EPFL Section : **PH**
Prof John H. Maddocks

ANALYSE III **Série 11** 2 Décembre 2015

---

1. a) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble ouvert et étoilé par rapport à l'origine, soit $\mathbf{f} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ un champ vectoriel et $\varphi(\mathbf{x})$ un champ scalaire défini par

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_0^1 \langle \mathbf{f}(t\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle \, \mathrm{d}t \ \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Montrer que

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla\varphi(\mathbf{x}) + \int_0^1 t(\nabla \mathbf{f} - \nabla \mathbf{f}^T)(t\mathbf{x})\mathbf{x} \, \mathrm{d}t.$$

Rappel : Le gradient d'une fonction peut être calculé via la relation $\frac{d}{ds}_{|s=0}\varphi(\mathbf{x} + s\mathbf{v}) = \langle \nabla\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle \ \ \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3.$

b) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un sous-ensemble ouvert et étoilé par rapport à l'origine, soit $\mathbf{f} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ un champ vectoriel et $\psi(\mathbf{x})$ un champ vectoriel défini par

$$\psi(\mathbf{x}) = \int_0^1 \mathbf{f}(t\mathbf{x}) \wedge t\mathbf{x} \, \mathrm{d}t \ \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Montrer que

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\nabla \wedge \psi)(\mathbf{x}) + \int_0^1 (\nabla \cdot \mathbf{f})(t\mathbf{x})t^2\mathbf{x} \, \mathrm{d}t.$$

Observer que les résultats de a) et b) montrent que les définitions des champs φ et ψ induisent des restes dans les cas où le champ $\mathbf{f}$ *ne dérive pas d'un potentiel.*

2. Discuter l'existence d'un potentiel vecteur pour les champs vectoriels suivants et le donner sous sa forme générale dans les cas où il existe.
   a) $f(x, y, z) = (x \cos y, -\sin y, \sin x)$ sur $\mathbb{R}^3$.
   b) $f(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ sur $\mathbb{R}^3$.
   c) $f(x, y, z) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0\right)$ sur $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \neq 0\}$.

3. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert et $\mathbf{g} \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Montrer que s'il existe un potentiel vecteur $\psi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ pour $\mathbf{g}$ sur Ω alors

$$\int_S \mathbf{g} \cdot d\sigma = 0$$

pour toutes surfaces fermées $S \subset \Omega$.

4. Soient $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{f}$ le champ vectoriel défini par

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}$$

et les domaines $A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x > 0\}$, $B = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = y = 0 \text{ et } z \leq 0\}$ et $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Noter que $A \subset B \subset \Omega$.

a) Montrer qu'il existe un potentiel vecteur ψ pour le champ $\mathbf{f}$ sur A et en trouver un qui est tel que $\psi_3 \equiv 0$. Puis donner la forme générale de ce potentiel vecteur.

b) En utilisant l'exercice 3. et la sphère $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, montrer qu'il n'existe pas de potentiel vectoriel pour $\mathbf{f}$ sur Ω .

c) Montrer qu'il existe un potentiel vecteur ψ pour le champ $\mathbf{f}$ sur B, et le donner sous sa forme générale. Puis montrer qu'il n'est pas continu sur Ω.

5. Soient Ω un sous-ensemble ouvert et étoilé dans $\mathbb{R}^3$. Supposons que $\mathbf{f} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ est un champ vectoriel qui modélise la vitesse d'un fluide en chaque point de Ω, et que de plus il s'agit d'un écoulement planaire, i.e. $\mathbf{f}$ est de la forme

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = (f_1, f_2, 0)(x_1, x_2, x_3).$$

a) i. Montrer que si l'écoulement est incompressible, i.e. $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$ sur Ω, alors il existe une fonction $\psi \in C^2(\Omega)$ telle que

$$\mathbf{f} = \nabla \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix} \quad \text{sur } \Omega$$

La fonction ψ est appelé fonction de courant [stream function] de l'écoulement.

ii. Montrer que si ψ est stationnaire (i.e. ψ ne dépend pas du temps), les trajectoires des particules de fluide induites par le champ de vitesse $\mathbf{f}$ coïncident avec les lignes de niveau de ψ sur les plans $x_3 = const$.

iii. Montrer que si de plus l'écoulement est irrotationel, i.e. $\nabla \wedge \mathbf{f} = 0$ sur Ω, et que $\partial_{x_3}\mathbf{f} = 0$ alors ψ est une fonction harmonique sur Ω, i.e. $\triangle\psi = 0$ sur Ω.

b) i. Montrer que si l'écoulement est irrotationel, i.e. $\nabla \wedge \mathbf{f} = 0$ sur Ω, alors il existe une fonction $\phi \in C^2(\Omega)$ telle que

$$\mathbf{f} = \nabla\phi \text{ sur } \Omega$$

ii. Montrer que les lignes de niveau de ϕ sur les plans $x_3 = const$ sont orthogonales à celles de ψ.

iii. Montrer que si de plus l'écoulement est incompressible, alors ϕ est une fonction harmonique sur Ω.

