EPFL Section: **PH**
Prof. J. H. Maddocks

ANALYSE III **Série 3** 7 Octobre 2016

---

1. Soit $C = \operatorname{Im}\alpha$ où la fonction $\alpha : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ est définie par $\alpha(t) = (R\cos t, R\sin t, ht)$, $R, h > 0$.

   a) Esquisser C.

   b) Vérifier que C est un arc régulier.

   c) En chaque point $p \in C$, donner une paramétrisation de la droite tangente à C en p.

   d) i. Calculer

   $$\theta(t) = \int_0^t \|\alpha'(\tau)\|\, d\tau \text{ pour } t \in (0, 2\pi), \text{ et sa fonction inverse } \psi(s) = \theta^{-1}(s).$$

   ii. Que représente les quantités $\theta(t)$ et $\psi(s)$?

   iii. Montrer que $\beta(s) := (\alpha \circ \psi)(s)$ est une représentation paramétrique régulière de C ayant la propriété que $\|\beta'(s)\| = 1$ pour tout $s \in \operatorname{Im}\theta$.
   Noter que β s'appelle *la paramétrisation de C par longueur d'arc* et qu'elle a la propriété que $\int_0^s \|\beta'(s)\| ds = s$.

2. On suppose à présent que C modélise une tige rigide de densité linéique (masse par unité de longueur) constante $\rho > 0$, on choisit $\alpha(t)$ comme dans 1. mais avec $t \in (0, T)$ et $R = 1$.

   a) Calculer la masse de C et son centre de gravité.

   b) En imaginant que sa densité est donnée par $\rho(x, y, z) = x^4 + y^2$, quelle serait sa masse ?
   Noter que les identitées $\sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2}$ *et* $\cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2}$ *vous seront peut-être utiles.*

   c) En imaginant que sa densité est donnée par $\rho(x, y, z) = Pz$ pour une constante $P > 0$, quel serait son centre de gravité?

3. Soit C le quart de cercle dans $\mathbb{R}^3$ défini par

   $$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x > 0,\ y > 0,\ z > 0, \quad x = y \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

   Faire une esquisse de C et calculer

   $$\int_C (x + y)\, ds.$$

4. Soit $C = \operatorname{Im}\alpha$, où $\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$ pour $t \in (-\pi, \pi)$.

   a) Donner une paramétrisation de C par longueur d'arc (voir 1.(d)iii.).

b) i. Pour γ: $(-\pi^{1/3}, \pi^{1/3}) \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\gamma(\tau) = (e^{\tau^3}\cos(\tau^3), e^{\tau^3}\sin(\tau^3), e^{\tau^3}),$$

montrer que $C = \operatorname{Im}\gamma$ en explicitant l'homéomorphisme ϕ tel que $\gamma = \alpha \circ \phi$.

ii. Est-ce que γ est une représentation paramétrique régulière de C?

5. Soit $C = \operatorname{Im}\alpha$ où $\alpha : (0,1) \to \mathbb{R}^3$ est la fonction définie par $\alpha(t) = (e^t, e^{-t}, e^{2t})$.

   a) Donner les deux champs continus $T_1, T_2 : C \to \mathbb{R}^3$ de tangentes unitaires sur C.

   b) Pour les arcs orientés (C, T_1) et (C, T_2), calculer les intégrales curvilignes

$$\int_{(C,T_i)} f \cdot d\mathbf{s} \text{ pour } i = 1, 2.$$

   où $f(x, y, z) = (xz, y + x, x)$.