
ANALYSE III **Série 13** 16 Décembre 2016

---

1. *Sur la méthode de séparation de variables pour l'équation de Laplace en coordonnées polaires*
   Utiliser la méthode de séparation des variables pour trouver la solution du problème
   $$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{pour } (x,y) \in \Omega, \\ u(x,0) = 0 \text{ et } u(x,y) = 3y - 4y^3 & \text{pour } (x,y) \in \partial\Omega \end{cases}$$
   où $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$.
   Rappel : En coordonnées polaires, si $v(r,\theta) := u(r\cos\theta, r\sin\theta)$,
   $$\Delta u = \frac{1}{r}\partial_r(r\,\partial_r v) + \frac{1}{r^2}\,\partial_\theta\partial_\theta v.$$

2. *Sur les séries de Fourier*
   a) Montrer que $\{\sin(nx)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une famille des fonctions orthogonales (mais pas orthonormées) sur $[0,\pi]$ pour le produit scalaire de $L^2(0,\pi)$.
   b) Calculer l'expansion $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x)$ sur $(0,\pi)$ pour
      A) $f(x) = x$
      B) $f(x) = \sin x$
      C) $f(x) = \cos x$
      avec chacune des séries
      i. $\phi_n(x) = \sin nx$
      ii. $\phi_n(x) = \cos nx$
      iii. $\phi_n^c(x) = \cos nx$ et $\phi_n^s(x) = \sin nx$ où n est pair pour les deux séries.
      Remarque : En utilisant l'exercice 3c à suivre, on peut voir que les séries ii-iii sont aussi orthogonales mais pas forcément orthonormées.
   c) *(Optionnel)* En utilisant la méthode de séparation de variables et le résultat du point précédent, donner la solution $u :]0,\pi[\times]0,\infty[\to \mathbb{R}$ du problème suivant
   $$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = \partial_x^2 u(x,t) & \text{pour } 0 < x < \pi \text{ et } t > 0, \\ u(0,t) = 0 \text{ et } u(\pi,t) = 0 & \text{pour tout } t > 0, \\ u(x,0) = x & \text{pour } 0 < x < \pi \end{cases}$$

3. *Sur le problème de Sturm-Liouville*
   Soit $(a,b) \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soit V le sous-espace de $L^2(a,b)$ donné par
   $$V = \left\{ y \in C^2(a,b) : y(a) = y(b) \ \text{ et } p(a)\, y'(a) = p(b)\, y'(b) \right\}$$
   pour une fonction $p(x)$ de classe C^1 donnée. Comme on l'a vu en classe, l'opérateur
   $$L : V \to L^2 : y \mapsto Ly := -\left(p(x)\, y'\right)' + q(x)\, y$$
   est un opérateur de Sturm-Liouville.

a) Montrer que L est un opérateur linéaire et auto-adjoint, au sens où $\langle y_1, Ly_2\rangle = \langle y_2, Ly_1\rangle$ pour tout $y_1, y_2 \in V$, où $\langle f_1, f_2\rangle = \int_a^b f_1 f_2 dx$.
Utiliser l'intégration par partie.

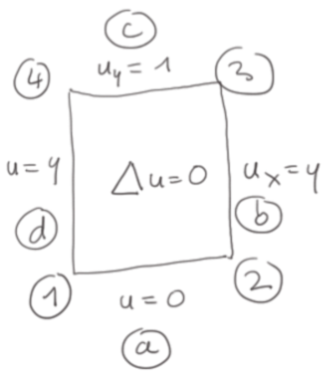
b) Utiliser le point précédent pour montrer que toutes les valeurs propres de $Ly = \lambda y$ sont réelles.

Copier la preuve pour les matrices symétriques et réelles en utilisant le produit scalaire $\langle f_1, f_2\rangle = \int_a^b \bar{f}_1 f_2 dx$ où f_1 et f_2 peuvent être des fonctions complexes.

c) Montrer que si $L\phi_i = \lambda_i \phi_i$ pour $i = 1, 2$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors $\langle \phi_1, \phi_2\rangle = 0$.
Copier la preuve pour les matrices.

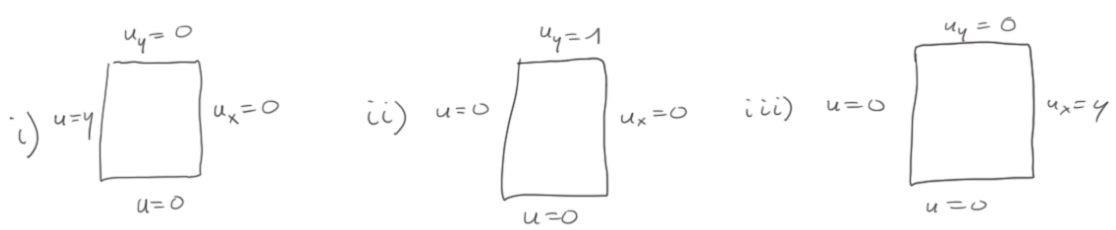
4. *Sur la méthode de séparation des variables pour plusieurs conditions de bord non-homogènes*
Sur $\Omega = (0,1) \times (0,2)$, on considère

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{sur } \Omega \\ u(x,0) = 0 & \text{pour } 0 < x < 1 \\ u_y(x,2) = 1 & \text{pour } 0 < x < 1 \\ u(0,y) = y & \text{pour } 0 < y < 2 \\ u_x(1,y) = y & \text{pour } 0 < y < 2. \end{cases} \tag{1}$$



a) Montrer que les conditions de bord inhomogènes sont compatibles aux coins ①, ② et ④, c'est-à-dire qu'en ① les conditions de bord sur les arrêtes ⓐ et ⓓ sont compatibles etc. et montrer qu'il n'y a pas de condition de compatibilité en ③.

b) Par superposition, on peut écrire la solution u de (1) comme $u = u_1 + u_2 + u_3$ où u_i satisfait un des trois problèmes avec une seule condition de bord inhomogène. Montrer que parmi ces trois problèmes, deux ont des conditions de bord incompatibles.



c) On peut aussi introduire une nouvelle variable

$$v(x,y) := u(x,y) - (a + bx + cy + dxy)$$

et remarquer qu'on a $\Delta v = \Delta u$ pour tous a, b, c, d. Trouver a, b, c et d tels qu'on puisse résoudre en v un système équivalent à (1) avec une seule condition de bord non homogène qui satisfait la condition de compatibilité avec des conditions de bord homogènes au coin du domaine.

5. *(Optionnel, pas dans l'examen) Sur la méthode de séparation des variables pour l'équation de la chaleur non-stationnaire dans* $\mathbb{R}^2$.
   Trouver une fonction $u : [0,\pi] \times [0,2\pi] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \partial_t u(x,y,t) = \Delta u(x,y,t) & \text{pour } 0 < x < \pi, 0 < y < 2\pi \text{ et } t > 0, \\ \partial_x u(0,y,t) = \partial_x u(\pi,y,t) = 0 & \text{pour } 0 < y < 2\pi \text{ et } t > 0, \\ \partial_y u(x,0,t) = \partial_y u(x,2\pi,t) = 0 & \text{pour } 0 < x < \pi \text{ et } t > 0, \\ u(x,y,0) = \cos x \cos 2y - 2\cos 3x \cos \frac{y}{2} & \text{pour } 0 < x < \pi \text{ et } 0 < y < 2\pi \end{cases}$$