Analyse I pour Ingénieurs et Scientifiques

Joachim STUBBE

09 septembre 2012

Résumé

Dans ce premier semestre nous allons réviser et approfondir la théorie et la pratique du calcul différentiel et du calcul intégral. Après un bref discours sur les propriétés des nombres et d'avoir se familiarisé avec les techniques élémentaires des démonstrations mathématiques nous présentons le concept central du cours et d'analyse qui représente un traitement de l'infini : le processus de limite et la notion de convergence. Un fil rouge de l'analyse est de chercher ensuite des conditions qui nous permettent de permuter d'autres oprations avec le processus de limite par la raison de faciliter le calcul avec ce concept. Les règles de calcul pour les limites des suites (ainsi que pour les fonctions) nous montrent que nous pouvons permuter les opérations algébriques avec le processus de limite. Ce résultat n'est pas du tout évident comme nous allons voir en cas des séries : dans une somme d'un nombre infini d'éléments nous ne pouvons plus appliquer la commutativité de l'addition sans prcaution. Il nous faut en effet, une notion plus forte de convergence, celle d'une série absolument convergente. En suivant le fil rouge nous introduisons la notion d'une fonction continue qui signifie que pour une telle fonction nous pouvons permuter le processus de limite avec l'application de la fonction. La notion d'une dérivée nous permet d'exprimer " la pente d'une fonction " et en particulier la définition de la vitesse à un instant donné pour un mouvement non uniforme, un concept formulé déjà par Isaac Newton (1643 - 1727) dans sa présentation de la mécanique analytique. Avec la notion de la dérivée nous ouvrons la porte l'étude des fonctions et en particulier au problème d'approximation locale d'une fonction par un polynôme et sa représentation par une série entière qui nous permet de permuter les processus de limite de la série avec celui de la dérivée. L'intégration est l'opération réciproque de la dérivée et liés géométriquement au calcul des aires. En mécanique l'intégration nous permet de déterminer la trajectoire d'une particule à partir sa vitesse donnée ou mathématiquement de résoudre des équations différentielles que nous allons étudier en deuxième semestre.

Table des matières

Chapitre 1

Notions de base : Nombres, Structures et Fonctions

Dans ce chapitre nous passons en revue les propriétés élémentaires des ensembles des nombres naturels, entiers, rationnels, réels et complexes avec lesquels nous travaillerons en analyse et en sciences.

Notions à apprendre. Ensembles et opérations booléennes, relations et fonctions, fonction indicatrice, relation d'équivalence et ensemble quotient, les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, axiomes, suprémum, infimum, ensembles ouverts et fermés, l'intrieur, le bord et l'adhérence d'un ensemble, valeur absolue, fonction réelle, $\mathbb{C}$, formule d'Euler, formule de Moivre.

Compétences à acquérir. Maîtriser le calcul avec des fonctions élémentaires, faire une démonstration par récurrence ou par l'absurde, déduire des relations simples à partir des axiomes, savoir appliquer les notions ci-dessus aux exemples, calculer avec le symbole d'une somme ou d'un produit fini, comprendre la signification de la valeur absolue dans $\mathbb{R}$ (resp. du module dans $\mathbb{C}$), calculer les racines d'un nombre complexe, résoudre une équation de degré 2 à coefficients complexes, résoudre une équation de degré 3 à l'aide de la formule de Cardan et sa généralisation, comprendre l'interprétation géométrique des opérations algebriques et des applications linéaires dans $\mathbb{C}$.

1.1 Ensembles et Fonctions

1.1.1 Ensembles et sous-ensembles

Un *ensemble* E est une collection d'objets appelés éléments. Si a est un élément de E on dit que a appartient à E ou que E contient a, et on note $a \in E$. Si a n'est pas un élément de E on note $a \notin E$. Si les éléments $a, b, \ldots$ forment l'ensemble E on note $E = \{a, b, \ldots\}$. Un ensemble E peut avoir un nombre fini ou infini d'éléments. L'ensemble *vide*, noté $\{\ \}$ ou $\emptyset$, n'a aucun élément. L'ensemble E est un *sous-ensemble* (on dit aussi *partie*) de l'ensemble F si chaque élément de E est un élément de F. On note $E \subset F$. Si $E \subset F$ et $F \subset E$, E et F contiennent les mêmes éléments. On note $E = F$. On a toujours $\emptyset \subset E$. A partir d'un ensemble E et ses sous-ensembles on peut définir un ensemble $\mathcal{P}(E)$ contenant l'ensemble E et ses sous-ensembles. On appelle $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Exemple. Noter que $\{a, b\} = \{b, a\}$ mais $\{a, b\} \neq \{\{a\}, \{b\}\}$. Si $E = \{a, b\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

1.1.2 Opérations booléennes

Si E et F sont des ensembles, on définit la *réunion* de E et de F comme l'ensemble des éléments appartenant à E ou à F :

$$E \cup F = \{x : x \in E \text{ ou } x \in F\}$$

On définit *l'intersection* de E et de F comme l'ensemble des éléments qui appartiennent à E et à F :

$$E \cap F = \{x : x \in E \text{ et } x \in F\}$$

Si E est un sous-ensemble de F on définit le *complémentaire* de E dans F comme l'ensemble des éléments de F qui ne sont pas des éléments de E :

$$E^c = F \setminus E = \{x : x \in F \text{ et } x \notin E\}$$

Plus généralement, si S est un ensemble et $E, F \subset S$ on définit la différence de E et F par :

$$F \setminus E = \{x : x \in F \text{ et } x \notin E\} = F \cap E^c$$

où E^c désigne le complémentaire de E dans S : $E^c = S \setminus E$.

Tableau : Propriétés des opérations booléennes

Commutativité	$E \cap F = F \cap E$	$E \cup F = F \cup E$
Associativité	$D \cap (E \cap F) = (D \cap E) \cap F$	$D \cup (E \cup F) = (D \cup E) \cup F$
Distributivité	$D \cap (E \cup F) = (D \cap E) \cup (D \cap F)$	
	$D \cup (E \cap F) = (D \cup E) \cap (D \cup F)$	
Lois de de Morgan	$(E \cap F)^c = E^c \cup F^c$	$(E \cup F)^c = E^c \cap F^c$

1.1.3 Une première caractérisation d'ensembles des nombres

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des *entiers naturels* ou *nombres naturels*

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\},$$

(où ":=" signifie "*est défini par*"), $\mathbb{Z}$ l'ensemble des *entiers*

$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\},$$

$\mathbb{Q}$ le corps des *nombres rationnels*

$$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$$

et $\mathbb{R}$ le corps des *nombres réels* (voir 1.2 pour les propriétés d'un corps). On a les inclusions suivantes :

$$\emptyset \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Pour donner une caractérisation simple de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R}$ nous passons par le développement décimal :

Proposition 1.1.1. *Un nombre réel est rationnel si et seulement si son développement décimal dévient périodique.*

Ici on applique la convention que, par exemple, $0.25 = 0.25\overline{0}$.

Démonstration. Exercice. □

Exemple.