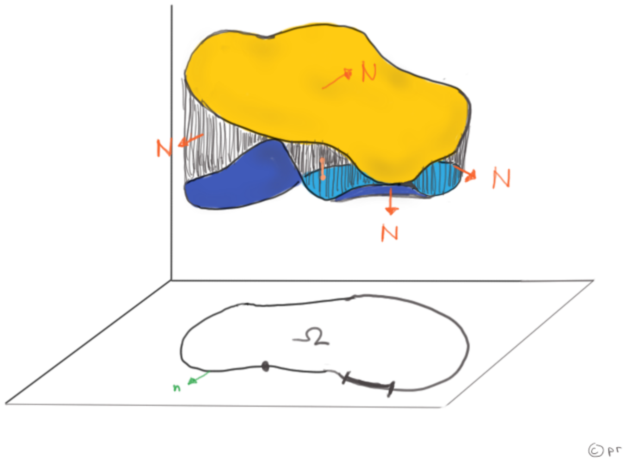
c) En supposant à présent que $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 > 0 \text{ et } x_2 > 0\}$ et $\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = (x, -y, 0)$,

i. Montrer qu'il existe une fonction de courant ψ sur Ω, la donner sous sa forme générale et esquisser les trajectoires induites par le champ de vitesse $\mathbf{f}$ sur le plan $x_3 = 0$.

ii. Montrer qu'il existe un potentiel ϕ sur Ω, le donner sous sa forme générale et esquisser ses lignes de niveaux sur le plan $x_3 = 0$.

6. Soient C un chemin fermé dans $\mathbb{R}^2$ et $D = (\text{int}C) \cup C$. Soient ϕ, $\psi \in C^1(D)$ telles que $\phi < \psi$ sur int$C$ et $\{(x, y) \in C : \phi(x, y) = \psi(x, y)\}$ soit la réunion d'un nombre fini de points et de chemins. Considérons le domaine régulier dans $\mathbb{R}^3$

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \text{int}C \text{ et } \phi(x, y) < z < \psi(x, y)\right\}$$



Soit $\mathbf{f} \in \mathbf{C^1}\left(\bar{\mathbf{V}}, \mathbb{R}^\mathbf{3}\right)$. Vérifier que le champ vectoriel

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\int_{\varphi(x,y)}^{z} f_2(x,y,t)\,dt,\ -\int_{\varphi(x,y)}^{z} f_1(x,y,t)\,dt,\ 0 \right)$$

est bien le potentiel vecteur du champ vectoriel donné par

$$\mathbf{W}\left(x,y,z\right) = \left(f_1\left(x,y,z\right), f_2\left(x,y,z\right), -G_3\left(x,y,z\right)\right)$$

où

$$G_3\left(x,y,z\right) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{\varphi(x,y)}^{z} f_1(x,y,t)\,dt + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\varphi(x,y)}^{z} f_2(x,y,t)\,dt$$

Cf. Démonstration du lemme 6.4 du polycopié de Stuart (p. 43-45) et la preuve du théorème de la divergence vue en cours.

Les exercices suivants peuvent être effectués pendant la séance d'exercices de la semaine prochaine ; la série sera plus courte. Mais ils portent sur la matière vue cette semaine.

7. *Sur les équations différentielles ordinaires (EDO) linéaires à coefficients constants*

   a) i. Soit $\lambda, \xi_0 \in \mathbb{C}$ deux constantes complexes et J un intervalle ouvert, montrer que $u(t) = \xi_0 e^{\lambda t}$ est une solution de l'équation différentielle $y'(t) = \lambda y(t)$ pour tous $t \in J$.

   ii. On rappelle que l'espace des fonctions différentiables $V = C^\infty(]a,b[, \mathbb{R})$ muni de l'addition des fonctions constituent un espace vectoriel réel. Montrer que l'opérateur $A : V \to V$ défini par

   $$y(t) \mapsto A(y(t)) = y'(t)$$

   est linéaire, et que les fonctions de la forme $u(t) = e^{\lambda t}$ sont des vecteurs propres de A associés à la valeur propre λ.

   b) i. Soient $a, b, c, \xi_0 \in \mathbb{C}$ des constantes complexes et J un intervalle ouvert, montrer que $u(t) = \xi_0 e^{\lambda t}$ est une solution de l'équation différentielle

   $$L(y(t)) = ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \tag{1}$$

   pour tous $t \in J$ si λ est une solution de l'équation $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

ii. Montrer que si le polynôme $a\lambda^2+b\lambda+c$ admet deux racines *distinctes* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, alors

$$u(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

est encore solution de (1) pour tous $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ et pour tous $t \in J$.

iii. Montrer que si le polynôme $a\lambda^2+b\lambda+c$ admet une seule racine *double* $\lambda \in \mathbb{C}$, alors

$$u(t) = (C_1 + tC_2)\, e^{\lambda t}$$

est encore solution de (1) pour tous $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ et pour tous $t \in J$.

