EPFL Section : **PH**
Prof John H. Maddocks

ANALYSE III **Série 9** 18 Novembre 2016

---

1. Vérifier la conclusion du Théorème de la Divergence (appelé aussi Théorème de Gauss) dans les cas suivants en calculant directement les intégrales concernées.
   a) $V = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 1\big\}$ et $\mathbf{f}(x,y,z) = (x,y,z)$.
   b) V est le tétraèdre de sommets $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$ et $\mathbf{f}(x,y,z) = (xy, yz, xz)$.
   c) $V = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < 1 \text{ et } 0 < z < 1\big\}$ et $\mathbf{f}(x,y,z) = (x^2,0,0)$.

2. Soient V un domaine régulier simple dans $\mathbb{R}^3$ et $\mathbf{N}$ le champ de normales unitaires extérieures à V. En supposant que les champs $\varphi, u, v \in C^2(\overline{V})$ et $\mathbf{f} \in C^1(\overline{V}, \mathbb{R}^3)$, vérifier les identités suivantes.
   a) $\displaystyle\int_V \varphi(\nabla\cdot\mathbf{f})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{\partial V} \varphi\langle \mathbf{f}, \mathbf{N}\rangle\,\mathrm{d}\sigma - \int_V \langle \nabla\varphi, \mathbf{f}\rangle\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

   b) $\displaystyle\int_V \Delta\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{\partial V} \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma$
   où $\dfrac{\partial}{\partial n}$ est la dérivée dans la direction de la normale extérieure à V sur ∂V.

   c) $\displaystyle\int_V v\Delta u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{\partial V} v\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma - \int_V \langle \nabla u, \nabla v\rangle\;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

   d) $\displaystyle\int_V \{v\Delta u - u\Delta v\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{\partial V} \left\{v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right\}\mathrm{d}\sigma$
   *Les identitées c) et d) s'appellent les **formules de Green** dans* $\mathbb{R}^3$.

3. Soient $U, V \subset \mathbb{R}^3$ des ouverts et

$$\boldsymbol{\alpha} : U \to V \text{ avec } (y_1,y_2,y_3) \mapsto \boldsymbol{\alpha}(y_1,y_2,y_3)$$

un système de coordonnées curvilignes sur V. On rappelle que le système de coordonnées donné par l'application $\boldsymbol{\alpha}$ est *orthogonal* si $\{\partial_{y_1}\boldsymbol{\alpha}, \partial_{y_2}\boldsymbol{\alpha}, \partial_{y_3}\boldsymbol{\alpha}\}$ forme un repère orthogonal pour tous $(y_1,y_2,y_3) \in U$. Soit

$$h_i = |\partial_{y_i}\boldsymbol{\alpha}| \text{ et } \boldsymbol{\epsilon}_i = \frac{1}{h_i}\partial_{y_i}\boldsymbol{\alpha} \text{ pour } i = 1,2,3. \qquad (1)$$

En supposant que le système de coordonées curvilignes $\boldsymbol{\alpha}$ est orthogonal, et donc que $\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \boldsymbol{\epsilon}_3\}$ forme une base orthonormée, et que $u \in C^1(U, \mathbb{R})$ et $\mathbf{f} \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ sont des champs exprimés dans ce système de coordonnées, on a les expressions suivantes (*Pour plus de détails, voir les pages 120-121 du polycopié rédigé par le Prof. J. Descloux.*) :

i) l'élément de volume $dV = h_1 h_2 h_3 dy_1 dy_2 dy_3$

ii) $\nabla u = \sum_{k=1}^{3} \boldsymbol{\epsilon}_k \frac{1}{h_k} \partial_k u$

iii) $\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{k=1}^{3} \partial_k \left(h_1 h_2 h_3 \frac{f_k}{h_k} \right)$

iv) $\nabla \wedge \mathbf{f} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \det \begin{pmatrix} h_1 \boldsymbol{\epsilon}_1 & h_2 \boldsymbol{\epsilon}_2 & h_3 \boldsymbol{\epsilon}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ h_1 f_1 & h_2 f_2 & h_3 f_3 \end{pmatrix}$

v) $\Delta u = \nabla \cdot (\nabla u) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{k=1}^{3} \partial_k \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_k^2} \partial_k u \right)$.

où (f_1, f_2, f_3) sont les composantes du champ $\mathbf{f}$ dans la base $\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \boldsymbol{\epsilon}_3\}$.
Comme expliqué en classe ainsi que dans le polycopié du Prof. J. Descloux pp. 107-109, les opérateurs ∇, $\nabla \cdot$, $\nabla \wedge$ et Δ, qui ont d'abord été introduit en termes des dérivées partielles par rapport au repère Cartésien de l'espace V, ont ***un sens géométrique intrinsèque*** *et que les formules ci-dessus permettent de l'****exprimer*** *dans n'importe quel (autre) système de coordonnées $\boldsymbol{\alpha}$. En particulier, on observe que si $\boldsymbol{\alpha} = Id$ on retrouve les expressions habituelles.*
On considère à présent les coordonnées sphériques

$$\boldsymbol{\alpha}(r, \theta, \phi) = (r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta) \text{ avec } (r, \theta, \phi) \in U$$

où $U =]0, \infty[\times]0, \pi[\times]0, 2\pi[$.

