
ANALYSE III **Série 6** 28 Octobre 2016

---

1. Calculer
$$\int_S f \cdot d\sigma$$
où $f(x, y, z) = (x + 1, -2y - 1, z)$ et S est la surface triangulaire dont les sommets sont $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ et où la normale est dans la direction de la coordonnée z croissante.

2. Calculer le flux du champ vectoriel $f(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ à travers la surface
$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 \text{ avec } x > 0 \text{ et } 1 < z < 2\right\}$$
en choisissant la normale dans la direction de la coordonnée z croissante.

3. Dans le cours on a défini l'*angle solide* d'une nappe régulière S vue depuis l'origine comme
$$\omega(S) := \int_S \frac{1}{r^3}\mathbf{r} \cdot d\sigma =: \int_{\mathcal{P}(S)} dS$$
où $\mathcal{P}(S)$ est la projection de S sur la sphère unité, $\mathbf{r} \in S$ et $r = \|\mathbf{r}\|$.
Soit S une nappe régulière dans $\mathbb{R}^3$ et soit $\alpha : \Omega \to S : (s, t) \mapsto \alpha(s, t)$ une paramétrisation régulière de S. Posons $\mathbf{e}(s, t) = \frac{\alpha(s,t)}{\|\alpha(s,t)\|}$. Montrer que
$$\int_{\mathcal{P}(S)} dS = \iint_\Omega \mathbf{e} \cdot (\mathbf{e}_s \wedge \mathbf{e}_t)\, ds dt$$
en notant que $\mathbf{e}_s = \frac{\alpha_s}{\|\alpha\|} - \frac{\alpha \otimes \alpha}{\|\alpha\|^3}\alpha_s$ ($\mathbf{e}_t$ est donné par une formule similaire).
Calculer $\omega(S)$ pour
a) $S = \left\{x^2 + y^2 < 1, z = \gamma\right\}$,
b) $S = \left\{x^2 + y^2 + (z - \gamma)^2 = 1 \text{ et } \alpha \cdot \mathbf{N} < 0\right\}$ où $\mathbf{N}$ est la normale qui pointe vers l'extérieur de la sphère,
c) $S = \left\{x^2 + y^2 + (z - \gamma)^2 = 1\right\}$,
avec $-\infty < \gamma < \infty$.

4. (Rappel : règles pour la différentiation du produit des champs scalaires et vectoriels.)
Soit $\alpha : \widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$ une paramétrisation d'une nappe. Cette année en cours (2016-2017), nous avons introduit la notation $\partial\alpha \in \mathbb{R}^{N\times M}$ pour la matrice dont les entrées sont $(\partial\alpha)_{ij} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}$. Pour être consistent avec les notations usuelles pour les champs scalaires et vectoriels, nous allons néanmoins utiliser la notation $(\nabla\alpha)_{ij} =$

$\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i}$. Ceci implique que $\nabla\alpha = (\partial\alpha)^\top$.

Soient maintenant Ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^N$, $\varphi, \psi \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$, deux champs scalaires et $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ deux champs vectoriels.

On rappelle que, pour des champs scalaires et vectoriels exprimés en coordonnées cartésiennes, et fonction de ces mêmes coordonnées cartésiennes, on définit

- *la matrice Jacobienne d'un champ vectoriel* $\mathbf{f}$ *par* $\nabla\mathbf{f} = (\partial\mathbf{f})^\top \in \mathbb{R}^{N\times N}$,
- *le gradient d'un champ scalaire par* $\nabla\varphi = (\partial\varphi)^\top \in \mathbb{R}^{N\times 1}$ *(vecteur colonne),*
- *la divergence d'un champ* $\mathbf{f}$ *par* $(\nabla\cdot\mathbf{f}) = \sum_{i=1}^M \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial x_i} = Tr\nabla\mathbf{f}$,
- *le rotationel (ou curl) d'un champ* $\mathbf{f}$, *pour* $N = 3$, *par* $(\nabla\times\mathbf{f})_1 = \frac{\partial \mathbf{f}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x_3}$ *et pour les autres composantes on 'cycle' sur les indices [i.e (123)-(231)-(312)],*
- *la matrice Hessienne par* $H(\varphi)_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\varphi$,
- *le Laplacien par* $\Delta\varphi = \sum_{i=1}^M \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\varphi = TrH(\varphi)$.

