est de norme 1, de sorte que

$$\lambda = \lambda \langle y, y \rangle = \langle y, \lambda y \rangle = \langle y, Ly \rangle = \langle Ly, y \rangle = \langle \lambda y, y \rangle = \bar{\lambda} \langle y, y \rangle = \bar{\lambda}$$

et donc $\lambda \in \mathbb{R}$. (Par conséquence, les fonctions propres sont aussi réelles.)

c) Soient λ_1 et λ_2 des valeurs propres distinctes de L et soient ϕ_1 et ϕ_2 des fonctions propres associées. Alors

$$\lambda_1 \langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \langle \lambda_1 \phi_1, \phi_2 \rangle = \langle L\phi_1, \phi_2 \rangle = \langle L\phi_2, \phi_1 \rangle = \langle \lambda_2 \phi_2, \phi_1 \rangle = \lambda_2 \langle \phi_2, \phi_1 \rangle$$

et comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$ on conclut que $\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = 0$.

4. a) Au coin 1, c'est-à-dire en $x = 0$, $y = 0$, on a bien que si la condition sur le bord a est respectée, donc $u(0,0) = 0$, alors la condition sur le bord d, $u(0,y) = y$ est aussi respectée.

Au coin 2, c'est-à-dire en $x = 1$, $y = 0$, si la condition sur le bord a est respectée, donc $u(x,0) = 0$ on aura que $u_x(x,0) = 0$ sur a et donc la condition sur le bord b est respectée. De même pour le coin 4.

Au coin 3, c'est-à-dire en $x = 1$, $y = 2$, la condition sur le bord b est $u_x(1,2) = 2$ et la condition sur le bord c est $u_y(1,2) = 1$. Mais connaître u_x sur le bord b ne nous dit rien sur ce qu'est u_y sur ce bord et vice-versa pour le bord c. Il n'y a donc pas de condition de compatibilité entre les deux.

b) i) On remarque d'abord que les conditions de bord sont incompatibles : sur d, on a $u(0,y) = y$ et donc $u_y(0,y) = 1$ alors que sur c on a $u_y(x,2) = 0$, donc on a un problème au coin 4.

Solution (pas demandé) : en posant $u(x,y) = f(x)\,g(y)$ on trouve que $g(y) = \sin\left(\frac{2n+1}{4}\pi y\right)$ et $f(x) = pe^{(2n+1)\pi x} + qe^{-(2n+1)\pi x}$. Par superposition, on a donc

$$u(x,y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(p_n e^{(2n+1)\pi x} + q_n e^{-(2n+1)\pi x}\right) \sin\left(\frac{2n+1}{4}\pi y\right)$$

et on cherche les coefficients p_n et q_n de sorte que $u(0,y) = y$ et $u_x(1,y) = 0$. La condition $u_x = 0$ implique que $q_n = p_n e^{2(2n+1)\pi}$ et donc

$$u(x,y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n \left(e^{(2n+1)\pi x} + e^{(2n+1)\pi(2-x)}\right) \sin\left(\frac{2n+1}{4}\pi y\right).$$

Pour satisfaire la condition $u = y$ en $x = 0$, il faut calculer

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{1 + e^{2(2n+1)\pi}} \frac{\left\langle y, \sin\left(\frac{2n+1}{4}\pi y\right)\right\rangle}{\left\langle \sin\left(\frac{2n+1}{4}\pi y\right), \sin\left(\frac{2n+1}{4}\pi y\right)\right\rangle} \\ &= \frac{(-1)^n\, 16}{(2n+1)^2 \pi^2 \left(1 + e^{2(2n+1)\pi}\right)} \end{aligned}$$

où pour calculer le produit scalaire, on prend l'intégrale entre 0 et 2. Au final

$$u_1(x,y) = \frac{16}{\pi^2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n \left(e^{(2n+1)\pi x} + e^{(2n+1)\pi(2-x)}\right)}{(2n+1)^2 \left(1 + e^{2(2n+1)\pi}\right)} \sin\left(\frac{2n+1}{4}\pi y\right).$$

ii) On a à nouveau des conditions de bord incompatibles au coin 4.
Solution (pas demandé) : en posant $u(x,y) = f(x)g(y)$, on trouve que $f(x) = \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right)$ et $g(y) = pe^{\frac{2n+1}{2}\pi y} + qe^{-\frac{2n+1}{2}\pi y}$. En superposant on a donc

$$u(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right)\left(p_n e^{\frac{2n+1}{2}\pi y} + q_n e^{-\frac{2n+1}{2}\pi y}\right)$$

