EPFL Section : **PH**
Prof. John H. Maddocks

ANALYSE III **Série 2** 29 Septembre 2017

---

1. On considère $\mathbb{R}^N$ avec le produit scalaire usuel $\langle . , . \rangle$, et la norme induite $\| . \|$, soit
$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \text{ et } \|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}.$$
Soient $f, g \in C^1(J, \mathbb{R}^N)$, où J est un intervalle ouvert.
   a) Montrer que $\langle f, g \rangle \in C^1(J, \mathbb{R})$ et que
$$\frac{d}{dt}\langle f(t), g(t) \rangle = \langle \frac{d}{dt} f(t), g(t) \rangle + \langle f(t), \frac{d}{dt} g(t) \rangle \text{ pour } t \in J.$$
   b) Montrer que $\|f\| \in C^0(J, \mathbb{R})$ et que $\|f\| \in C^1(J_1, \mathbb{R})$ où $J_1 = \{t \in J : f(t) \neq 0\}$.
   c) Montrer que $\langle f, \frac{d}{dt} f \rangle \equiv 0$ sur $J \iff \|f\|$ est constante sur J.
2. Soient $a, v, \omega > 0$. Pour les courbes $\alpha(t)$ suivantes, calculer les vecteurs $\frac{d}{dt}\alpha(t)$ et $\frac{d^2}{dt^2}\alpha(t)$ et donner leurs valeurs en $t = 0$. Essayer de plus de nommer et d'esquisser ces courbes si vous le pouvez.
   a) $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ avec $\alpha(t) = (\cosh(\omega t), \sinh(\omega t))$
   b) $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ avec $\alpha(t) = (vt + a\cos(\omega t), a\sin(\omega t))$
   c) $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ avec $\alpha(t) = (a\cos(\omega t), a\sin(\omega t), vt)$
3. Soient $a, b > 0$. Dans les deux cas suivants, montrer que A est un arc régulier et trouver une représentation paramétrique régulière de A. Essayer de plus de nommer et d'esquisser ces courbes si vous le pouvez.
   a) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \text{ et } x > 0\right\}$,
   b) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \text{ et } x > 0\right\}$.
4. a) Soit $q : (-1, 1) \to \mathbb{R}^2$ la courbe donnée par $q(t) = \left(t^3, t^3\right)$. Montrer que cette paramétrisation n'est pas régulière mais que l'arc qu'elle définit est régulier.
   b) Soit $q : (-1, 1) \to \mathbb{R}^2$ la courbe donnée par $q(t) = \left(t^2, t^2\right)$. Montrer que l'arc défini par $q(t)$ n'est pas régulier.
5. Soit $C = \operatorname{Im}\alpha$ où la fonction $\alpha : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$ est définie par
$$\alpha(t) = (\sin t \cos t, \sin^3 t).$$
   a) Montrer que α est injective.
   b) Montrer que $\alpha'(t) \neq 0$ pour tout $t \in (-\pi, \pi)$.
   c) Trouver α^{-1} et montrer que α^{-1} n'est pas continue. En déduire que α n'est pas une représentation paramétrique régulière de C.

6. On rappelle que si $C \subset \mathbb{R}^n$ est un arc régulier, alors la longueur de C est définie par

$$|C| = \int_C ds.$$

Pour $C = \operatorname{Im} \alpha$, où $\alpha(t) = e^t(\cos t, \sin t, 1)$ et $t \in (0, 2\pi)$, calculer la longueur de C.

7. Soit $f(x, y) = x^3 + y$. Calculer

$$\int_C f \, ds$$

où $C = \operatorname{Im} \alpha$ et $\alpha : (0, 1) \to \mathbb{R}^2$ est définie par $\alpha(t) = (3t, t^3)$.