

1. *Rappel: Changement de variables pour des espaces à une et à N dimensions*

Soit $\phi \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ et $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$ avec $\mathbf{v} = \phi(\mathbf{u})$. La règle du changement de variables en N dimensions est

$$\int_{\Omega_{\mathbf{v}}} f(\mathbf{v}) \, d\mathbf{v} = \int_{\phi^{-1}(\Omega_{\mathbf{v}})} f(\phi(\mathbf{u})) |J(\mathbf{u})| \, d\mathbf{u},$$

où $|J(\mathbf{u})|$ dénote la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne. On rappelle que la matrice jacobienne $J(\mathbf{u})$ est donnée par les coefficients $J_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{\partial \phi_i}{\partial u_j}(\mathbf{u})$.

Soit $x, t \in \mathbb{R}$, pour $N = 1$, on a de plus la règle

$$\int_a^b f(t) \, dt = - \int_b^a f(t) \, dt$$

qui implique le cas particulier suivant

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) \, dx = \int_a^b f(g(t)) J(t) \, dt = \int_a^b f(g(t)) g'(t) \, dt,$$

avec $g \in C^1(]a, b[, \mathbb{R})$ et $g(a) = b$ et $g(b) = a$. On conclut donc que, dans le cas de l'intégration dans \mathbb{R} , $J(t) := g'(t)$ et non pas $|g'(t)|$.

a) Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 u e^{-u^2} \, du.$$

en faisant le changement de variables $t = u^2$ et puis $t = -u^2$. Quel est le Jacobien $J(t)$ pour chaque cas?

b) On considère un domaine

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, 0 < y < \sqrt{1 - x^2}\}.$$

Calculer l'aire de Ω en utilisant les coordonnées polaires $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et ensuite $x = r \sin \psi$, $y = r \cos \psi$, $\psi \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Quel est le Jacobien pour chaque cas?

2. Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Si $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ on définit

$$\int_a^b f(x) dx := \left(\int_a^b f_1(x) dx, \int_a^b f_2(x) dx, \dots, \int_a^b f_n(x) dx \right).$$

Montrer que

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

où $|\cdot|$ désigne une norme sur \mathbb{R}^n .

3. *Rappel: Intégrales triples et changement de variables*

Soient S_1 et S_2 deux boules dans \mathbb{R}^3 de rayons R_1 et R_2 (avec $R_1 > R_2$) centrées à l'origine. On définit A par

$$A = \{(x, y, z) \in (S_1 \setminus S_2) \mid y, z \geq 0\}$$

- Calculer le volume de A , noté V , en utilisant les coordonnées sphériques.
- Calculer les coordonnées du centre de masse de A , noté \bar{p}_A , pour une densité uniforme ρ . On rappelle que

$$\bar{p}_A = \frac{\iiint_A (x, y, z) \rho \, dV}{\iiint_A \rho \, dV}.$$

Observer que cette égalité doit s'interpréter composante par composante, au sens de l'exercice 2.

- Calculer les coordonnées du centre de masse de A quand $R_2 \rightarrow R_1$ où la masse totale $M = \rho V$ reste constante.

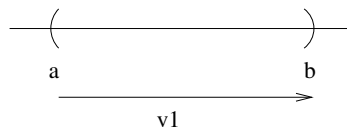
On verra plus tard que le résultat de la partie c) peut aussi être obtenu directement par une intégrale de surface.

4. *Rappel: Algèbre linéaire et notions de volumes dans \mathbb{R}^N*

Soit \mathbb{R}^N un espace Euclidien muni du produit scalaire usuel. Montrer les résultats suivants:

- Pour $N = 1$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

La longueur d'un segment de droite $[a, b]$ est $|b - a|$. Ou encore avec $\mathbf{v}_1 := b - a$, la longueur de \mathbf{v}_1 est $|\mathbf{v}_1|$ ou $\sqrt{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}$.

