

1. a) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble ouvert et étoilé par rapport à l'origine, soit $\mathbf{f} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ un champ vectoriel et $\varphi(\mathbf{x})$ un champ scalaire défini par

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_0^1 \langle \mathbf{f}(t\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle dt \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Montrer que

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla \varphi(\mathbf{x}) + \int_0^1 t(\nabla \mathbf{f}^T - \nabla \mathbf{f})(t\mathbf{x})\mathbf{x} dt.$$

Rappel : Le gradient d'une fonction peut être calculé via la relation
 $\frac{d}{ds}|_{s=0} \varphi(\mathbf{x} + s\mathbf{v}) = \langle \nabla \varphi(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3.$

- b) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un sous-ensemble ouvert et étoilé par rapport à l'origine, soit $\mathbf{f} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ un champ vectoriel et $\psi(\mathbf{x})$ un champ vectoriel défini par

$$\psi(\mathbf{x}) = \int_0^1 \mathbf{f}(t\mathbf{x}) \wedge t\mathbf{x} dt \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Montrer que

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\nabla \wedge \psi)(\mathbf{x}) + \int_0^1 (\nabla \cdot \mathbf{f})(t\mathbf{x})t^2\mathbf{x} dt.$$

Observer que les résultats de a) et b) montrent que les définitions des champs φ et ψ induisent des restes dans les cas où le champ \mathbf{f} ne dérive pas d'un potentiel.

2. Discuter l'existence d'un potentiel vecteur pour les champs vectoriels suivants et le donner sous sa forme générale dans les cas où il existe.
- $f(x, y, z) = (x \cos y, -\sin y, \sin x)$ sur \mathbb{R}^3 .
 - $f(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ sur \mathbb{R}^3 .
 - $f(x, y, z) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$ sur $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \neq 0\}$.

3. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert et $\mathbf{g} \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Montrer que s'il existe un potentiel vecteur $\psi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ pour \mathbf{g} sur Ω alors

$$\int_S \mathbf{g} \cdot d\sigma = 0$$

pour toutes surfaces fermées $S \subset \Omega$.

4. Soient $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, \mathbf{f} le champ vectoriel défini par

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}$$

et les domaines $A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0\}$, $B = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0 \text{ et } z \leq 0\}$ et $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Noter que $A \subset B \subset \Omega$.

- a) Montrer qu'il existe un potentiel vecteur ψ pour le champ \mathbf{f} sur A et en trouver un qui est tel que $\psi_3 \equiv 0$. Puis donner la forme générale de ce potentiel vecteur.
- b) En utilisant l'exercice 3. et la sphère $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, montrer qu'il n'existe pas de potentiel vectoriel pour \mathbf{f} sur Ω .
- c) Montrer qu'il existe un potentiel vecteur ψ pour le champ \mathbf{f} sur B , et le donner sous sa forme générale. Puis montrer qu'il n'est pas continu sur Ω .

5. Soient Θ un sous-ensemble ouvert et étoilé dans \mathbb{R}^2 et soient $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Theta, -c < z < c\}$ pour quelque $c > 0$. Supposons que $\mathbf{f} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ est un champ vectoriel qui modélise la vitesse d'un fluide en chaque point de Ω , et que de plus il s'agit d'un écoulement planaire, i.e. \mathbf{f} est de la forme

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = (f_1, f_2, 0)(x_1, x_2, x_3).$$

- a) i. Montrer que si l'écoulement est incompressible, i.e. $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$ sur Ω , alors il existe une fonction $\psi \in C^2(\Omega)$ telle que

$$\mathbf{f} = \nabla \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix} \text{ sur } \Omega$$

La fonction ψ est appelé fonction de courant [stream function] de l'écoulement.

