EPFL Section : **PH**

Prof John H. Maddocks

ANALYSE III **Série 10** 24 Novembre 2017

---

1. *Sur la topologie des domaines*

   Pour les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants dire s'ils sont connexe par arcs, simplement connexe et étoilé par rapport à un point. Une justification 'en mots' est suffisante.

   a) i. $\Pi_0 =]-1,1[\times]-1,1[\times\{0\}$

      ii. $C_0 =]-1,1[\times]-1,1[\times]-1,1[$

   b) i. $\Pi_1 = \Pi_0 \setminus \{(0,0,0)\}$

      ii. $C_1 = C_0 \setminus \{(0,0,0)\}$

   c) i. $\Pi_2 = \Pi_0 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y = 0 \text{ et } z = 0\}$

      ii. $C_2 = C_0 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y = 0 \text{ et } z = 0\}$

   d) $C_3 = C_0 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \leq 0, y = 0 \text{ et } z = 0\}$

   e) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \setminus \{(0,0,1)\}$

2. *Généralités sur les potentiels scalaires*

   Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

   a) Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

      i. Soit $p, q \in \Omega$ avec $p \neq q$.

      $$\int_{\overrightarrow{C_1}} f \cdot \mathrm{d}\ell = \int_{\overrightarrow{C_2}} f \cdot \mathrm{d}\ell$$

      pour tous chemins $\overrightarrow{C_1}, \overrightarrow{C_2} \subset \Omega$ allant du point p à q, et ceci pour tous $p \neq q \in \Omega$.

      ii. Pour tout chemin $\overrightarrow{C} \subset \Omega$ fermé, on a

      $$\int_{\overrightarrow{C}} f \cdot \mathrm{d}\ell = 0.$$

   b) Montrer que si $n = 3$, alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

      i. $\nabla f(x) = \nabla f(x)^T$ pour tous $x \in \Omega$.

      ii. $(\nabla \wedge f)(x) = 0$ pour tous $x \in \Omega$.

3. *Sur l'existence de potentiel scalaire sur* $\mathbb{R}^2$ *et* $\mathbb{R}^3$

   Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. On rappelle qu'une condition nécessaire pour l'existence d'un potentiel scalaire $\phi \in C^2(\Omega)$ pour un champ $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ sur le domaine Ω est que $\nabla f(x) = \nabla f(x)^T$ $\forall x \in \Omega$. Cette condition est suffisante si Ω est simplement connexe (théorème 7.4 du polycopié de Stuart).

   En utilisant ceci, discuter l'existence d'un potentiel scalaire pour les champs vectoriels suivants, et dans les cas où il existe, le donner sous sa forme générale :

a) $f(x,y) = (x^2 + y^2, 2xy)$ sur $\mathbb{R}^2$.

b) $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ sur $\mathbb{R}^2$.

c) $f(x,y,z) = (y^2, -z^2, x^2)$ sur $\mathbb{R}^3$.

d) $f(x,y,z) = (6xy\cos z, 3x^2\cos z, -3x^2 y \sin z)$ sur $\mathbb{R}^3$.

4. *Sur l'existence de potentiel scalaire sur des domaines contenant des trous*

a) Soit $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \neq 0\}$ et

$$f(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, z\right).$$

Montrer que $\nabla \wedge f = 0$, mais que

$$\int_{\overrightarrow{C}} f \cdot \mathrm{d}\ell \neq 0$$

où $C = \{(x,y,z) \in \Omega \,|\, x^2 + y^2 = 1 \text{ et } z = 0\}$. En conclure, en utilisant un théorème du cours, qu'il *n'existe pas* de potentiel scalaire pour le champ f sur Ω.

b) i. Soit $\Omega = \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ et un champ vectoriel f défini par

$$f(x) = g(\|x\|)x$$

pour tout $x \in \Omega$ et pour une fonction $g \in C((0,\infty), \mathbb{R})$ donnée. Montrer que

$$\int_{\overrightarrow{C}} f \cdot \mathrm{d}\ell = 0$$

pour tout chemin fermé $\overrightarrow{C}$ dans Ω et en conclure l'existence d'un potentiel scalaire pour f. Puis donner ce potentiel sous sa forme la plus générale.

ii. La force Newtonienne entre deux corps est décrite par

$$f(x) = -\frac{m_1 m_2}{|x|^3} x$$

où x dénote la position relative entre les deux corps et m_1 et m_2 leur masse respective. Calculer explicitement un potentiel pour ce champ vectoriel.