ANALYSE III **Série 14** 23 Décembre 2016

Cette série ne fait pas partie de la matière d'examen.

On sait comment intégrer sur un sous-ensemble paramétrisé de $\mathbb{R}^n$ en utilisant la matrice Gramienne.

Avec cette définition de volume, le volume d'un (hyper-)cube d'arrêtes unitaire de $\mathbb{R}^n$ est $1^n = 1\ \forall n$; et le volume d'une des (hyper-)faces de ce cube unitaire est $1^{(n-1)} = 1$, ce qui implique que le volume total de la 'surface' de ce cube (i.e. la somme du volume de toutes ses (hyper-)faces) est $2n \times 1^{(n-1)} = 2n$. En prenant la limite $n \to \infty$, on obtient que le volume du cube reste constant, tandis que la surface totale $2n \to \infty$.

Le but des exercices suivants est de faire une réflexion analogue pour la sphère de rayon R de $\mathbb{R}^n$.

1. Soit $R > 0$ le rayon (scalaire) d'une sphère. Vérifier, en utilisant des intégrales de volumes, que les puissances de R sont justes.

Dimension	"Surface S_N"	"Volume V_N"
$N=1$	2	$2R$
$N=2$	$2\pi R$	πR^2
$N=3$	$4\pi R^2$	$\frac{4}{3}\pi R^3$
$N=4$		
	$\vdots$	
N	$a_N R^{N-1}$	$b_N R^N$

2. Montrer que a_N etb_N défini en 1 ont la propriété que $a_N = N b_N$.
3. Montrer que
$$\frac{b_N}{b_{N+2}} = \frac{(N+2)b_{N-1}}{(N+1)b_{N+1}}$$
4. Esquisser le graphe du volume V_N et de la surface S_N d'une sphère unité en fonction de la dimension N.

Bonnes fêtes !