et il faut maintenant chercher les coefficients p_n et q_n de sorte que $u(x,0) = 0$ et $u_y(x,2) = 1$. La première de ces conditions implique que $q_n = -p_n$ et donc

$$u(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right)\sinh\left(\frac{2n+1}{2}\pi y\right)$$

ce qui implique

$$u_y(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(2n+1)\pi}{2} p_n \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right)\cosh\left(\frac{2n+1}{2}\pi y\right)$$

et alors

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{2}{(2n+1)\pi\cosh((2n+1)\pi)}\frac{\left\langle 1, \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right)\right\rangle}{\left\langle \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right), \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right)\right\rangle} \\ &= \frac{8}{(2n+1)^2\pi^2\cosh((2n+1)\pi)} \end{aligned}$$

où pour calculer le produit scalaire, on prend l'intégrale entre 0 et 1. Finalement

$$u_2(x,y) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right)\sinh\left(\frac{2n+1}{2}\pi y\right)}{(2n+1)^2\cosh((2n+1)\pi)}$$

iii) Ici on n'a aucun problème de compatibilité des conditions de bord, mais il n'existe pas de condition de compatibilité au coin 3.
Solution (pas demandé) : comme au dans le premier cas, on trouve

$$u(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(p_n e^{(2n+1)\pi x} + q_n e^{-(2n+1)\pi x}\right)\sin\left(\frac{2n+1}{4}\pi y\right)$$

et on cherche les coefficients p_n et q_n de sorte que $u(0,y) = 0$ et $u_x(1,y) = y$. La première condition implique $q_n = -p_n$ et donc

$$u(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n \sinh((2n+1)\pi x)\sin\left(\frac{2n+1}{4}\pi y\right)$$

ce qui donne

$$u_x(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (2n+1)\pi p_n \cosh((2n+1)\pi x)\sin\left(\frac{2n+1}{4}\pi y\right)$$

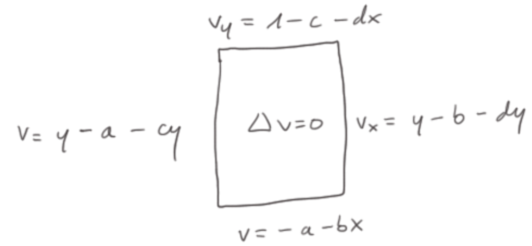
et alors pour satisfaire la condition $u_x = y$ sur le bord b on calcule

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{(2n+1)\pi\cosh((2n+1)\pi)}\frac{\left\langle y, \sin\left(\frac{2n+1}{4}\pi y\right)\right\rangle}{\left\langle \sin\left(\frac{2n+1}{4}\pi y\right), \sin\left(\frac{2n+1}{4}\pi y\right)\right\rangle} \\ &= \frac{16}{(2n+1)^3\pi^3\cosh((2n+1)\pi)}(-1)^n \end{aligned}$$

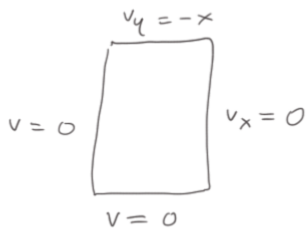
en réutilisant les résultats du premier problème. On a donc

$$u_3(x,y) = \frac{16}{\pi^3} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n \sinh((2n+1)\pi x)}{(2n+1)^3 \cosh((2n+1)\pi)} \sin\left(\frac{2n+1}{4}\pi y\right).$$

c) En posant $v(x,y) = u(x,y) - (a + bx + cy + dxy)$, les conditions de bord deviennent



Et donc en posant $a = b = 0$ et $c = d = 1$, le problème se réduit à



et les conditions de bord sont compatibles. Par la méthode de séparation des variables, on pose $v(x,y) = f(x)g(y)$, on résout d'abord pour f puis pou rg et avec le principe de superposition des variables on trouve

$$v(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right) \sinh\left(\frac{2n+1}{2}\pi y\right)$$

(cf. 4(b)ii) où il faut trouver les p_n tels que $v_y(x,2) = -x$. On a

$$v_y(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(2n+1)\pi}{2} p_n \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right) \cosh\left(\frac{2n+1}{2}\pi y\right)$$

et donc les on calcule les p_n comme

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{2}{(2n+1)\pi\cosh((2n+1)\pi)} \frac{\left\langle -x, \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right)\right\rangle}{\left\langle \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right), \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right)\right\rangle} \\ &= \frac{16}{(2n+1)^3 \pi^3 \cosh((2n+1)\pi)} (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

et on obtient

$$v(x,y) = \frac{16}{\pi^3} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{n+1} \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right) \sinh\left(\frac{2n+1}{2}\pi y\right)}{(2n+1)^3 \cosh((2n+1)\pi)}$$

et au final

$$u(x,y) = y + xy + \frac{16}{\pi^3} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{n+1} \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right) \sinh\left(\frac{2n+1}{2}\pi y\right)}{(2n+1)^3 \cosh((2n+1)\pi)}.$$