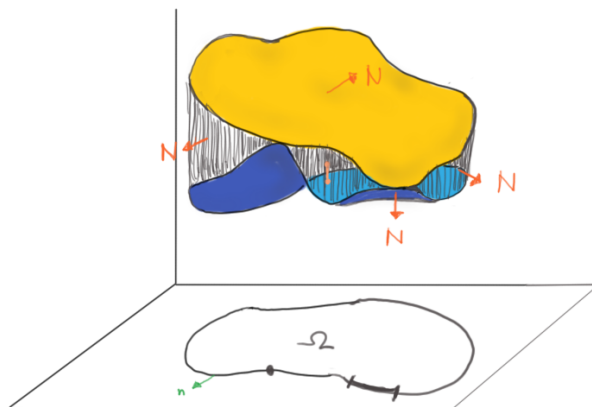
- ii. Montrer que si ψ est stationnaire (i.e. ψ ne dépend pas du temps), les trajectoires des particules de fluide induites par le champ de vitesse \mathbf{f} coïncident avec les lignes de niveau de ψ sur les plans $x_3 = \text{const}$.
- iii. Montrer que si $\partial_{x_3} \mathbf{f} = 0$, alors il existe une fonction de courant $\psi(x_1, x_2)$ indépendante de x_3 . Si de plus l'écoulement est irrotationnel, i.e. $\nabla \wedge \mathbf{f} = 0$ sur Ω , montrer que cette ψ est une fonction harmonique sur Ω , i.e. $\Delta \psi = 0$ sur Ω .
- b) i. Montrer que si l'écoulement est irrotationnel, i.e. $\nabla \wedge \mathbf{f} = 0$ sur Ω , alors il existe une fonction $\phi \in C^2(\Omega)$ telle que

$$\mathbf{f} = \nabla \phi \text{ sur } \Omega$$

- ii. Montrer que les lignes de niveau de ϕ sur les plans $x_3 = \text{const}$ sont orthogonales à celles de ψ .
- iii. Montrer que si de plus l'écoulement est incompressible, alors ϕ est une fonction harmonique sur Ω .
- c) En supposant à présent que $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 > 0 \text{ et } x_2 > 0\}$ et $\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = (x, -y, 0)$,
 - i. Montrer qu'il existe une fonction de courant ψ sur Ω , la donner sous sa forme générale et esquisser les trajectoires induites par le champ de vitesse \mathbf{f} sur le plan $x_3 = 0$.
 - ii. Montrer qu'il existe un potentiel ϕ sur Ω , le donner sous sa forme générale et esquisser ses lignes de niveaux sur le plan $x_3 = 0$.

6. Soient C un chemin fermé dans \mathbb{R}^2 et $D = (\text{int}C) \cup C$. Soient $\phi, \psi \in C^1(D)$ telles que $\phi < \psi$ sur $\text{int}C$ et $\{(x, y) \in C : \phi(x, y) = \psi(x, y)\}$ soit la réunion d'un nombre fini de points et de chemins. Considérons le domaine régulier dans \mathbb{R}^3

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \text{int}C \text{ et } \phi(x, y) < z < \psi(x, y)\}$$



© P.F.

Soit $\mathbf{f} \in \mathbf{C}^1(\bar{V}, \mathbb{R}^3)$. Vérifier que le champ vectoriel

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\int_{\varphi(x,y)}^z f_2(x, y, t) dt, - \int_{\varphi(x,y)}^z f_1(x, y, t) dt, 0 \right)$$

est bien le potentiel vecteur du champ vectoriel donné par

$$\mathbf{W}(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), -G_3(x, y, z))$$

où

$$G_3(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{\varphi(x,y)}^z f_1(x, y, t) dt + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\varphi(x,y)}^z f_2(x, y, t) dt$$

Cf. Démonstration du lemme 6.4 du polycopié de Stuart (p. 43-45) et la preuve du théorème de la divergence vue en cours.

Les exercices suivants peuvent être effectués pendant la séance d'exercices de la semaine prochaine ; la série sera plus courte. Mais ils portent sur la matière vue cette semaine.

7. Sur les équations différentielles ordinaires (EDO) linéaires à coefficients constants

- a) i. Soit $\lambda, \xi_0 \in \mathbb{C}$ deux constantes complexes et J un intervalle ouvert, montrer que $u(t) = \xi_0 e^{\lambda t}$ est une solution de l'équation différentielle $y'(t) = \lambda y(t)$ pour tous $t \in J$.
- ii. On rappelle que l'espace des fonctions différentiables $V = C^\infty([a, b[, \mathbb{R})$ muni de l'addition des fonctions constituent un espace vectoriel réel. Montrer que l'opérateur $A : V \rightarrow V$ défini par

$$y(t) \mapsto A(y(t)) = y'(t)$$

est linéaire, et que les fonctions de la forme $u(t) = e^{\lambda t}$ sont des vecteurs propres de A associés à la valeur propre λ .

