EPFL Section: **PH**
Prof. John H. Maddocks

ANALYSE III **Série 4** 13 Octobre 2017

1. Soit C est l'arc défini par l'intersection de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, du cylindre $x^2 + y^2 = 2x$ et du premier octant de $\mathbb{R}^3$ (i.e. $x, y, z > 0$), et orienté dans le sens croissant de la coordonnée z.

   Esquisser C et calculer
$$\int_{\overrightarrow{C}} y\,dx - (x-1)\,dy + z\,dz.$$

2. Soit $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^2$ deux chemins orientés allant du point $(4,5)$ au point $(2,1)$: où C_1 est le segment de droite et où $C_2 = \operatorname{Im}\alpha$ avec $\alpha(t) = (3t-1, 3t^2-2t)$ pour $t \in \left[1, \frac{5}{3}\right]$.

   Calculer
$$\int_{\overrightarrow{C}_i} xy\,dx + x^2\,dy, \text{ pour } i = 1, 2.$$

3. Soit $C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = x \text{ et } y \geq 0\}$, $C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = x \text{ et } y \leq 0\}$ et $C = C_1 \cup C_2$.

   a) Donner une représentation paramétrique de C_1 en tant que chemin entre les points $(1,0)$ et $(0,0)$.

   b) Donner une représentation paramétrique de C_2 en tant que chemin entre les points $(0,0)$ et $(1,0)$.

   c) Pour $f \in C^0(C, \mathbb{R})$ on définit $\int_C f ds := \int_{C_1} f ds + \int_{C_2} f ds$. Calculer
$$\int_C (x+y)\,ds$$

4. Soit $A = \operatorname{Im}\alpha$ où la fonction $\alpha : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}^2$ est définie par $\alpha(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$.

   a) Tracer A et montrer que α *n'est pas* une représentation paramétrique régulière de A.

   b) Montrer que A n'est pas un arc régulier.

   c) Montrer que A est un chemin du point $(0,-1)$ au point $(0,1)$.

5. Soit C le triangle de sommets $(0,0),(1,0)$ et $(1,1)$ et C_1, C_2 et C_3 ses trois arrêtes. Calculer

$$\int_C \langle f, n\rangle ds := \sum_{i=1}^{3} \int_{C_i} \langle f, n_i\rangle ds$$

avec

$$f(x,y) = (xy, y^2+1)$$

et où n_i désigne la normale unitaire extérieure à C_i. Noter qu'il s'agit du *flux du champ f à travers C vers l'extérieur.*

6. Soit $S = \mathrm{Im}\alpha$ où l'application $\alpha \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ est définie par $\alpha(x,y) = (x,y,xy)$ et $\Omega = \{(x,y)\,|\, x^2+y^2 < 1\}$.

   i. Calculer la valeur de $|\frac{\partial}{\partial x}\alpha \wedge \frac{\partial}{\partial y}\alpha|(x,y)$ pour tous $(x,y) \in \Omega$.

   ii. Calculer la valeur de l'intégrale de surface

$$I = \int_S dS.$$

   Observer que la valeur de I représente l'aire de la surface S.