ANALYSE III **Corrigé Série 14** 23 Décembre 2015

1. Soit $\mathcal{B}_N(R)$ une boule de rayon R dans $\mathbb{R}^N$. Le volume V_N de $\mathcal{B}_N(R)$ est donné par

$$V_N = \int_{\mathcal{B}_N(R)} \mathbf{dx}$$

Posons $\mathbf{y} = R\mathbf{x}$ et calculons le déterminant de la matrice jacobienne

$$\det\left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}\right) = \det(R\, I_N) = R^N,$$

avec I_N, la matrice identité $N \times N$. Ainsi

$$V_N = R^N \int_{\mathcal{B}_N(1)} \mathbf{dy} = b_N R^N.$$

Ceci est la définition de b_N. En plus on voit que le facteur d'échelle R^N est bien juste.
La surface S_N d'une boule $\mathcal{B}_N(R)$ se calcule comme suit

$$S_N = 2 \int_{\mathcal{B}_{N-1}(R)} dA$$

On considère seulement une hémisphère et on la paramètre par $\alpha(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \sqrt{R^2 - |\mathbf{x}|^2})$, avec $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_{N-1}(R)$.
Pour un graphe $\mathrm{g}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x}))$ on a la jacobienne

$$\nabla g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} I_{N-1} \\ \nabla\psi^T \end{pmatrix}$$

La gramienne G est

$$G = I_{N-1} + \nabla\psi \otimes \nabla\psi$$

où $\otimes$ est le produit extérieur. Pour deux vecteurs $u \in \mathbb{R}^m$ et $v \in \mathbb{R}^n$ il est défini par

$$u \otimes v = \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & \cdots & u_1v_n \\ u_2v_1 & u_2v_2 & \cdots & u_2v_n \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ u_mv_1 & u_mv_2 & \cdots & u_mv_n \end{pmatrix}.$$

La gramienne a $(N-2)$ fois la valeur propre 1 et une fois la valeur propre $1 + \|\nabla\psi\|^2$ avec vecteur propre $\nabla\psi$, donc

$$\sqrt{\det(G)} = \sqrt{1 + \|\nabla\psi\|^2}$$

Dans le cas d'une hémisphère d'une sphère on a $\psi = \sqrt{R^2 - |\mathbf{x}|^2}$, donc

$$\nabla\psi = -\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{R^2 - |\mathbf{x}|^2}} \quad \Rightarrow \quad 1 + \|\nabla\psi\|^2 = \frac{R^2}{R^2 - |\mathbf{x}|^2}$$

La surface S_N est donnée par

$$S_N = 2\,R \int_{\mathcal{B}_{N-1}(R)} \frac{\mathbf{dx}}{\sqrt{R^2 - |\mathbf{x}|^2}}$$

On pose comme plus haut $\mathbf{x} = R\mathbf{y}$, avec la jacobienne

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} = R\, I_{N-1},$$

il en suit que

$$S_N = 2\,R^{N-1} \int_{\mathcal{B}_{N-1}(1)} \frac{\mathbf{dy}}{\sqrt{1 - |\mathbf{y}|^2}} = a_N\, R^{N-1}.$$

Ce qui montre que le facteur R^{N-1} est correct pour la surface des sphères. En plus on vient de définir a_N.

2. Le volume d'une boule de rayon R est

$$V_N(R) = \int_{\mathcal{B}_N(R)} \mathbf{dx} = 2 \int_{\mathcal{B}_{N-1}(R)} \sqrt{R^2 - |\mathbf{x}|^2}\mathbf{dx}.$$

Ceci implique

$$\frac{\partial V_N}{\partial R} = 2 \int_{\mathcal{B}_{N-1}(R)} \frac{R}{\sqrt{R^2 - |\mathbf{x}|^2}}\mathbf{dx} = S_N(R).$$

Et finalement on a

$$\frac{\partial}{\partial R}(b_N\, R^N) = N\, b_N\, R^{N-1} \overset{*}{=} a_N\, R^{N-1}$$

$*$ si et seulement si $a_N = N\, b_N$.

3. Sans perte de généralité on peut poser $R = 1$. Calculons b_N :

$$\begin{aligned}
b_N &= 2 \int_{\mathcal{B}_{N-1}(1)} \sqrt{1 - |\mathbf{x}|^2}\mathbf{dx} \\
&= 2 \int_0^1 a_{N-1} r^{N-2} \sqrt{1 - r^2} dr \\
&\overset{*}{=} 2\, \frac{a_{N-1}}{N-1} \int_0^1 \frac{r^N}{\sqrt{1 - r^2}} dr \\
&= 2\, \frac{a_{N-1}}{(N-1) a_{N+1}} \int_{\mathcal{B}_{N+1}(1)} \frac{\mathbf{dx}}{\sqrt{1 - |\mathbf{x}|^2}} \\
&= \frac{a_{N-1}}{(N-1) a_{N+1}} a_{N+2},
\end{aligned}$$

où $(*)$ on a intégré par partie. Vu que $a_N = N\, b_N$,

$$\frac{b_N}{b_{N+2}} = \frac{(N+2)}{(N+1)} \frac{b_{N-1}}{b_{N+1}}$$

La relation de récurrence donne pour $N = 2, 3, ...$

$$\begin{array}{lll}
N = 2 & b_4 = \frac{\pi^2}{2} & a_4 = 2\pi^2 \\
N = 3 & b_5 = \frac{8\pi^2}{15} & b_5 = \frac{8\pi^2}{3} \\
 & \vdots &
\end{array}$$

4. Le graphe de V_N et S_N est