- b) i. Soient $a, b, c, \xi_0 \in \mathbb{C}$ des constantes complexes et J un intervalle ouvert, montrer que $u(t) = \xi_0 e^{\lambda t}$ est une solution de l'équation différentielle

$$L(y(t)) = ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \tag{1}$$

pour tous $t \in J$ si λ est une solution de l'équation $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

- ii. Montrer que si le polynôme $a\lambda^2 + b\lambda + c$ admet deux racines *distinctes* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, alors

$$u(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

est encore solution de (1) pour tous $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ et pour tous $t \in J$.

- iii. Montrer que si le polynôme $a\lambda^2 + b\lambda + c$ admet une seule racine *double* $\lambda \in \mathbb{C}$, alors

$$u(t) = (C_1 + tC_2) e^{\lambda t}$$

est encore solution de (1) pour tous $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ et pour tous $t \in J$.

Noter que ceci montre que les solutions de (1) constituent au moins un espace vectoriel de dimension deux. Plus précisément, on peut montrer que toutes les solutions de (1) sont exactement de la forme b)ii. et b)iii. Le fait que l'espace des solutions soit fermé pour l'addition est appelé principe de superposition.

- c) Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner toutes les solutions réelles de l'équation différentielle

$$y''(t) + ay = 0.$$

- d) Supposons à présent que l'on cherche à résoudre l'équation différentielle *non-homogène*

$$L(y(t)) = f(t) \tag{2}$$

où L est défini dans (1) et f est une fonction donnée, et supposons que l'on connaisse une solution particulière $u_p(t)$ de (2).

Montrer que $u(t) = u_p(t) + u_h(t)$ est encore une solution de (2) si $u_h(t)$ est une solution de (1).

Noter que l'on peut montrer que toutes les solutions de (2) sont de cette forme.

8. *Rappel sur les systèmes d'équations différentielles ordinaires (EDO) linéaires à coefficients constants. Cet exercice ne fait pas partie de la matière d'examen.*

On rappelle qu'une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une racine du polynôme $\det(\mathbf{A} - \lambda I)$ et qu'un vecteur propre $\xi \in \mathbb{R}^n$ associé à λ est une solution de $\mathbf{A}\xi = \lambda\xi$. La multiplicité algébrique de λ correspond à sa multiplicité en tant que racine du polynôme $\det(\mathbf{A} - \lambda I)$ et sa multiplicité géométrique correspond la dimension de l'espace propre associé à la valeur λ .

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice à coefficients réels.

- a) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de la matrice \mathbf{A} et $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre correspondant, alors

$$\mathbf{u}(t) = \xi_0 e^{\lambda t}$$

est une solution de l'équation $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

- b) Considérons le cas quand la multiplicité géométrique de $\lambda \in \mathbb{C}$ est inférieure à sa multiplicité algébrique.

- i. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de la matrice \mathbf{A} , $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre correspondant et qu'il existe $\xi_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que $(\mathbf{A} - \lambda I)\xi_1 = \xi_0$, alors

$$\mathbf{u}(t) = (t\xi_0 + \xi_1) e^{\lambda t}$$

est une solution de l'équation $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Noter que ξ_1 est un vecteur propre généralisé.

- ii. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de la matrice \mathbf{A} , $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre correspondant et qu'il existe $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$ tels que $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\xi_1 = \xi_0$ et $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\xi_2 = \xi_1$, alors

$$\mathbf{u}(t) = \left(\frac{1}{2}t^2\xi_0 + t\xi_1 + \xi_2 \right) e^{\lambda t}$$

est une solution de l'équation $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Noter que (ξ_0, ξ_1, ξ_2) est une chaîne de vecteurs propres généralisés.

- c) On considère l'équation différentielle ordinaire linéaire du deuxième ordre à coefficients constants

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (3)$$

avec $y : J \rightarrow \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert.

- i. Ecrire (3) comme un système de deux équations du premier ordre et montrer que $y(t) = e^{\lambda t}$ est une solution de (3), si λ est une racine de

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

- ii. Ecrire la solution générale réelle de (3) pour les trois cas possible, i.e. pour $b^2 - 4ac > 0$, $b^2 - 4ac < 0$ et $b^2 - 4ac = 0$

- d) On donne la matrice \mathbf{A} semblable à la matrice de Jordan \mathbf{J} avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

i.e. $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{J}\mathbf{S}^{-1}$, avec

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Donner la multiplicité algébrique et géométrique de la valeur propre 2 et trouver la solution de l'équation $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, telle que $\mathbf{x}(0) = \mathbf{e}_1$.