$\frac{41}{70} = 0.5\overline{857142}, \quad 0.5\overline{857142} = \frac{5}{10} + \frac{857142}{9999990} = \frac{41}{70},$
$\frac{1}{17} = 0.\overline{0588235294117647}, \quad 0.\overline{0588235294117647} = \frac{588235294117647}{9'999'999'999'999'999} = \frac{1}{17},$
$\pi = 3.14159265358979323846264 3\ldots,$
$e = 2.71828182845904523536028 7\ldots$

On note également $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, \ldots\}$ (ou $\mathbb{N}^*$) l'ensemble des *entiers (strictement) positifs*. Evidemment

$$\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{N}, \quad \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} = \mathbb{N}.$$

Le complémentaire de $\mathbb{Z}_+$ dans $\mathbb{N}$ est $\{0\}$.

1.1.4 Ensemble produit cartésien.

Soient E, F deux ensembles. On définit le *produit cartésien* de E et de F comme l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$:

$$E \times F = \{(x, y) : x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

De même on définit le produit cartésien des n ensembles $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$:

$$E_1 \times \ldots \times E_n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n\}.$$

Si $E_i = E$ pour tout i on note E^n le produit cartésien des E_i.

Attention : Noter que couple et paire sont des notions différentes et donc $E \times F \neq F \times E$.

Relations, Relation d'équivalence. Nous pouvons interpréter tout sous-ensemble de $E \times F$ comme une correspondance ou une relation entre les éléments de E et de F. En particulier, si $E = F$ tout sous-ensemble $R \subset E \times E$ est appelé une relation dans E. Les signes "$=$" ou "$\leq$" sont des exemples de relations dans les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ (voir 1.2). On a besoin des relations d'équivalence pour définir les ensembles $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ (voir 1.4 et 1.5). $R \subset E \times E$ est une relation d'équivalence, notée $x \sim y$ pour $(x, y) \in R$ si elle a les propriétés suivantes :

1. $x \sim x$ pour tout $x \in E$ (reflexivité),
2. $x \sim y$ implique $y \sim x$ (symétrie),
3. $x \sim y$ et $y \sim z$ impliquent $x \sim z$ (transitivité).

L'ensemble $[\![x]\!] := \{y \in E : y \sim x\}$ est appelé une classe d'équivalence et $x \in [\![x]\!]$ est appelé un représentant de la classe d'équivalence $[\![x]\!]$. On a $[\![x]\!] = [\![y]\!]$ si $x \sim y$. L'ensemble quotient, noté $E/\sim$ est l'ensemble de classes d'équivalence.

1.1.5 Fonctions

Application ou fonction. Une correspondance, qui à tout élément $x \in E$ associe un élément $y \in F$ est appelée une *application* ou encore une *fonction* de E dans F et on la note par $f : E \to F$. Pour indiquer que $f(x)$ est l'élément de F associé à x, on utilise la notation $x \mapsto f(x)$. On dit que $f(x)$ est la *valeur* de f au point x ou *l'image* de x sous f. On appelle E son *domaine de définition*[1] et F son *ensemble d'arrivée.* Le sous-ensemble de F donné par $f[E] = \{f(x) : x \in E\}$ est appelé *l'image* de f. Le sous-ensemble de F donné par

$$\begin{aligned} f[E] &= \{y \in F : \text{ il existe } x \in E \text{ tel que } f(x) = y\} \\ &= \{f(x) : x \in E\} \end{aligned}$$

est appelé *l'image* de E par f ou *l'ensemble des images* et on le note par $f[E]$ ou $\mathrm{Im}(f)$. Finalement, le graphe d'une application, noté $\mathcal{G}_f$ est le sous-ensemble de $E \times F$ donné par

$$\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)) : x \in E\}.$$

En général il est représenté dans un système de coordonnés. Par exemple, pour une fonction réelle (i.e. $E, F \subset \mathbb{R}$) le graphe est représenté par sa courbe dans le plan muni des coordonnées cartésiennes. On introduit encore les notions suivantes :

Fonction surjective. Une fonction $f : E \to F$ est dite *surjective* si $f[E] = F$ ou, autrement dit, si tout $y \in F$ est l'image par f d'au moins un élément $x \in E$.

Fonction injective. Une fonction $f : E \to F$ est dite *injective* si $x_1 \neq x_2$ implique $f(x_1) \neq f(x_2)$ pour tout $x_1, x_2 \in E$. Autrement dit, tout $y \in f[E]$ est l'image par f d'un seul élément $x \in E$.

Fonction bijective. Une fonction $f : E \to F$ est dite *bijective* si elle est à la fois surjective et injective.

1. Souvent on note $f : E \to F$ pour une fonction même si son domaine de défintion D_f est plus petit que E si, par exemple, on veut décrire des propriétés générales d'une classe de fonctions qui ne dépendent pas du domaine de définition D_f. Avec cette convention on dit que $f : E \to F$ est une application si et seulement si $D_f = E$.

Fonction identique (ou identité). La fonction $\mathrm{Id}_E : E \to E$ définie par $\mathrm{Id}_E(x) = x$ est appelée la *fonction identique* ou *fonction identité* sur D. La fonction identité est bijective.

Fonction constante. Une fonction $f : E \to F$ est dite *constante* si $f(x_1) = f(x_2)$ pour tout $(x_1, x_2) \in E \times E$.

Composition de fonctions. Soient $f : E \to F$ et $g : A \to B$ deux fonctions telles que $f[E] \subset A$. Alors, la fonction $g \circ f : E \to B$, définie par $g(f(x))$ est appelée la fonction composée de g et f. La loi de composition est associative : Soit $h : B' \to C$ une fonction telle que $g[A] \subset B'$. Alors

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

car pour tout $x \in E$

$$\big(h \circ (g \circ f)\big)(x) = h\big((g \circ f)(x)\big) = h\big(g(f(x))\big) = (h \circ g)\big(f(x)\big) = \big((h \circ g) \circ f\big)(x)$$

Fonction réciproque. Lorsque $f : E \to F$ est bijective on peut définir une fonction $f^{-1} : F \to E$, qui, à tout $y \in F$ associe l'élément x de E donné par la solution unique de l'équation $y = f(x)$. f^{-1} est appelé la *fonction réciproque* de f. La fonction f^{-1} est bijective et $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$, $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$.

Tableau : Propriétés de $\mathbf{f : E \to F}$ et l'équation $\mathbf{y = f(x), y \in F}$

$f : E \to F$ surjective		admet au moins une solution $x \in E$
$f : E \to F$ injective	$y = f(x)$	admet au plus une solution $x \in E$
$f : E \to F$ bijective		admet exactement une solution $x \in E$

Restriction d'une fonction. Soit D un sous-ensemble de E et $g : D \to F$ une fonction telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in D$. On appelle g *restriction* de f et on la note $f|_D$ (dire : f restreinte à D).

Prolongement d'une fonction. Soit $E \subset D$. Une fonction $gD \to T$ est appelée *prolongement* de f si f est une restriction de g, i.e. $g|_E = f$.

