EPFL Section : PH
Prof John H. Maddocks

ANALYSE III **Série 12** 9 Décembre 2016

---

1. *Sur la méthode de séparation de variables pour l'équation de la chaleur avec conditions de bord homogènes*
   Pour $a, A, B > 0$, résoudre

$$\partial_t u(x,t) = a\partial_x^2 u(x,t) \quad \text{pour } 0 < x < 1 \text{ et } t > 0$$

   en utilisant la méthode de séparation des variables, avec les conditions suivantes

   a) $\begin{cases} \partial_x u(0,t) = 0 \text{ et } u(1,t) = 0 \quad \text{pour } t > 0, \\ u(x,0) = A\cos(\frac{5\pi}{2}x) \quad \text{pour } 0 < x < 1. \end{cases}$

   b) $\begin{cases} u(0,t) = u(1,t) \text{ et } \partial_x u(0,t) = \partial_x u(1,t) \quad \text{pour } t > 0, \\ u(x,0) = A\cos(4\pi x) + B\sin(2\pi x) \quad \text{pour } 0 < x < 1. \end{cases}$

2. *Sur la méthode de séparation de variables avec conditions de bord non-homogènes*
   a) Résoudre problème aux conditions de bord suivant

$$\begin{cases} Lu(x) = -u''(x) + 3u'(x) - 2u(x) = \lambda u(x) \quad \text{pour } 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

   Noter que les solutions correspondent au spectre et aux fonctions propres de l'opérateur L.

   b) Trouver une solution u du problème suivant en utilisant la méthode de séparation des variables

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = \partial_x^2 u(x,t) - 3\partial_x u(x,t) + 2u(x,t) \quad \text{pour } 0 < x < 1 \text{ et } t > 0, \\ u(0,t) = 2 \text{ et } u(1,t) = 0 \quad \text{pour } t > 0, \\ u(x,0) = e^{\frac{3}{2}x}\left(\sin \pi x - \sin 3\pi x\right) + \frac{2e^x(e^x - e)}{1-e} \quad \text{pour } 0 < x < 1. \end{cases}$$

   Astuce : Commencer par trouver une solution du problème pour les conditions de bord non-homogènes.

3. *Sur la méthode de séparation de variables pour l'équation d'onde et l'équation de Laplace*
   Utiliser la méthode de séparation des variables pour résoudre les problèmes suivants

   a) $\begin{cases} \partial_t^2 u(x,t) = c^2\partial_x^2 u(x,t) \quad \text{pour } 0 < x < 1 \text{ et } t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad \text{pour } t > 0 \\ u(x,0) = 3\sin \pi x + 2\sin 2\pi x \\ \partial_t u(x,0) = \sin \pi x + 2\sin 3\pi x \quad \text{pour } 0 < x < 1 \end{cases}$

   Où $c \neq 0$.

$$\text{b)}\ \begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 \quad \text{pour} \ \ 0 < x < 1 \ \ \text{et} \ \ 0 < y < \pi \\ u(0,y) = 1 + \cos 2y \ \ \text{et} \ \ u(1,y) = 0 \quad \text{pour} \ \ 0 < y < \pi \\ \partial_y u(x,0) = 0 \text{ et } \partial_y u(x,\pi) = 0 \quad \text{pour} \ \ 0 < x < 1 \end{cases}$$