a) Calculer les scalaires h_r, h_θ, h_ϕ et les vecteurs unitaires $\boldsymbol{\epsilon}_r$, $\boldsymbol{\epsilon}_\theta$, $\boldsymbol{\epsilon}_\phi$, tels que

$$\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial(r, \theta, \phi)} = [h_r \boldsymbol{\epsilon}_r \quad h_\theta \boldsymbol{\epsilon}_\theta \quad h_\phi \boldsymbol{\epsilon}_\phi] \, .$$

b) Vérifier que les coordonnées sont orthogonales et esquisser le système de coordonnées.

c) Soient $u(r, \theta, \phi)$ une fonction scalaire et $\mathbf{f}(r, \theta, \phi) = f_r \boldsymbol{\epsilon}_r + f_\theta \boldsymbol{\epsilon}_\theta + f_\phi \boldsymbol{\epsilon}_\phi$ un champ vectoriel. Trouver les expressions explicites pour
   i) l'élément de volume dV pour les coordonnées sphériques
   ii) ∇u
   iii) $\nabla \cdot \mathbf{f}$
   iv) $\nabla \wedge \mathbf{f}$
   v) Δu.

d) Considérons maintenant le champ scalaire $u \in C^1(W, \mathbb{R})$ et le champ de vecteur $\mathbf{f} \in C^1(W, \mathbb{R}^3)$, $W \subset \mathbb{R}^3$, suivant :

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{||\mathbf{x}||^p}, \tag{2}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||^p}, \tag{3}$$

ou $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ et $p \in \mathbb{R}$.
Exprimer u et $\mathbf{f}$ dans les coordonnées sphériques et calculer, respectivement, le gradient et le laplacien, la divergence et le rotationnel.

Les exercices 4, 5 et 6 ont le but de faire la connexion entre ce cours et des applications en physique (physique des fluides et physique de corps solide). Nous vous conseillons de faire ces exercices même s'il ne font pas partie du cœur de la matière d'examen

4. *L'opérateur divergence et les écoulements incompressibles (vu rapidement en classe).*
   Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et un champ $\mathbf{v} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Supposons que $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ représente la vitesse d'un fluide, de densité ρ constante, au point $\mathbf{x}$ s'écoulant dans Ω.

   On dit qu'un fluide est *incompressible* si pour tous $V \subset \Omega$ (V un domaine régulier) le flux de $\rho\mathbf{v}$ au travers de ∂V est nul. On note que cette définition signifie qu'il y a toujours la même quantité de masse (et donc de volume de fluide dans le cas d'une densité constante) pour tous domaine $V \subset \Omega$ fixé.

   Montrer qu'un tel fluide est incompressible $\iff$ $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ sur Ω.

   On observe que cette propriété s'étend aux écoulements de n'importe quel milieu continu (élastique par exemple) et à n'importe quelle notion de densité (de charge éléctrique par exemple).

5. *L'opérateur gradient et l'équilibre hydrostatique.*
   Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et des champs $\mathbf{F} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et $p \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. Supposons que $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ représente la force totale par unité de volume qui s'exerce sur un fluide au repos dans Ω, et que p représente le champ pression dans ce fluide. Noter que pour $V \subset \Omega$ (V un domaine régulier) la force totale qui agit sur $\text{int}V$ est donnée par $\mathbf{f}_V = \int_V \mathbf{F} dxdydz$ et que la force totale qui agit sur ∂V est donnée par $\mathbf{f}_{\partial V} = -\int_{\partial V} pN d\sigma$ où N désigne la normale unitaire extérieure sur ∂V.

   On dit qu'un fluide est en état *d'équilibre hydrostatique* si pour tous $V \subset \Omega$ (V un domaine régulier) on a $\mathbf{f}_{\partial V} + \mathbf{f}_V = 0$.

   Montrer qu'un tel fluide en état d'équilibre hydrostatique $\iff$ $\nabla p = \mathbf{F}$ sur Ω.

   On observe que cette propriété s'étend aux équilibres de n'importe quel milieu continu (élastique par exemple) et à n'importe quelle notion de force (éléctromagnétique par exemple).

6. *L'opérateur rotationnel et la vitesse angulaire d'un corps solide.*
   Soit $\mathcal{B}$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et un champ $\mathbf{v} \in C^1(\mathcal{B}, \mathbb{R}^3)$. Supposons que $\mathbf{v}(\mathbf{p})$ est la vitesse d'un point $\mathbf{p}$ du corps solide $\mathcal{B}$. En notant $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^3$ la vitesse linéaire (constante) d'un point $\mathbf{p}_0$ choisi dans $\mathcal{B}$, $\mathbf{x}$ les coordonnées du point $\mathbf{p}$ mesurées depuis $\mathbf{p}_0$ et $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ la vitesse angulaire (constante) de $\mathcal{B}$, on a que

   $$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}.$$

   a) Vérifier que
   $$\nabla \wedge \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}$$

   b) Montrer que l'écoulement de masse induit par $\mathbf{v}$, dans le cas d'une densité ρ constante, est incompressible.