Fonction indicatrice. Soit $E \subset R$. La fonction indicatrice de E, notée χ_A est définie par

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E, \\ 0 & \text{si } x \in R \setminus E. \end{cases}$$

Si E, F sont des sous-ensembles d'un ensemble R, alors

$$\chi_E(x) \cdot \chi_F(x) = \chi_{E\cap F}(x)$$

et

$$\chi_E(x) + \chi_F(x) = \chi_{E\cup F}(x) + \chi_{E\cap F}(x).$$

En probabilité cette rélation est appelée le principe d'exclusion-inclusion. Si $E \subset S, F \subset T$, alors $E \times F \subset S \times T$ et

$$\chi_{E\times F}(x,y) = \chi_E(x)\chi_F(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \text{ et } y \in F, \\ 0 & \text{si } (x,y) \in S \times T \setminus E \times F. \end{cases}$$

Exemple - Le cardinal. Soit E un ensemble ayant un nombre fini d'éléments. Alors, on appelle ce nombre le cardinal de E noté $card(E)$. Dans ce cas on peut définir le cardinal pour tout sous-ensemble de E : $card : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{N}$. Noter que $card(\emptyset) = 0$.

Exemple - addition et multiplication. Les opérations algébriques $+, \cdot$ peuvent être vues comme des applications. Par exemple, l'addition des entiers est une application de $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dans $F = \mathbb{Z}$ donnée par $f((n,m)) = n + m$.

1.2 Structures algébriques et structures d'ordre

Dans la suite, nous donnons les règles habituelles de calcul sous forme d'une liste d'axiomes.

Axiomes algébriques - propriétés d'un corps. Soient $x, y, z \in \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$.

1. $x + (y + z) = (x + y) + z$ et $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
2. $x + y = y + x$ et $x \cdot y = y \cdot x$.
3. Il existe un élément noté 0 tel que pour tout x : $0 + x = x$.
4. Pour chaque x il existe un élément noté $-x$ tel que $x + (-x) = 0$
5. Il existe un élément $1 \neq 0$ tel que pour tout x : $1 \cdot x = x$.
6. Pour chaque $x \neq 0$ il existe un élément noté x^{-1} tel que $x \cdot x^{-1} = 1$.
7. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$. L'ensemble $\mathbb{N}$ ne satisfait pas les axiomes 4 et 6, l'ensemble $\mathbb{Z}$ ne satisfait pas l' axiome 6.

Axiomes d'ordre. Soient $x, y, z \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$.

1. $x \leq y$ et $y \leq z$ impliquent $x \leq z$.
2. $x \leq y$ et $y \leq x$ impliquent $x = y$.
3. Pour tout couple x, y on a soit $x < y$, soit $x = y$, soit $x > y$.
4. Si $x \leq y$, alors pour tout z : $x + z \leq y + z$.
5. Si $0 \leq x$ et si $0 \leq y$, alors $0 \leq xy$.

Proposition. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont des corps ordonnés.

Remarque. Nous rappelons la définition des signes $<$ et $>$ à partir de $\leq$:

$$\begin{array}{lllll} x < y & \text{si} & x \leq y & \text{et} & x \neq y, \\ x > y & \text{si} & y \leq x & \text{et} & x \neq y. \end{array}$$

On note $x \geq y$ si $y \leq x$.

1.3 Nombres naturels et principe d'induction

Ensemble des nombres naturels. On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des *entiers naturels* ou *nombres naturels* :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

Sur l'ensemble des nombres naturels il y a une structure algébrique donnée par les opérations d'addition, notée "+", et de multiplication, notée "$\cdot$". De plus l'ensemble des nombres naturels est ordonné. Il faut cependant une propriété supplémentaire pour caractériser l'ensemble $\mathbb{N}$.

Propriété du bon ordre. Tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément.

Cette propriété implique le

Théorème 1.1. ***- Principe d'induction ou de récurrence.*** *Soit $R(n)$ une relation dépendant d'un entier positif telle que :*

- ◇ *Relation $R(1)$ est vraie.*
- ◇ *$R(n)$ implique $R(n+1)$.*

Alors, $R(n)$ est vrai pour tout entier positif.

Avant de donner quelques exemples du principe d'induction, nous rappelons quelques propriétés de la somme et du produit.

1.3.1 Somme et produit

Définition. Soient $m \leq n$ deux nombres naturels (ou entiers). Pour tout entier k tel que $m \leq k \leq n$ soit a_k un nombre réel. On définit :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$$

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n = a_m a_{m+1} \ldots a_n.$$

Si $m = n$, alors la somme (le produit) ne contient que le nombre a_n. Pour $n = m - 1$ on définit :

$$\sum_{k=m}^{m-1} a_k := 0 \quad \text{(somme vide)}$$

$$\prod_{k=m}^{m-1} a_k := 1 \quad \text{(produit vide)}$$

Quelques règles de calcul. Si $l-1 \leq m \leq n$, alors :

$$\sum_{k=l}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k = \sum_{k=l}^{n} a_k$$

$$\left(\prod_{k=l}^{m} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=m+1}^{n} a_k\right) = \prod_{k=l}^{n} a_k.$$

Pour tout entier k tel que $m \leq k \leq n$ soient a_k, b_k des nombres réels.

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k$$

$$\prod_{k=m}^{n} a_k b_k = \prod_{k=m}^{n} a_k \cdot \prod_{k=m}^{n} b_k.$$

De plus, soit λ un nombre (réel, complexe). Alors

$$\sum_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k$$

$$\prod_{k=m}^{n} (\lambda a_k) = \prod_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda^{n-m+1} \prod_{k=m}^{n} a_k.$$

Changement d'indices.

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m-l}^{n-l} a_{j+l}$$

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = \prod_{j=m-l}^{n-l} a_{j+l}$$

Une technique utile est de changer l'ordre des a_k dans une somme ou dans un produit : soit σ une permutation de $\{1, \ldots, n\}$, i.e. σ est une application de $E = \{1, \ldots, n\}$ dans E telle que $\sigma(j) \neq \sigma(k)$ pour tout $j \neq k$. Plus précisément, σ est bijective. Alors,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}$$

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}.$$

En particulier, les inversions $a_1 + \ldots + a_n = a_n + \ldots + a_1$, respectivement $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = a_n \cdot \ldots \cdot a_1$, donnent

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{n+1-k}$$

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{n} a_{n+1-k}.$$

Exemple - Une application de l'inversion. L'inversion de l'ordre nous permet de calculer aisément la somme des n premiers entiers naturels :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(n+1-k) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k+n+1-k) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Produit de deux sommes. Pour j, k tel que $m \leq j, k \leq n$:

$$\sum_{j=m}^{n}\sum_{k=m}^{n} a_j b_k = \left(\sum_{j=m}^{n} a_j\right)\left(\sum_{k=m}^{n} b_k\right) = \sum_{j=m}^{n} a_j \sum_{k=m}^{n} b_k.$$

1.3.2 Exemple - une formule du binôme

Problème. Montrez que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et tout entier positif n :

$$a^n - b^n = (a-b) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k. \tag{1.1}$$