Remarque : *Cet exemple est conçu pour être simple. Normalement tout ce qu'on peut faire est de choisir* a, b, c *et* d *tels que* $v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ *où chacun des* v_i *satisfait un problème avec une seule condition de bord inhomogène et toutes les valeurs aux bords compatibles.*

5. Cherchons d'abord les fonctions de la forme $u(x,y,t) = f(x)\,g(y)\,h(t)$ qui satisfont les équations

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,y,t) &= \Delta u(x,y,t) && (8)\\ \partial_x u(0,y,t) = \partial_x u(\pi,y,t) &= \partial_y u(x,0,t) = \partial_y u(x,2\pi,t) = 0 && (9)\end{aligned}$$

(8) devient $f(x)\,g(y)\,h'(t) = f''(x)\,g(y)\,h(t) + f(x)\,g''(y)\,h(t)$ et donc

$$\frac{h'(t)}{h(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{g''(y)}{g(y)}$$

aux points où $f(x)\,g(y)\,h(t) \neq 0$. Donc il y a des constantes λ, μ telles que

$$\begin{aligned} \frac{h'(t)}{h(t)} &= \lambda = \frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{g''(y)}{g(y)}\\ \frac{f''(x)}{f(x)} &= \mu = \lambda - \frac{g''(y)}{g(y)}.\end{aligned}$$

Donc les fonctions f, g et h sont respectivement des solutions des équations différentielles

$$\begin{aligned} f''(x) &= \mu f(x) && \text{pour } 0 < x < \pi\\ g''(y) &= (\lambda - \mu)\,g(y) && \text{pour } 0 < y < 2\pi\\ h'(t) &= \lambda h(t) && \text{pour } t > 0.\end{aligned}$$

Les conditions aux limites (9) deviennent

$$f'(0) = f'(\pi) = g'(0) = g'(2\pi) = 0.$$

Donc μ doit être une valeur propre de

$$\begin{cases} f''(x) = \mu f(x) & \text{pour } 0 < x < \pi\\ f'(0) = f'(\pi) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

tandis que $\lambda - \mu$ doit être une valeur propre de

$$\begin{cases} g''(y) = (\lambda - \mu)\,g(y) & \text{pour } 0 < y < 2\pi\\ g'(0) = g'(2\pi) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Le spectre de (10) est $\sigma = \left\{\mu_n = -n^2 : n \in \mathbb{N}\right\}$ et $f_n(x) = \cos nx$ est une fonction propre associée à μ_n.
Le spectre de (4) est $s = \left\{\xi_m = -\frac{m^2}{4} : m \in \mathbb{N}\right\}$ et $g_m(y) = \cos\left(\frac{my}{2}\right)$ est une fonction propre associée à ξ_m.
Si $\mu = \mu_n$ et $\lambda - \mu = \xi_m$, alors $\lambda = \mu_n + \xi_m = -\left(n^2 + \frac{m^2}{4}\right)$ et h doit être une solution de

$$h'(t) = -\left(n^2 + \frac{m^2}{4}\right) h(t).$$

D'où $h(t) = Ae^{-\left(n^2+\frac{m^2}{4}\right)t}$ pour une constante A et u est de la forme

$$u(x,y,t) = A\cos(nx)\cos\left(\frac{my}{2}\right)e^{-\left(n^2+\frac{m^2}{4}\right)t}.$$

Notons que

$$u(x,y,t) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M} A_{nm}\cos(nx)\cos\left(\frac{my}{2}\right)e^{-\left(n^2+\frac{m^2}{4}\right)t}$$

est une solution de (8) et (9) quelles que soient les constantes A_{nm} et les bornes de sommation N et M. Dans ce cas,

$$u(x,y,0) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M} A_{nm}\cos(nx)\cos\left(\frac{my}{2}\right)$$

et pour satisfaire la condition initiale

$$u(x,y,0) = \cos x\cos 2y - 2\cos 3x\cos\frac{y}{2}$$

on pose $A_{14} = 2$, $A_{31} = 2$ et $A_{nm} = 0$ sinon. Finalement

$$u(x,y,t) = \cos x\cos 2ye^{-5t} - 2\cos 3x\cos\frac{y}{2}e^{-\frac{37}{4}t}.$$