Noter que ceci montre que les solutions de (1) constituent au moins un espace vectoriel de dimension deux. Plus précisément, on peux montrer que toutes les solutions de (1) sont <u>exactement</u> de la forme b)ii. et b)iii. Le fait que l'espace des solutions soit fermé pour l'addition est appelé <u>principe de superposition</u>.

c) Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner toutes les solutions réelles de l'équation différentielle

$$y''(t) + ay = 0.$$

d) Supposons à présent que l'on cherche à résoudre l'équation différentielle *non-homogène*

$$L(y(t)) = f(t) \tag{2}$$

où L est défini dans (1) et f est une fonction donnée, et supposons que l'on connaisse une solution particulière $u_p(t)$ de (2).

Montrer que $u(t) = u_p(t) + u_h(t)$ est encore une solution de (2) si $u_h(t)$ est une solution de (1).

Noter que l'on peut montrer que toutes les solutions de (2) sont de cette forme.

8. *Rappel sur les systèmes d'équations différentielles ordinaires (EDO) linéaires à coefficients constants. Cet exercice ne fait pas partie de la matière d'examen.*

On rappelle qu'une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une racine du polynôme $\det(\mathbf{A}-\lambda I)$ et qu'un vecteur propre $\xi \in \mathbb{R}^n$ associé à λ est une solution de $\mathbf{A}\xi = \lambda\xi$. La multiplicité algébrique de λ correspond à sa multiplicité en tant que racine du polynôme $\det(\mathbf{A} - \lambda I)$ et sa multiplicité géométrique correspond la dimension de l'espace propre associé à la valeur λ.

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice à coefficients réels.

a) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de la matrice $\mathbf{A}$ et $\xi_{\mathbf{0}} \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre correspondant, alors

$$\mathbf{u}(t) = \xi_{\mathbf{0}} e^{\lambda t}$$

est une solution de l'équation $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

b) Considérons le cas quand la multiplicité géométrique de $\lambda \in \mathbb{C}$ est inférieure à sa multiplicité algébrique.

i. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de la matrice $\mathbf{A}$, $\xi_{\mathbf{0}} \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre correspondant et qu'il existe $\xi_{\mathbf{1}} \in \mathbb{R}^n$ tel que $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\xi_{\mathbf{1}} = \xi_{\mathbf{0}}$, alors

$$\mathbf{u}(t) = (t\xi_{\mathbf{0}} + \xi_{\mathbf{1}})\, e^{\lambda t}$$

est une solution de l'équation $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Noter que $\xi_{\mathbf{1}}$ est un vecteur propre généralisé.

ii. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de la matrice $\mathbf{A}$, $\xi_{\mathbf{0}} \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre correspondant et qu'il existe $\xi_{\mathbf{1}}, \xi_{\mathbf{2}} \in \mathbb{R}^n$ tels que $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\xi_{\mathbf{1}} = \xi_{\mathbf{0}}$ et $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\xi_{\mathbf{2}} = \xi_{\mathbf{1}}$, alors

$$\mathbf{u}(t) = \left(\frac{1}{2}t^2\xi_{\mathbf{0}} + t\xi_{\mathbf{1}} + \xi_{\mathbf{2}}\right) e^{\lambda t}$$

est une solution de l'équation $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Noter que $(\xi_{\mathbf{0}}, \xi_{\mathbf{1}}, \xi_{\mathbf{2}})$ *est une chaîne de vecteurs propres généralisés.*

c) On considère l'équation différentielle ordinaire linéaire du deuxième ordre à coefficients constants

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{3}$$

avec $y : J \to \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert.

i. Ecrire (3) comme un système de deux équations du premier ordre et montrer que $y(t) = e^{\lambda t}$ est une solution de (3), si λ est une racine de

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

ii. Ecrire la solution générale réelle de (3) pour les trois cas possible, i.e. pour $b^2 - 4ac > 0$, $b^2 - 4ac < 0$ et $b^2 - 4ac = 0$

d) On donne la matrice $\mathbf{A}$ semblable à la matrice de Jordan $\mathbf{J}$ avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

i.e. $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{J}\mathbf{S}^{-1}$, avec

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Donner la multiplicité algébrique et géométrique de la valeur propre 2 et trouver la solution de l'équation $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, telle que $\mathbf{x}(0) = \mathbf{e}_1$.