EPFL Section : **PH**
Prof John H. Maddocks

ANALYSE III **Série 8** 10 Novembre 2017

1. Soient $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1,\ y^2 + z^2 = 1,\ y > 0,\ z > 0\}$ et $\mathbf{N} : S \to \mathbb{R}^3$ le champ continu de normales unitaires sur S tel que la troisième composante de $\mathbf{N}$ est positive.
   a) Trouver une représentation paramétrique régulière de la nappe S.
   b) Esquisser le bord ∂S de S ainsi que l'orientation de ce chemin fermé ∂S qui est positive par rapport au champ de normales $\mathbf{N}$.
   c) Soit $\mathbf{f}(x, y, z) = (xy,\ 0,\ 0)$. Vérifier la formule de Stokes dans le cas de cette fonction sur la nappe S en calculant les deux intégrales appropriées.

2. Vérifier le Théorème de Stokes en calculant les intégrales concernées dans le cas où la nappe S et le champ vectoriel $\mathbf{f}$ sont donnés par
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 - x^2 - y^2,\ 0 < z\} \quad \text{et} \quad \mathbf{f}(x, y, z) = (z, x, y).$$

3. Soient $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ deux nappes orientées avec bord qui sont telles que $\partial S_1 = \partial S_2$ et $S_1 \cap S_2 = \partial S_1$. On définit $S := S_1 \cup S_2$.
   a) En utilisant le Théorème de Stokes, montrer que si $\overrightarrow{\partial S_1} = \overrightarrow{\partial S_2}$ alors
   $$\int_{S_1} \nabla \wedge \mathbf{F} \cdot d\sigma = \int_{S_2} \nabla \wedge \mathbf{F} \cdot d\sigma$$
   pour tous champs $\mathbf{F} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$.
   b) En utilisant a), et en supposant que S est une nappe orientée, montrer que
   $$\int_{S} \nabla \wedge \mathbf{F} \cdot d\sigma = 0$$
   Noter qu'une nappe S est dite fermée si $\partial S = \emptyset$.

4. Soient $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^3$ avec $\|\mathbf{N}\| = 1$ et H un plan dans $\mathbb{R}^3$ perpendiculaire à $\mathbf{N}$. Soit C un chemin fermé dans H. Montrer que l'intégrale suivante
$$\int_{\overrightarrow{C}} N_2 z dx + N_3 x dy + N_1 y dz,$$
est égale à l'aire de la partie de H qui est à l'intérieur de C où $\overrightarrow{C}$ est l'orientation positive par rapport à la normale $\mathbf{N}$ sur H.

5. i) Soient u et $\mathbf{g}$ des champs respectivement scalaire et vectoriel de classe C^1. Utiliser le théorème de Stokes pour montrer la formule d'intégration par partie
$$\int_S \langle \mathbf{g} \wedge \mathbf{N}, (\nabla u) \rangle \, d\sigma = \int_{\partial S} u \, \langle \mathbf{g}, \mathbf{T} \rangle \, ds - \int_S u \, \langle \nabla \wedge \mathbf{g}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma \qquad (1)$$
où $\mathbf{N}$ et $\mathbf{T}$ correspondent à une orientation positive de $(S, \partial S)$.

ii) Dans le cas où $\mathbf{g} = v\mathbf{A}$ avec v un champ scalaire et $\mathbf{A}$ un vecteur constant, montrer que (1) devient la formule d'intégration par partie pour les scalaires

$$\int_S v \,\langle \mathbf{A} \wedge \mathbf{N}, (\nabla u)\rangle \, d\sigma = \int_{\partial S} u\, v \,\langle \mathbf{A}, \mathbf{T}\rangle \, ds - \int_S u \,\langle \mathbf{A} \wedge \mathbf{N}, (\nabla v)\rangle \, d\sigma \qquad (2)$$

et en particulier pour $v \equiv 1$ on a le lemme fondamental

$$\int_S \langle \mathbf{A} \wedge \mathbf{N}, (\nabla u)\rangle \, d\sigma = \int_{\partial S} u \,\langle \mathbf{A}, \mathbf{T}\rangle \, ds \qquad (3)$$

et de la manière habituelle, (2) est aussi impliquée par (3).

iii) Montrer qu'en appliquant (3) avec des choix particuliers pour u et $\mathbf{A}$, on retrouve le théorème de Stokes :

$$\int_S \langle \nabla \wedge \mathbf{f}, \mathbf{N}\rangle \, d\sigma = \int_{\partial S} \langle \mathbf{f}, \mathbf{T}\rangle \, ds$$

(calcul commencé en classe).

Ainsi les formules (1), (2), (3) et le théorème de Stokes sont équivalents. Comme on a prouvé (3), toutes les quatre sont vraies.

6. Soient $(S, \mathbf{N})$ une nappe orientée avec bord $\partial S = C$ dans $\mathbb{R}^3$ et $\mathbf{T}$ la tangente à C orientée positivement par rapport à $\mathbf{N}$. Soit $\varphi \in C^1(V)$ où V est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^3$ qui contient S.

a) Utiliser le théorème de Stokes ou une des formules équivalentes de l'exercice précédent pour montrer que pour tout $u, v \in C^1(V)$ et pour $i = 1, 2, 3$

i) $\displaystyle\int_S (\mathbf{N} \wedge (\nabla \varphi))_i \, d\sigma = \int_C \varphi \, T_i \, ds$ pour tout $\varphi \in C^1(V)$

ii) $\displaystyle\int_S v \,(\mathbf{N} \wedge (\nabla u))_i \, d\sigma = \int_C u\, v\, T_i \, ds - \int_S u \,(\mathbf{N} \wedge (\nabla v))_i \, d\sigma$

b) Simplifier ces formules dans le cas où S est une partie bornée du plan $x_3 = 0$ et où C est *un* chemin fermé.