Solution. Appelons cette relation $R(n)$. Pour $n = 1$ nous avons $a^n - b^n = a - b$ et

$$(a-b) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k = (a-b) \cdot \sum_{k=0}^{0} a^{1-k-1} b^k = (a-b) \cdot a^0 b^0 = a - b.$$

Par conséquent, $R(1)$ est vraie. Pour démontrer que $R(n)$ implique $R(n+1)$ nous écrivons $a^{n+1} - b^{n+1}$ comme suit :

$$a^{n+1} - b^{n+1} = a^{n+1} - ab^n + ab^n - b^{n+1} = a(a^n - b^n) + (a-b)b^n.$$

Nous utilisons ensuite la relation $R(n)$. Donc

$$\begin{aligned} a^{n+1} - b^{n+1} &= a \cdot (a-b) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k + (a-b)b^n \\ &= (a-b) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^{n+1-k-1} b^k + (a-b)b^n. \end{aligned}$$

Notons que $b^n = \sum_{k=n}^{n} a^{n+1-k-1} b^k$. Nous obtenons la relation $R(n+1)$:

$$\begin{aligned} a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \cdot \big(&\sum_{k=0}^{n-1} a^{n+1-k-1} b^k + \sum_{k=n}^{n} a^{n+1-k-1} b^k\big) \\ &= (a-b) \cdot \sum_{k=0}^{n+1-1} a^{n+1-k-1} b^k. \end{aligned}$$

1.3.3 Exemple - trouver la formule pour une somme

Problème. Trouver une formule pour la somme

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \quad , \; n \in \mathbb{Z}_+.$$

Solution. Le problème est plus difficile que 1.3.2 puisque d'abord il faut trouver la bonne formule pour S_n. Comment peut-on la trouver ? Une méthode est de calculer les premiers S_n pour éventuellement en déduire la formule générale (ou au moins un bon candidat). Alors :

$$\begin{array}{ll} n=1: & S_1 = \frac{1}{2} \\ n=2: & S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \\ n=3: & S_3 = S_2 + \frac{1}{12} = \frac{3}{4} \\ n=4: & S_4 = S_3 + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}. \end{array}$$

On voit que les résultats sont de la forme $\frac{n}{n+1}$. Notre conjecture est alors :

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \quad , \; n \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.2}$$

Évidemment c'est vrai pour S_1. Supposons que $S_n = \frac{n}{n+1}$. Alors

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Solution 2. Alternativement, nous trouvons une formule pour S_n comme suit : notons que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Donc formellement

$$\begin{aligned} S_n &:= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) \\ &= (1 \underbrace{-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}}_{} - \frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{n-1} \underbrace{-\frac{1}{n}) + (\frac{1}{n}}_{} - \frac{1}{n+1}) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

Ce calcul nous propose une autre démonstration de la formule en appliquant nos conventions sur les sommes finies. En fait, pour tout entier n positif :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} \qquad \text{par le changement } j = k+1 \\ &= \left(1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\right) - \left(\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

1.3.4 Nombres premiers

On dit qu'un nombre naturel p est premier si $p \geq 2$ et qu'il n'est divisible que par 1 et par lui-même. Tout entier positif n s'écrit de manière unique comme produit de nombres premiers (démonstration par récurrence, exercice) :

$$n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{k_i}, \quad p_1 < p_2 < \ldots < p_m, \quad k_i \in \mathbb{N}^*. \tag{1.3}$$

Il existe une infinité de nombres premiers (démonstration par l'absurde, exercice). Pour $a, b \in \mathbb{N}^*$ on peut appliquer (1.3) pour trouver le plus grand commun diviseur de a et b, noté $\mathrm{pgcd}(a, b)$, et le plus petit commun multiple de a et b, noté $\mathrm{ppcm}(a, b)$ (voir "Savoir faire en mathématique", Y.Biollay, A. Chaabouni, J.St.)

1.4 Nombres entiers

L'équation $x + m = n$, $m, n \in \mathbb{N}$ admet une solution $x \in \mathbb{N}$ si et seulement si $m \leq n$ notée $x = n - m$. Si $m > n$ on pourra formellement définir la solution par $x = -(m - n)$. Cette définition est justifiée si on construit $\mathbb{Z}$ par des classes d'équivalence dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: on définit une relation d'équivalence par $(n_1, m_1) \sim (n_2, m_2)$ si $n_1 + m_2 = n_2 + m_1$ (i.e par des couples (n, m) à différence constante). On définit une classe d'équivalence par

$$[\![(n, m)]\!] := \{(n_1, m_1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (n_1, m_1) \sim (n, m)\}$$

En particulier, $[\![(n, m)]\!] = [\![(n - m, 0)]\!]$ si $m \leq n$ et $[\![(n, m)]\!] = [\![(0, m - n)]\!]$ si $m > n$. L'ensemble quotient $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$ est l'ensemble de classes d'équivalence $[\![(n, m)]\!]$ et on définit

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim . \tag{1.4}$$

Sur cet ensemble quotient on définit l'addition et la multiplication comme suit :

$$\begin{aligned} &[\![(n, m)]\!] + [\![(n', m')]\!] = [\![(n + n', m + m')]\!], \\ &[\![(n, m)]\!] \cdot [\![(n', m')]\!] = [\![(nn' + mm', nm' + mn')]\!]. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Ensuite on identifie (une telle identification est appelée un homéomorphisme puisque les structures de l'addition et de la multiplication sont préservées) les classes $[\![(n, 0)]\!]$ avec n et $[\![(0, n)]\!]$ avec $-n$.

L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable, c'est-à-dire il existe une application bijective $i : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, par exemple $i(0) = 0$, $i(1) = 1$, $i(2) = -1$, $i(3) = 2, \ldots$.

1.5 Les corps ordonnés $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

Nous avons vu que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont des corps ordonnés, i.e. ils satisfont les mêmes axiomes algébriques et d'ordre. En introduisant une nouvelle notion - celle du supremum et de l'infimum d'un ensemble - nous allons montrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas complet et que $\mathbb{R}$ a cette propriété supplémentaire : la propriété d'être complet (voir 1.5.3).

1.5.1 Propriétés des nombres rationnels

On définit $\mathbb{Q}$ par une relation d'équivalence dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$: $(p, q) \sim (p', q')$ si $pq' = p'q$ (i.e par des couples (p, q) à quotient constant). Le représentant priviligié de la classe d'équivalence (donc d'un nombre rationnel) est (p, q) avec $\mathrm{pgcd}(p, q) = 1$ pour $p, q > 0$. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Notons que l'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans le sens suivant : entre deux nombres rationnels $a < b$ il y a toujours un autre nombre rationnel, par exemple la moyenne arithmétique $\frac{a+b}{2}$, et, par conséquent, il y a un nombre infini de nombres rationnels entre $a < b$. $\mathbb{Q}$ satisfait également la propriété suivante :

Axiome d'Archimède. Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ satisfaisant $x > 0$ et $y \geq 0$ il existe un entier positif n tel que $nx > y$.

Pour illustrer le fait que $\mathbb{Q}$ n'est pas complet nous rappelons que l'équation $x^2 = 2$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Q}$.