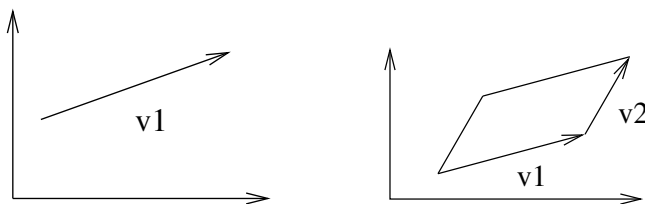


- Pour $N = 2$ et $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$.

- La longueur d'un segment de droite \mathbf{v}_1 est toujours $|\mathbf{v}_1| = \sqrt{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}$.
- L'aire $\text{aire}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ d'un parallélogramme engendré par les vecteurs \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 est donnée par la base multipliée par la hauteur ou de manière équivalente par

$$\text{aire}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}} = |\det [\mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2]|.$$

Noter que $[\mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2]$ désigne une matrice dont les colonnes sont formées par les vecteurs \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 .



c) Pour $N = 3$ et $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$.

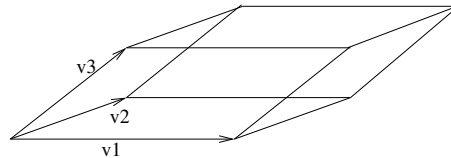
- i. La longueur d'un segment de droite \mathbf{v}_1 est encore $|\mathbf{v}_1| = \sqrt{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}$.
- ii. L'aire d'un parallélogramme est

$$\text{aire}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}} = |\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|,$$

où \times représente le produit vectoriel usuel. On remarque, au passage, que la matrice $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ est une matrice 3×2 pour laquelle le déterminant n'est pas défini.

- iii. Le volume $\text{vol}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ d'un parallélépipède engendré par les vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ et \mathbf{v}_3 est l'aire de la base (i.e. l'aire d'un parallélogramme) multiplié par la hauteur ou aussi

$$\text{vol}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \sqrt{\begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3 \end{vmatrix}} = |\det [\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_3]|.$$



d) Pour le cas général, soit en dimension N quelconque, il y a exactement N notions de volumes. Soit $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N \in \mathbb{R}^N$.

On définit la matrice Gramienne $J \times J$ par

$$G_{J,N} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_J \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{v}_J \cdot \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_J \cdot \mathbf{v}_J \end{pmatrix}.$$

$G_{J,N}$ est appelée la Gramienne de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_J$. On définit le volume à J dimensions dans \mathbb{R}^N engendré par les vecteurs $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_J\}$ par la quantité

$$V_{J,N} = \sqrt{\det G_{J,N}}.$$

Montrer les résultats suivants.

- i. Soient $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_J \in \mathbb{R}^N$, des vecteurs orthonormaux (i.e. $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, J$). Vérifier que

$$V_{J,N} = 1.$$

- ii. Montrer que si les vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_J$ sont linéairement dépendants, alors

$$V_{J,N} = 0.$$

- iii. Montrer que

$$V_{N,N} = |\det [\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \dots | \mathbf{v}_N]|.$$

On observe que pour $J < N$, la matrice $[\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \dots | \mathbf{v}_J]$ n'est pas carrée et que son déterminant n'est pas défini.

iv. Pour les coordonnées sphériques sur \mathbb{R}^3

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

on définit

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}, \quad \mathbf{v}_3 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi}.$$

Vérifier que le volume engendré par $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ vaut

$$V_{3,3} = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} \right| = r^2 \sin \theta.$$

Le facteur $V_{3,3}$ correspond donc au Jacobien à utiliser lors d'un changement de variables. Plus généralement, le facteur $V_{J,N}$ apparaît dans l'intégration J -dimensionnelle dans \mathbb{R}^N .

v. Montrer la relation de récurrence

$$V_{J,N} = |P_{\mathbf{v}_J}| V_{J-1,N},$$

où $P_{\mathbf{v}_J}$ est le vecteur \mathbf{v}_J orthogonalisé par rapport aux vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{J-1}$.
Autrement dit, la formule 'volume = base \times hauteur' reste vraie dans toutes les dimensions.

vi. Donner explicitement les cas connus $V_{1,1}, V_{1,2}, V_{2,2}, V_{1,3}, V_{2,3}$ et $V_{3,3}$.