

1. Soit $\mathcal{B}_N(R)$ une boule de rayon R dans \mathbb{R}^N . Le volume V_N de $\mathcal{B}_N(R)$ est donné par

$$V_N = \int_{\mathcal{B}_N(R)} \mathbf{d}\mathbf{x}$$

Posons $\mathbf{y} = R\mathbf{x}$ et calculons le déterminant de la matrice jacobienne

$$\det\left(\frac{\partial\mathbf{y}}{\partial\mathbf{x}}\right) = \det(RI_N) = R^N,$$

avec I_N , la matrice identité $N \times N$. Ainsi

$$V_N = R^N \int_{\mathcal{B}_N(1)} \mathbf{d}\mathbf{y} = b_N R^N.$$

Ceci est la définition de b_N . En plus on voit que le facteur d'échelle R^N est bien juste.

La surface S_N d'une boule $\mathcal{B}_N(R)$ se calcule comme suit

$$S_N = 2 \int_{\mathcal{B}_{N-1}(R)} dA$$

On considère seulement une hémisphère et on la paramètre par $\alpha(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \sqrt{R^2 - |\mathbf{x}|^2})$, avec $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_{N-1}(R)$.

Pour un graphe $g(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x}))$ on a la jacobienne

$$\nabla g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} I_{N-1} \\ \nabla\psi^T \end{pmatrix}$$

La gramienne G est

$$G = I_{N-1} + \nabla\psi \otimes \nabla\psi$$

où \otimes est le produit extérieur. Pour deux vecteurs $u \in \mathbb{R}^m$ et $v \in \mathbb{R}^n$ il est défini par

$$u \otimes v = \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & \cdots & u_1v_n \\ u_2v_1 & u_2v_2 & \cdots & u_2v_n \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ u_mv_1 & u_mv_2 & \cdots & u_mv_n \end{pmatrix}.$$

La gramienne a $(N-2)$ fois la valeur propre 1 et une fois la valeur propre $1 + \|\nabla\psi\|^2$ avec vecteur propre $\nabla\psi$, donc

$$\sqrt{\det(G)} = \sqrt{1 + \|\nabla\psi\|^2}$$

Dans le cas d'une hémisphère d'une sphère on a $\psi = \sqrt{R^2 - |\mathbf{x}|^2}$, donc

$$\nabla\psi = -\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{R^2 - |\mathbf{x}|^2}} \Rightarrow 1 + \|\nabla\psi\|^2 = \frac{R^2}{R^2 - |\mathbf{x}|^2}$$

La surface S_N est donnée par

$$S_N = 2R \int_{\mathcal{B}_{N-1}(R)} \frac{\mathbf{dx}}{\sqrt{R^2 - |\mathbf{x}|^2}}$$

On pose comme plus haut $\mathbf{x} = R\mathbf{y}$, avec la jacobienne

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} = R I_{N-1},$$

il en suit que

$$S_N = 2R^{N-1} \int_{\mathcal{B}_{N-1}(1)} \frac{\mathbf{dy}}{\sqrt{1 - |\mathbf{y}|^2}} = a_N R^{N-1}.$$

Ce qui montre que le facteur R^{N-1} est correct pour la surface des sphères. En plus on vient de définir a_N .

2. Le volume d'une boule de rayon R est

$$V_N(R) = \int_{\mathcal{B}_N(R)} \mathbf{dx} = 2 \int_{\mathcal{B}_{N-1}(R)} \sqrt{R^2 - |\mathbf{x}|^2} \mathbf{dx}.$$

Ceci implique

$$\frac{\partial V_N}{\partial R} = 2 \int_{\mathcal{B}_{N-1}(R)} \frac{R}{\sqrt{R^2 - |\mathbf{x}|^2}} \mathbf{dx} = S_N(R).$$

Et finalement on a

$$\frac{\partial}{\partial R}(b_N R^N) = N b_N R^{N-1} \stackrel{*}{=} a_N R^{N-1}$$

* si et seulement si $a_N = N b_N$.

3. Sans perte de généralité on peut poser $R = 1$. Calculons b_N :

$$\begin{aligned} b_N &= 2 \int_{\mathcal{B}_{N-1}(1)} \sqrt{1 - |\mathbf{x}|^2} \mathbf{dx} \\ &= 2 \int_0^1 a_{N-1} r^{N-2} \sqrt{1 - r^2} dr \\ &\stackrel{*}{=} 2 \frac{a_{N-1}}{N-1} \int_0^1 \frac{r^N}{\sqrt{1 - r^2}} dr \\ &= 2 \frac{a_{N-1}}{(N-1)a_{N+1}} \int_{\mathcal{B}_{N+1}(1)} \frac{\mathbf{dx}}{\sqrt{1 - |\mathbf{x}|^2}} \\ &= \frac{a_{N-1}}{(N-1)a_{N+1}} a_{N+2}, \end{aligned}$$

où (*) on a intégré par partie. Vu que $a_N = N b_N$,

$$\frac{b_N}{b_{N+2}} = \frac{(N+2) b_{N-1}}{(N+1) b_{N+1}}$$

La relation de récurrence donne pour $N = 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} N = 2 & \quad b_4 = \frac{\pi^2}{2} & a_4 = 2\pi^2 \\ N = 3 & \quad b_5 = \frac{8\pi^2}{15} & b_5 = \frac{8\pi^2}{3} \\ & \quad \vdots \end{aligned}$$

4. Le graphe de V_N et S_N est