Proposition 1.5.1. *Il n'y a pas de $x \in \mathbb{Q}$ qui satisfait $x^2 = 2$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $x = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}_+$ tel que $x^2 = 2$. On peut également supposer que p et q n'ont pas de diviseur commun, c'est-à-dire, que leur plus grand commun diviseur est 1 : $\mathrm{pgcd}(p, q) = 1$. On a

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \quad \text{i.e.} \quad p^2 = 2q^2$$

et par conséquent p^2 est pair. Donc p est pair et il existe un entier p' tel que $p = 2p'$ (puisque le carré d'un entier impair est impair ; en effet $(2n + 1)^2 = 2(2n^2 + n) + 1$ est impair). Alors

$$p^2 = 4p'^2 = 2q^2 \quad \text{i.e.} \quad 2p'^2 = q^2$$

Donc q doit être pair. C'est une contradiction avec notre hypothèse que p et q n'ont pas de diviseur commun. Il n'existe donc pas de nombre rationnel x tel que $x^2 = 2$. $\square$

1.5.2 Sous-ensembles de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R}$

Pour décrire la propriété supplémentaire de $\mathbb{R}$ il nous faut un langage approprié concernant des sous-ensembles d'un ensemble ordonné. Dans la suite soit $A \neq \emptyset$ un sous-ensemble de l'ensemble ordonné $S = \mathbb{Q}$ ou $S = \mathbb{R}$.

Minorant. A est dit *minoré* s'il existe $a \in S$ tel que pour tout $x \in A$ on a $x \geq a$. Le nombre a est appelé *minorant* de A.

Majorant. A est dit *majoré* s'il existe $b \in S$ tel que pour tout $x \in A$ on a $x \leq b$. Le nombre b est appelé *majorant* de A.

Remarque. Si A admet un minorant (majorant) il en admet plusieurs.

Sous-ensemble borné. A est dit *borné*, s'il est à la fois minoré et majoré.

Exemple. Considérons l'ensemble $A = \{x : 0 \leq x^2 < 2, x \in \mathbb{Q}\}$. L'ensemble A est borné. Un minorant est $a = -2$ et un majorant est $b = 2$ puisque $(-2)^2 = 2^2 = 4 > 2$. Un autre couple (minorant, majorant) est $(a = -\frac{3}{2}, b = \frac{3}{2})$ puisque $\frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$. Notre argument est justifié grâce aux inégalités suivantes :

$$\text{si } x, y > 0 : \ x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2 \text{ et si } x, y < 0 : \ x < y \Leftrightarrow x^2 > y^2.$$

En effet, noter simplement que $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$.

Infimum. Un minorant $a \in S$ est dit *infimum* ou *borne inférieure* de A, noté $a = \inf A$, si a est le plus grand minorant, c'est-à-dire, si tout minorant a' de A satisfait $a' \leq a$. Si A n'est pas minoré on pose $\inf A = -\infty$.

Remarque. Si l'infimum existe, il est unique (donc notre notation est justifiée). En effet, supposons qu'il existe deux plus grands minorants a_1 et a_2. On a $a_1 \leq a_2$ car a_2 est le plus grand minorant mais aussi $a_2 \leq a_1$, donc $a_1 = a_2$.

Supremum. Un majorant $b \in S$ est dit *supremum* ou *borne supérieure* de A, noté $b = \sup A$, si b est le plus petit majorant, cest-à-dire, si tout majorant b' de A satisfait $b' \geq b$. Si A n'est pas majoré on pose $\sup A = +\infty$.

Remarque. Si le supremum existe, il est unique.

Minimum. Un minorant $a \in S$ est dit *minimum* de A, noté $a = \min A$, si $a = \inf A$ et $a \in A$.

Maximum. Un majorant $b \in S$ est dit *maximum* de A, noté $b = \max A$, si $b = \sup A$ et $b \in A$.

Nous allons montrer que l'ensemble $A = \{x : 0 \leq x^2 < 2, \ x \in \mathbb{Q}\}$ n'a pas de supremum (ni d'infimum) dans $S = \mathbb{Q}$. Autrement dit, il n'y a pas un $b \in \mathbb{Q}$ tel que $b = \sup\{x : 0 \leq x^2 < 2, \ x \in \mathbb{Q}\}$. La démonstration se fera par un *raisonnement par l'absurde.*

Proposition 1.5.2. *L'ensemble $A = \{x : 0 \leq x^2 < 2, \ x \in \mathbb{Q}\}$ n'a pas de supremum ni d'infimum dans $S = \mathbb{Q}$.*

Démonstration. Nous donnons seulement la démonstration pour le supremum. Supposons alors que $b = \sup A \in \mathbb{Q}$. Évidemment $b > 0$. On a soit $b^2 < 2$, soit $b^2 = 2$, soit $b^2 > 2$. Le cas $b^2 = 2$ est exclu par la proposition 1.5.1.
Si $b^2 > 2$, alors $b > 2/b$. Raisonnons par l'absurde. Le but est de construire un majorant $x \in \mathbb{Q}$ tel que $x < b$. Posons $x = \frac{1}{2}(b + \frac{2}{b})$, la moyenne arithmétique de b et $2/b$. Évidemment on a $x \in \mathbb{Q}$. De plus, $x < b$ car $2/b < b$, ou par un calcul explicite

$$x - b = \frac{1}{2}\big(\frac{2}{b} - b\big) = \frac{1}{2b}(2 - b^2) < 0.$$

Nous montrons que $x^2 > 2$. En effet

$$\begin{aligned} x^2 - 2 &= \frac{1}{4}\big(\frac{2}{b} + b\big)^2 - 2 \\ &= \frac{1}{4}\big(\frac{4}{b^2} + 4 + b^2\big) - 2 \\ &= \frac{1}{4}\big(\frac{4}{b^2} - 4 + b^2\big) \\ &= \frac{1}{4}\big(\frac{2}{b} - b\big)^2 \\ &= (x-b)^2 > 0. \end{aligned}$$

Nous avons donc trouvé un majorant $x < b = \sup A$, en contradiction avec la définition du supremum. Le cas $b^2 > 2$ est alors impossible.
Si $b^2 < 2$, alors $b < 2/b$. Nous allons construire un nombre $y \in \mathbb{Q}$ tel que $y > b$ et $y^2 < 2$. Posons $x = \frac{1}{2}(b + \frac{2}{b})$ et $y = \frac{2}{x}$. Évidemment on a $y \in \mathbb{Q}$. Le nombre y satisfait $y > b$ car $x < 2/b$:

$$y - b = \frac{2}{x} - b = \frac{1}{x}(2 - bx) = \frac{1}{2x}(2 - b^2) > 0.$$

De plus, $y^2 < 2$, i.e. $y \in A$ puisque

$$y^2 - 2 = \frac{2}{x^2}(2 - x^2) = -\frac{2}{x^2}(x-b)^2 < 0.$$

Par conséquent, on a trouvé $y \in A$ avec $y > b = \sup A$, en contradiction avec la définition du supremum.

□

1.5.3 Propriétés des nombres réels

Axiome. L'ensemble $\mathbb{R}$ est complet, i.e. tout sous-ensemble $A \neq \emptyset$ majoré admet un supremum.