N.B : Nous verrons plus tard des définitions de ces opérateurs qui ne dépendent pas du choix du système de coordonnées.

Vérifier les identités suivantes (qui consistent en toutes les possibilités d'appliquer un de ces opérateurs à un produit de deux champs) :

(a) (sur le gradient)
$\nabla(\varphi\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi$,

$\nabla(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}) = (\nabla\mathbf{f})\mathbf{g} + (\nabla\mathbf{g})\mathbf{f}$.

(b) (sur la matrice Jacobienne)
$\nabla(\varphi\mathbf{f}) = \mathbf{f}\,(\nabla\varphi) + \varphi(\nabla\mathbf{f})$,

$$\nabla(\mathbf{f}\wedge\mathbf{g}) = \begin{bmatrix} (\partial_1\mathbf{f}\wedge\mathbf{g} + \mathbf{f}\wedge\partial_1\mathbf{g})^\top \\ (\partial_2\mathbf{f}\wedge\mathbf{g} + \mathbf{f}\wedge\partial_2\mathbf{g})^\top \\ (\partial_3\mathbf{f}\wedge\mathbf{g} + \mathbf{f}\wedge\partial_3\mathbf{g})^\top \end{bmatrix}, \text{ pour } N = 3.$$

(c) (sur la divergence)
$\nabla\cdot(\varphi\mathbf{f}) = (\nabla\varphi)\cdot\mathbf{f} + \varphi(\nabla\cdot\mathbf{f})$,

$\nabla\cdot(\mathbf{f}\wedge\mathbf{g}) = \mathbf{g}\cdot(\nabla\wedge\mathbf{f}) - \mathbf{f}\cdot(\nabla\wedge\mathbf{g})$ pour $N = 3$.

(d) (sur le rotationnel, pour N=3)
$\nabla\wedge(\varphi\mathbf{f}) = (\nabla\varphi)\wedge\mathbf{f} + \varphi\nabla\wedge\mathbf{f}$,

$\nabla\wedge(\mathbf{f}\wedge\mathbf{g}) = (\nabla\cdot\mathbf{g})\mathbf{f} - (\nabla\mathbf{g})^\top\mathbf{f} - (\nabla\cdot\mathbf{f})\mathbf{g} + (\nabla\mathbf{f})^\top\mathbf{g}$.

5. (Rappel : règles pour la composition des opérateurs.) Soit Ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^N$. Soient $\varphi \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ in champ scalaire et $\mathbf{f} \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ un champ vectoriel.
On rappelle qu'on indique avec H *la matrice Hessienne et avec* Δ *le Laplacien.*
Vérifier les identités suivantes :

(a) $\nabla(\nabla\varphi) = H(\varphi)$,

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{f}) = \sum_{i=1}^N \partial_i\nabla\mathbf{f}_i.$$

(b) $\nabla \cdot (\nabla \varphi) = \Delta \varphi$,

$\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}) = 0$ pour $N = 3$.

(c) $\nabla \wedge (\nabla \varphi) = 0$ pour $N = 3$,

$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{f}) = -\Delta \mathbf{f} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{f})$ pour $N = 3$.

6. Rappel : le groupe des matrices de rotations propres dans $\mathbb{R}^n$ est $SO(n) = \left\{R \in \mathbb{R}^{n\times n} : |R| = +1, R^\top R = Id\right\}$. Le “volume” de ces groupes apparaît quand on étudie les probabilités et la mécanique statistique.

   a) Les matrices de rotation de $SO(2)$ sont paramétrées par $R = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ avec $\theta \in [0, 2\pi)$.
   Calculer la “longueur” ou le “volume” de $SO(2)$ vu comme une “courbe” dans $\mathbb{R}^4$.

   b) (optionnel, challenge) Les matrices de rotation de $SO(3)$ peuvent être paramétrées en utilisant les angles d’Euler par

$$R = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\sin\psi & \cos\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\sin\psi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\cos\psi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\cos\psi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{bmatrix}$$

   avec $\phi, \psi \in [0, 2\pi)$ et $\theta \in [0, \pi]$.
   Calculer le “volume” de $SO(3)$ vu comme une “nappe” tridimensionnelle dans $\mathbb{R}^9$ en utilisant la forme $\iiint \sqrt{\det G\,(\partial\alpha)}\, d\phi d\theta d\psi$.