EPFL Section: **PH**
Prof. John H. Maddocks

ANALYSE III **Série 1** 22 Septembre 2017

---

1. *Rappel: Changement de variables pour des espaces à une et à N dimensions*

Soit $\phi \in C^1\left(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N\right)$ et $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$ avec $\mathbf{v} = \phi(\mathbf{u})$. La règle du changement de variables en N dimensions est

$$\int_{\Omega_{\mathbf{v}}} f(\mathbf{v})\ \mathrm{d}\mathbf{v} = \int_{\phi^{-1}(\Omega_{\mathbf{v}})} f(\phi(\mathbf{u}))|J(\mathbf{u})|\ \mathrm{d}\mathbf{u},$$

où $|J(\mathbf{u})|$ dénote la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne. On rappelle que la matrice jacobienne $J(\mathbf{u})$ est donnée par les coefficients $J_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{\partial \phi_i}{\partial u_j}(\mathbf{u})$.

Soit $x, t \in \mathbb{R}$, pour $N = 1$, on a de plus la règle

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\ \mathrm{d}t$$

qui implique le cas particulier suivant

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(g(t))\ J(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(g(t))\ g'(t)\ \mathrm{d}t,$$

avec $g \in C^1(]a, b[, \mathbb{R})$ et $g(a) = b$ et $g(b) = a$. On conclut donc que, dans le cas de l'intégration dans $\mathbb{R}$, $J(t) := g'(t)$ et non pas $|g'(t)|$.

a) Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 u\ e^{-u^2}\ \mathrm{d}u.$$

en faisant le changement de variables $t = u^2$ et puis $t = -u^2$. Quel est le Jacobian $J(t)$ pour chaque cas?

b) On considère un domaine

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < x < 1,\ 0 < y < \sqrt{1 - x^2}\}.$$

Calculer l'aire de Ω en utilisant les coordonnées polaires $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et ensuite $x = r\sin\psi$, $y = r\cos\psi$, $\psi \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Quel est le Jacobien pour chaque cas?

2. Soit $f\ :]a, b[\to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Si $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))$ on définit

$$\int_a^b f(x)dx := \left(\int_a^b f_1(x)dx, \int_a^b f_2(x)dx, ..., \int_a^b f_n(x)dx\right).$$

Montrer que

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

où $|\,.\,|$ désigne une norme sur $\mathbb{R}^n$.

3. *Rappel: Intégrales triples et changement de variables*

Soient S_1 et S_2 deux boules dans $\mathbb{R}^3$ de rayons R_1 et R_2 (avec $R_1 > R_2$) centrées à l'origine. On définit A par

$$A = \{(x, y, z) \in (S_1 \setminus S_2) \bigm| y, z \geq 0\}$$

a) Calculer le volume de A, noté V, en utilisant les coordonnées sphériques.

b) Calculer les coordonnées du centre de masse de A, noté $\bar{p}_A$, pour une densité uniforme ρ. On rappelle que

$$\bar{p}_A = \frac{\iiint_A (x, y, z)\rho \,\mathrm{d}V}{\iiint_A \rho \,\mathrm{d}V}.$$

Observer que cette égalité doit s'interpréter composante par composante, au sens de l'exercice 2.

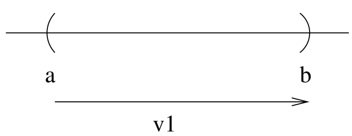
c) Calculer les coordonnées du centre de masse de A quand $R_2 \to R_1$ où la masse totale $M = \rho V$ reste constante.

On verra plus tard que le résultat de la partie c) peut aussi être obtenu directement par une intégrale de surface.

4. *Rappel: Algèbre linéaire et notions de volumes dans* $\mathbb{R}^N$

Soit $\mathbb{R}^N$ un espace Euclidien muni du produit scalaire usuel. Montrer les résultats suivants:

a) Pour $N = 1$ et $a, b \in \mathbb{R}$.
La longueur d'un segment de droite $[a, b]$ est $|b - a|$. Ou encore avec $\mathbf{v}_1 := b - a$, la longueur de $\mathbf{v}_1$ est $|\mathbf{v}_1|$ ou $\sqrt{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}$.