Remarque. Cet axiome implique que tout sous-ensemble des réels $A \neq \emptyset$ minoré admet un infimum puisque

$$\inf A = -\sup\{-x : x \in A\}$$

L'axiome implique que l'équation $x^2 = 2$ admet des solutions dans $\mathbb{R}$.

Proposition 1.5.3. *L'équation $x^2 = 2$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, notées $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.*

Démonstration. Nous prouvons seulement l'existence de la solution positive $\sqrt{2}$. Considérons l'ensemble $A = \{x : 0 \leq x^2 < 2, x \in \mathbb{R}\}$. L'ensemble A est borné, donc il existe $b = \sup A \in \mathbb{R}$ et $b > 0$. Comme dans la proposition 1.5.2, nous pouvons exclure les cas $b^2 > 2$ et $b^2 < 2$. Donc $b^2 = 2$. □

Par conséquent, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ et les éléments dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, le complémentaire de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ sont les nombres *irrationnels.* L'ensemble $\mathbb{R}$ est archimédien, i.e. il satisfait comme $\mathbb{Q}$ l'axiome d'Archimède.

Axiome d'Archimède. Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ satisfaisant $x > 0$ et $y \geq 0$ il existe un entier positif n tel que $nx > y$.

Remarque. L'axiome d'Archimède implique que si a est un nombre réel tel que $0 \leq a < \frac{1}{n}$ pour tout entier positif n, alors $a = 0$.

Partie entière. Par conséquent, à tout nombre réel x, on peut associer un unique entier $[x]$, appelé la *partie entière* de x, tel que

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

Proposition 1.5.4. *$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire, qu' deux nombres réels $a < b$ il existe toujours un nombre rationnel.*

Démonstration. Grace à l'axiome d'Archimède il existe un entier positif n tel que $n(b-a) > 1$ (prendre $x = b-a$ et $y = 1$) ; par conséquent $b > \frac{na+1}{n}$. Prenons $r := \frac{[na+1]}{n}$. Evidemment $r \in \mathbb{Q}$ et nous avons la chaîne d'inégalités suivante :

$$b > \frac{na+1}{n} \geq \frac{[na+1]}{n} = r = \frac{[na]+1}{n} > \frac{na}{n} = a.$$

□

Proposition 1.5.5. *$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.*

Démonstration. Par l'absurde. On suppose que $\mathbb{R}$ est dénombrable. Noter que $\mathbb{R}$ est dénombrable si et seulement si $]0,1[$ est dénombrable puisque l'application $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \dfrac{x - \frac{1}{2}}{x(x-1)}$ est bijective. Il existe donc une application bijective $g : \mathbb{N} \to]0,1[$ telle que $g(n) = 0, x_{n0}x_{n1}x_{n2}\ldots$, $x_{nj} \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. On définit y_n, $n \in \mathbb{N}$ par

$$y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } x_{nn} \neq 1 \\ 2 & \text{si } x_{nn} = 1. \end{cases}$$

Alors, le nombre $0, y_0y_1y_2\ldots$ n'est pas représenté d'où la contradiction. □

1.5.4 Intervalles

Intervalles bornés. Un intervalle est un sous-ensemble $A \neq \emptyset$ de $\mathbb{R}$ qui contient tous les nombres entre $\inf A$ et $\sup A$. Pour les intervalles bornés on a les quatre alternatives $\inf A, \sup A \in (\notin)\ A$. Soient $-\infty < a < b < +\infty$.

Intervalle ouvert. $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.

Intervalle fermé. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.

Intervalle semi-ouvert à gauche. $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$.

Intervalle semi-ouvert à droite. $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$.

Intervalles non bornés.

Intervalle ouvert. $]-\infty, b[=\{x \in \mathbb{R} : x < b\}$, $]b, \infty[=\{x \in \mathbb{R} : x > b\}$.

Intervalle fermé. $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$, $[b, \infty[=\{x \in \mathbb{R} : x \geq b\}$.

1.5.5 Sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

Un intervalle A est ouvert si et seulement si $\inf A \notin A$ et $\sup A \notin A$. Un intervalle ouvert a la propriété que pour chaque $x \in A$ il existe un intervalle $A' =]a', b'[$ tel que $x \in A'$ et $A' \subset A$. Cette propriété va nous servir comme caractérisation d'un sous-ensemble ouvert quelconque :

Ensembles ouverts et fermés. Un ensemble A est dit ouvert si pour tout $x \in A$ il existe un intervalle $A' =]a', b'[$ tel que $x \in A'$ et $A' \subset A$. Noter que d'après cette définition l'intervalle $]a, b[$ est ouvert. Un ensemble A est dit fermé si A est le complémentaire (dans $\mathbb{R}$) d'un ensemble ouvert. Par exemple l'intervalle fermé $[a, b]$ est le complémentaire de l'ensemble ouvert $]-\infty, a[\cup]b, \infty[$. L'ensemble $\mathbb{R}$ a la propriété d'être ouvert et fermé. Les réunions et intersections finies d'ensembles ouverts (fermés) sont ouvertes (fermées). Les réunions quelconques d'ouverts sont ouvertes.

L'intérieur et le bord d'un ensemble. Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $a \in E$. On dit que a est dans l'intérieur de E s'il existe un intervalle ouvert $]a-\epsilon, a+\epsilon[$ tel que $]a-\epsilon, a+\epsilon[\subset E$. L'ensemble des points intérieurs à E est appelé l'intérieur de E et noté $\overset{\circ}{E}$. Un point $a \in \mathbb{R}$ est appelé point frontière de E si tout intervalle ouvert $]a-\epsilon, a+\epsilon[$ contient des points de E et des points de $\mathbb{R} \setminus E$. L'ensemble des points frontières à E est appelé le bord de E et noté ∂E. Le bord d'un intervalle borné I (ouverts, fermé ou semi-ouvert) est donné par $\{\inf I, \sup I\}$, l'intérieur est $]\inf I, \sup I[$. L'axe réel est égal à son intérieur. Pour les autres intervalles non-bornés le bord consiste en un seul point ($\inf I$ ou $\sup I$).

Exemple - Ensembles finis. Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble fini, c'est-à-dire $E = \{x_0, \ldots x_N\}$, $N \in \mathbb{R}$ etsans perdre la généralité $x_0, \ldots x_N$. Alors, E est fermé puisque son complémentaire dans $\mathbb{R}$ est une réunion des intervalles ouverts :

$$\mathbb{R} \setminus E =]-\infty, x_0[\cup]x_0, x_1[\cup \ldots \cup]x_{N-1}, x_N[\cup]x_N, \infty[.$$

Noter que $E = \partial E$ et $\overset{\circ}{E} = \emptyset$.

