EPFL Section : **PH**

Prof John H. Maddocks

ANALYSE III **Série 7** 3 Novembre 2017

---

1. Soit $A \subset \mathbb{R}^2$, $f, g \in C^2(A)$, vérifier dans les cas suivants le Théorème de Green

$$\int_A \left\{ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right\} dxdy = \int_{\overrightarrow{\partial A}} f dx + g dy$$

(où $\overrightarrow{\partial A}$ est orienté positivement) par des calculs directs :

a)
$$f(x, y) = 2x - 3y,\ g(x, y) = 3x + 2y$$
et A est le rectangle de sommets $(0, 0),\ (2, 0),\ (2, 1)$ et $(0, 1)$.

b)
$$f(x, y) = 2xy - x^2,\ g(x, y) = x + y^2$$
et $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y^2 \text{ et } y > x^2\right\}$.

c)
$$f(x, y) = -y,\ g(x, y) = 0$$
et $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4,\ x^2 + (y - 1)^2 > \frac{1}{4} \text{ et } x^2 + (y + 1)^2 > \frac{1}{4}\right\}$.

2. Soit Ω un domaine régulier de $\mathbb{R}^2$ et soient $\rho \in C(\overline{\Omega})$ et $f \in C(\partial\Omega)$. Une fonction u est dite solution du problème (P) suivant si $u \in C^2(\overline{\Omega})$ est telle que

$$(P) \begin{cases} \Delta u(x, y) + \rho(x, y) = 0 & \text{pour tout } (x, y) \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = f(x, y) & \text{pour tout } (x, y) \in \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = \langle n(x, y), \nabla u(x, y)\rangle$ et $n : \partial\Omega \to \mathbb{R}^2$ est un champ de normales unitaires extérieures sur $\partial\Omega$.

Rappel : $\Delta u = \partial_1^2 u + \partial_2^2 u = \nabla \cdot (\nabla u)$.

a) Montrer que si (P) admet une solution, alors on a

$$\int_\Omega \rho(x, y) dxdy + \int_{\partial\Omega} f(x, y) ds = 0. \quad (*)$$

Noter qu'on appelle $(*)$ *'équation de conservation'.*

b) Considérons $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\}$, $\rho(x, y) = \dfrac{\sin(x^2 + y^2)}{2 + \cos(x^2 + y^2)}$ et $f(x, y) = y^3$. Montrer que (P) n'admet aucune solution.

3. Soit C un chemin fermé dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'aire de son intérieur est donnée par les intégrales suivantes calculées pour l'orientation positive de C.

$$|intC| = \frac{1}{2} \int_{\overrightarrow{C}} (-y, x) \cdot dl \text{ ou } |intC| = \int_{\overrightarrow{C}} xdy \text{ ou encore } |intC| = -\int_{\overrightarrow{C}} ydx.$$

Ensuite, calculer l'aire de la région A où

a) A est l'intérieur de l'ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ avec $a, b > 0$;

b) A est la région délimitée par les chemins

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(t-\sin t, 1-\cos t) : \pi/2 \leq t \leq 3\pi/2\} \qquad \text{et} \\ C_2 &= \{(t,1) : \pi/2 - 1 \leq t \leq 3\pi/2 + 1\}\,. \end{aligned}$$

4. Soient $0 < a < b < \infty$, $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < r = \sqrt{x^2+y^2} < b\right\}$ et une fonction $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - a$. Considérons une nappe $S = \alpha(\Omega)$, où $\alpha : \Omega \to \mathbb{R}^3$ est définie par $\alpha(x,y) = (x,y,z) = (x,y,g(x,y))$, et $N : S \to \mathbb{R}^3$ un champ continu de normales unitaires sur S. Vérifier par calculs directs, que

$$\int_S (N \wedge \nabla u)_i \, d\sigma = \int_{\partial S} u T_i \, ds$$

pour $i = 1,2,3$, T orienté positivement par rapport à N et $u = z$.

Il s'agit d'un exemple particulier du théorème sur l'intégration par parties sur les nappes orientées (voir Théoreme 5.2 p.32 du polycopié du Prof. C.A. Stuart) .