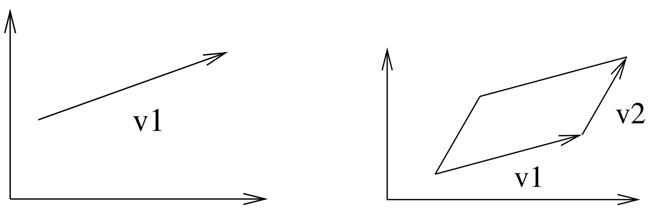
b) Pour $N = 2$ et $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$.

i. La longueur d'un segment de droite $\mathbf{v}_1$ est toujours $|\mathbf{v}_1| = \sqrt{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}$.

ii. L'aire $\mathrm{aire}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ d'un parallélogramme engendré par les vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ est donnée par la base multipliée par la hauteur ou de manière équivalente par

$$\mathrm{aire}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}} = |\det\,[\mathbf{v}_1 \,|\, \mathbf{v}_2]|.$$

Noter que $[\mathbf{v}_1 \,|\, \mathbf{v}_2]$ dénote une matrice dont les colonnes sont formées par les vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$.



c) Pour $N = 3$ et $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$.

i. La longueur d'un segment de droite $\mathbf{v}_1$ est encore $|\mathbf{v}_1| = \sqrt{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}$.

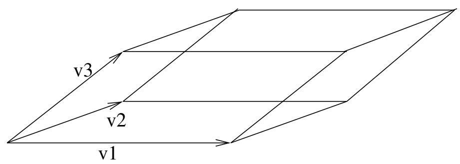
ii. L'aire d'un parallélogramme est

$$\operatorname{aire}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}} = |\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|,$$

où $\times$ représente le produit vectoriel usuel. On remarque, au passage, que la matrice $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ est une matrice 3×2 pour laquelle le déterminant n'est pas défini.

iii. Le volume $\operatorname{vol}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ d'un parallélépipède engendré par les vecteurs $\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_3$ est l'aire de la base (i.e. l'aire d'un parallélogramme) multiplié par la hauteur ou aussi

$$\operatorname{vol}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \sqrt{\begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3 \end{vmatrix}} = |\det\,[\mathbf{v}_1 \,|\, \mathbf{v}_2 \,|\, \mathbf{v}_3]|.$$



d) Pour le cas général, soit en dimension N quelconque, il y a exactement N notions de volumes. Soit $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_N \in \mathbb{R}^N$.
On définit la matrice Gramienne $J \times J$ par

$$G_{J,N} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_J \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{v}_J \cdot \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_J \cdot \mathbf{v}_J \end{pmatrix}.$$

$G_{J,N}$ est appelée la Gramienne de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_J$. On définit le volume à J dimensions dans $\mathbb{R}^N$ engendré par les vecteurs $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_J\}$ par la quantité

$$V_{J,N} = \sqrt{\det G_{J,N}}.$$

Montrer les résultats suivants.

i. Soient $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_J \in \mathbb{R}^N$, des vecteurs orthonormaux (i.e. $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \cdots, J$). Vérifier que

$$V_{J,N} = 1.$$

ii. Montrer que si les vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_J$ sont linéairement dépendants, alors

$$V_{J,N} = 0.$$

iii. Montrer que

$$V_{N,N} = |\det\,[\mathbf{v}_1 \,|\, \mathbf{v}_2 \,|\, ... \,|\, \mathbf{v}_N]|.$$

On observe que pour $J < N$, la matrice $[\mathbf{v}_1 \,|\, \mathbf{v}_2 \,|\, ... \,|\, \mathbf{v}_J]$ n'est pas carrée et que son déterminant n'est pas défini.

iv. Pour les coordonnées sphériques sur $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

on définit

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}, \quad \mathbf{v}_3 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi}.$$

Vérifier que le volume engendré par $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ vaut

$$V_{3,3} = \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} \right| = r^2 \sin\theta.$$

Le facteur $V_{3,3}$ correspond donc au Jacobien à utiliser lors d'un changement de variables. Plus généralement, le facteur $V_{J,N}$ apparaît dans l'intégration J-dimensionelle dans $\mathbb{R}^N$.

v. Montrer la relation de récurrence

$$V_{J,N} = |P_{\mathbf{v}_J}| V_{J-1,N},$$

où $P_{\mathbf{v}_J}$ est le vecteur $\mathbf{v}_J$ orthogonalisé par rapport aux vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{J-1}$. *Autrement dit, la formule 'volume =base $\times$ hauteur' reste vraie dans toutes les dimensions.*

vi. Donner explicitement les cas connus $V_{1,1}$, $V_{1,2}$, $V_{2,2}$, $V_{1,3}$, $V_{2,3}$ et $V_{3,3}$.