Ensemble borné et fermé. Soit $E \subset \mathbb{R}$ borné et fermé. Alors, $\inf E \in E$ et $\sup E \in E$, c'est-à-dire $\inf E = \min E$ et $\sup E = \max E$. Autrement dit, E a un plus petit et un plus grand élément. Cette propriété nous intéresse dans l'étude des fonctions. Nous cherchons, par exemple, des critères simples pour garantir que l'image d'une fonction est bornée et fermée (voir "fonctions continues", Ch.4). Pour démontrer que $\sup E \in E$ nous supposons $\sup E \notin E$ d'où $\sup E \in E^c$. L'ensemble E^c est ouvert, donc il existe un intervalle ouvert $]a, b[$ tel que $\sup E \in]a, b[$ et $]a, b[\subset E^c$, d'où la contradiction. En fait par la définition du supremum tout intervalle $]a, b[$ contenant le nombre réel $\sup E$ doit avoir des éléments dans E. On a $E = \overset{\circ}{E} \cup \partial E$ (voir la proposition ci-dessous).

Exemple - une infinité de points. Soit $E = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$. E n'est pas ouvert puisque tout intervalle autour d'un point dans E contient également des points dans $\mathbb{R} \setminus E$. L'ensemble E n'est pas fermé puisque son complémentaire n'est pas ouvert. En fait, tout intervalle ouvert $]-\epsilon, \epsilon[$, $\epsilon > 0$ autour du point $0 \in \mathbb{R} \setminus E$ contient des points dans E. L'ensemble $\bar{E} = E \cup \{0\}$ est fermé. En fait, soit $x \in \mathbb{R} \setminus \bar{E}$. Si $x < 0$, alors $]-\infty, 0[\subset (\mathbb{R} \setminus \bar{E})$. Si $x > 1$ prendre, par exemple, l'intervalle $]1, \infty[$. Si $0 < x < 1$ il existe un unique $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}$. Prendre l'intervalle $]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$. L'intérieur de E est vide et $\partial E = E \cup \{0\}$.

L'adérence d'un ensemble. Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On dit que a est adhérent à E si pour tout intervalle $]a - r, a + r[$, $r > 0$:

$$]a - r, a + r[\cap E \neq \emptyset.$$

L'ensemble des points adhérents à E est appelé l'adhérence de E et noté $\bar{E}$.

Proposition 1.5.6. *Soit* $E \subset \mathbb{R}$.

1. $\overset{\circ}{E} \subset E \subset \bar{E}$.
2. $\bar{E} = \overset{\circ}{E} \cup \partial E$.
3. E *est ouvert si et seulement si* $E = \overset{\circ}{E}$.
4. E *est fermé si et seulement si* $E = \bar{E}$.

1.5.6 Valeur absolue

Valeur absolue. A tout nombre réel x, on peut associer le nombre réel positif ou nul défini par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.6}$$

et $|x|$ est appelé la *valeur absolue* de x. Noter que $|x| = \max(x, -x)$ où $\max(x, y)$ dénote le maximum de x et y. La défintion (1.6) est équivalente à $|x| = \sqrt{x^2}$.

Propriétés. Pour $x, y \in \mathbb{R}$ on a

1. Positivité : $|x| \geq 0$ et $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. Homogénéité : $|yx| = |y||x|$
3. Inégalité triangulaire : $|x + y| \leq |x| + |y|$
4. Si $y \neq 0$, $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$
5. $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$

6. Soient $r > 0, a \in \mathbb{R}$. $|x-a| < r \Leftrightarrow -r < x-a < r$ et $|x-a| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x-a \leq r$. Autrement dit :

$$]a-r, a+r[= \{x \in \mathbb{R} : \ |x-a| < r\}, \quad [a-r, a+r] = \{x \in \mathbb{R} : \ |x-a| \leq r\}$$

7. Soient $r > 0, a \in \mathbb{R}$. $|x-a| > r \Leftrightarrow x < a-r$ ou $x > a+r$ et $|x-a| \geq r \Leftrightarrow x \leq a-r$ ou $x \geq a+r$. Autrement dit :

$$]-\infty, a-r[\cup]a+r, \infty[= \{x \in \mathbb{R} : \ |x-a| > r\},$$
$$]-\infty, a-r] \cup [a+r, \infty[= \{x \in \mathbb{R} : \ |x-a| \geq r\}$$

8. Si $|x| < \epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$ alors $x = 0$

Remarque. On peut interpréter la valeur absolue comme une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Les propriétés $1, 2$ et 3 sont les propriétés d'une *norme* sur un espace vectoriel. Les propriétés $4, 5$ sont des conséquences de $2, 3$. Les propriétés $6, 7$ et 8 découlent directement de la défintion.

Remarque. La propriété 8. est une conséquence de la positivité et nous donne une caractérisation importante du nombre 0 :

$$x = 0 \Leftrightarrow |x| < \epsilon \text{ pour tout } \epsilon > 0.$$

L'implication $\Rightarrow$ est evidente. La conclusion $\Leftarrow$ signifie : Si $|x|$ est arbitrairement petit, alors $x = 0$. Elle est particulièrement importante pour le concept du processus de limite décrit dans le chapitre suivant.

Remarque. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on peut définir la distance $d(x, y)$ de deux nombres x et y par $d(x, y) = |x-y|$. La distance $d(x, y)$ vérifie les propriétés suivantes :

1. Positivité : $d(x, y) \geq 0$ et $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. Symétrie : $d(x, y) = d(y, x)$
3. Inégalité triangulaire : $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ pour tout $z \in \mathbb{R}$.

Une identité pour la valeur absolue. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|x+y| + |x-y| = |x| + |y| + ||x| - |y||. \tag{1.7}$$

Sa démonstration est laissée comme exercice.

1.6 Quelques fonctions réelles

On présente une première liste de fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pour les fonctions polynomiales et rationnelles voir "Savoir faire en mathématiques, Y. Biollay, A. Chaabouni, J.St.".

1.6.1 Fonctions monotones.

Soient E et F des sous-ensembles non-vides de $\mathbb{R}$ et $f : E \to F$ une fonction réelle. Soient $x, x_1, x_2 \in E$.

Fonction croissante. Une fonction f est dite croissante sur E si $x_1 < x_2$ implique $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Fonction strictement croissante. Une fonction f est dite strictement croissante si $x_1 < x_2$ implique $f(x_1) < f(x_2)$.

Fonction décroissante. Une fonction f est dite décroissante si $x_1 < x_2$ implique $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Fonction strictement décroissante. Une fonction f est dite strictement décroissante si $x_1 < x_2$ implique $f(x_1) > f(x_2)$.

Exemple.

1. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^3$ est strictement croissante car
$$x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = (x_2 - x_1)\big(\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} + \frac{(x_1 + x_2)^2}{2}\big) > 0$$
si $x_1 < x_2$.
2. Soit $f : E \to F$ une fonction bijective strictement (dé)croissante. Alors sa fonction inverse $f^{-1} : F \to E$ est strictement (dé)croissante.

