EPFL Section: **PH**
Prof John H. Maddocks

ANALYSE III **Série 5** 21 Octobre 2016

Changement de notation pour l'année académique 2016-2017: Soit $\alpha : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$ un champ de vectors, nous allons utiliser la suivante notation $\partial\alpha$, à la place de $\nabla\alpha$, pour noter la matrice des dérivées partielles $\left[\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}|\frac{\partial\alpha}{\partial x_2}|\cdots|\frac{\partial\alpha}{\partial x_M}\right] \in \mathbb{R}^{N\times M}$
Noter que l'on utilisera de manière interchangeable les notations $\frac{\partial}{\partial s}f(s,t)$, $\partial_s f(s,t)$, $\partial_1 f(s,t)$ et $f_s(s,t)$ pour dénoter la dérivée partielle de f par rapport à sa première composante (et de même pour toutes les autres composantes).

1. Pour les ensembles S suivant, vérifier qu'ils sont des nappes régulières et calculer un champ continu de normales unitaires sur S:

   a) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } x > 0\}$

   b) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{y^2}{4} + z^2 = 1 \text{ avec } y < 1 \text{ et } 0 < x < 1\}$

2. Soient J un intervalle ouvert et $h \in C^1(J,\mathbb{R})$ une fonction telle que $h(x) > 0$ pour tout $x \in J$. Soit T la surface engendrée par la rotation de la courbe $\{(x,h(x),0) : x \in J\}$ autour de l'axe $\{(x,0,0) : x \in \mathbb{R}\}$ et soit

$$S = \{(x,y,z) \in T : z > 0\}.$$

   Montrer que S est une nappe régulière et calculer son aire.

3. Soit $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, y > 0 \text{ et } 0 < z < 1\}$.

   a) Montrer que S est une nappe régulière.

   b) Calculer l'aire de S.

   c) Calculer la masse de S si la densité de masse par unité d'aire est donnée par $\rho(x,y,z) = x^2$.

   d) Calculer la masse de S pour $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2$.

4. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert connexe et $h \in C^1(\Omega,\mathbb{R})$.

   a) Montrer que le graphe de h

$$G(h) = \Big\{(x,y,h(x,y)) : (x,y) \in \Omega\Big\}$$

   est une nappe régulière dans $\mathbb{R}^3$.

   b) Calculer un champ continu de normales unitaires sur $S = G(h)$.

   c) Soit $f : G(h) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que

$$\int_{G(h)} f d\sigma = \int_\Omega f(x,y,h(x,y))\left\{1 + \Big(\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\Big)^2 + \Big(\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\Big)^2\right\}^{1/2} dxdy,$$

   pour autant que l'intégrale double à droite existe.

d) Calculer cette intégrale lorsque $\Omega = (0,1) \times (-1,1)$, $f(x,y,z) = y$ et $h(x,y) = xy$.

e) Calculer cette intégrale lorsque $\Omega = (0,1) \times (0, 2\sqrt{2})$, $f(x,y,z) = y$ et $h(x,y) = xy$.

f) Calculer $\displaystyle\int_{G(h)} f d\sigma$ lorsque $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, $f(x,y,z) = y^2$ et $h(x,y) = xy$.

5. Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\} \backslash \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0 \text{ et } y = 0\}$, $\alpha : \Omega \to \mathbb{R}^3$ définie par $\alpha(s,t) = (s,t,st)$, $S = \mathrm{Im}\alpha$ et $f(x,y,z) = y^2$.

   On définit de plus $\beta = \alpha \circ \psi$ où $\psi :]0,1[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^2$ et $\psi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

   a) Esquisser S et montrer que β est aussi une représentation paramétrique régulière de S.

   b) Esquisser les champs de vecteurs α_t, α_s, β_r et β_θ sur S. Est-ce que $\mathrm{Span}\{\alpha_t, \alpha_s\} = \mathrm{Span}\{\beta_r, \beta_\theta\}$? Si oui donner une matrice de changement de base entre les deux systèmes de coordonnées.

   c) Calculer l'aire des parallèlogrammes engendrés par le couple $\{\alpha_t, \alpha_s\}$ et par le couple $\{\beta_r, \beta_\theta\}$. En utilisant la Grammienne (*voir série 1*), expliciter la relation entre la valeur de ces deux aires.

   d) Calculer $\int_S f ds$ en utilisant l'application β et comparer le résultat obtenu avec celui de l'exercice 4.f), quelle est la relation entre ces deux développements?