1.6.2 Fonctions définies par morceaux

La fonction valeur absolue est définie par
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{sinon.} \end{cases}$$

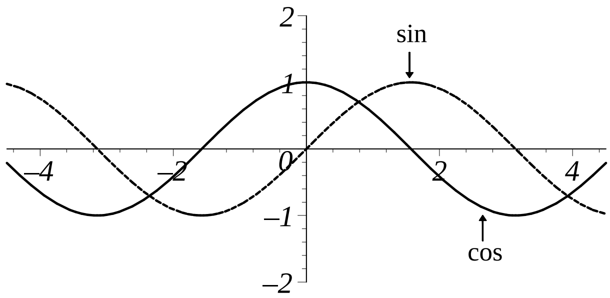
La fonction signe est définie par
$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La fonction Heaviside est définie par
$$\text{Heaviside}(x) = H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

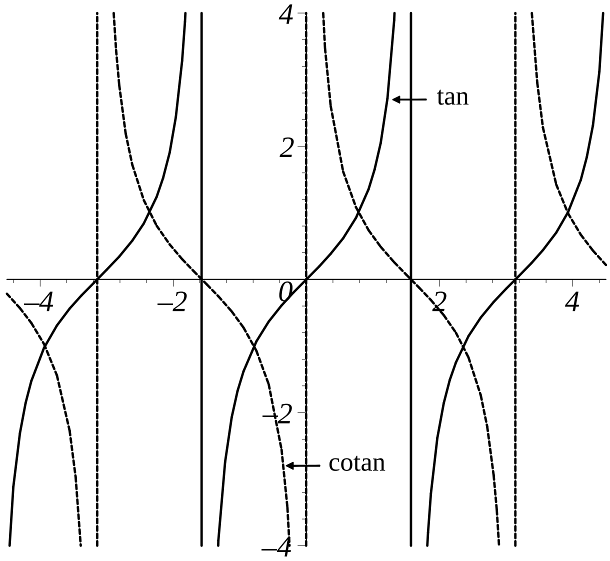
La fonction en escalier de Gauss (ou la partie entière) est définie par
$$G(x) = [x]$$

1.6.3 Fonctions trigonométriques.

Le fonctions trigonométriques sont définies par le cercle trigonométrique (voir "Savoir faire en mathématiques, Y. Biollay, A. Chaabouni, J.St.".)



$$\sin\ :\ ]-\infty,\infty[\longrightarrow[-1,1] \qquad \cos\ :\ ]-\infty,\infty[\longrightarrow[-1,1]$$



$$\tan\ :\ ]\tfrac{\pi}{2}+k\pi,\tfrac{\pi}{2}+(k+1)\pi[\longrightarrow]-\infty,\infty[$$
$$\cot\ :\ ]k\pi,(k+1)\pi[\longrightarrow]-\infty,\infty[,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Formules importantes.

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

1.7 Introduction aux nombres complexes

L'équation $x^2=-1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$. Autrement dit, la racine carrée n'est pas définie pour tout nombre réel. On verra plus tard qu'on a besoin des racines carrées des nombres réels négatifs pour résoudre une équation du troisième degré même dans le cas où cette équation admet trois solutions réelles. Pour éliminer cette restriction, on doit étendre l'ensemble des nombres réels. Une approche consiste à introduire le symbole $i = \sqrt{-1}$ et de définir un nombre complexe z comme une somme de la forme $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.

1.7.1 Le corps $\mathbb{C}$

Nombres complexes. On désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des *nombres complexes* dont les éléments sont toutes les expressions de la forme $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$:

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy : (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, i^2 = -1\}.$$

Addition et multiplication. L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication : Si $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$, alors

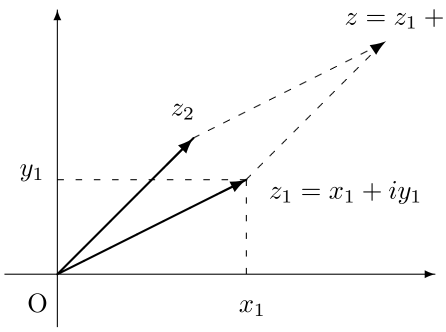
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Remarque. Le produit de deux nombres complexes est calculé en appliquant la "loi distributive" :

$$(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2) = x_1x_2+i(x_1y_2+x_2y_1)+y_1y_2i^2 = (x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).$$

Exemple.

$$(2 + 7i) \cdot (5 + 3i) = 2 \cdot 5 + (2 \cdot 3 + 7 \cdot 5)i + 7 \cdot 3i^2 = -11 + 41i$$



Proposition 1.7.1. *L'ensemble $\mathbb{C}$ est un corps.*

Puissances de i.

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i.$$

1.7.2 Module et complexe conjugué.

Partie réelle et imaginaire. Soit $z = x + iy$. Le nombre réel x est appelé la *partie réelle* de z et on le note $x = \Re(z)$ ou $x = \operatorname{Re} z$, tandis que le nombre y est appelé la *partie imaginaire* de z et on le note $y = \Im(z)$ ou $y = \operatorname{Im} z$. Si $y = 0$, z est réel. Si $x = 0$ et $y \neq 0$, on dit que z est imaginaire pur. Notons que

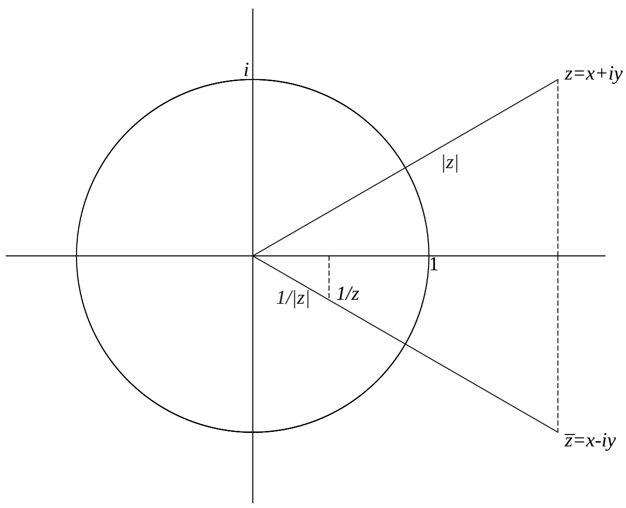
$$\Re(z) = \Im(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0.$$

Module. Le nombre réel $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ est appelé le *module* de z. Si z est réel le module de z est égale à sa valeur absolue.

Complexes conjugués. Les nombres $z = x + iy$ et $\overline{z} = x - iy$ sont appelés *complexes conjugés.*

Propriétés du complexe conjugué. Pour $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ on a

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
4. Si $z_2 \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
5. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ et $|\overline{z}| = |z|$
6. Si $z \neq 0$, $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$
7. $\Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ $\qquad \Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.



Le cercle unité, $z, \bar{z}$ et $\frac{1}{z}$

Propriétés du module. Pour $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ on a

1. Positivité : $|z| \geq 0$ et $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2. Homogénéité : $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
3. Inégalité triangulaire : $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
4. Si $z_2 \neq 0$, $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

5. $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$
6. Si $|z| < \epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$ alors $z = 0$.

Distance. A partir du module on peut définir la distance $d(z_1, z_2)$ de deux nombres complexes z_1 et z_2 par $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$. De même que la distance de deux nombres réels, la distance $d(z_1, z_2)$ satisfait aux trois propriétés suivantes.

1. Positivité : $d(z_1, z_2) \geq 0$ et $d(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$
2. Symétrie : $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$
3. Inégalité triangulaire : $d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z) + d(z, z_2)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

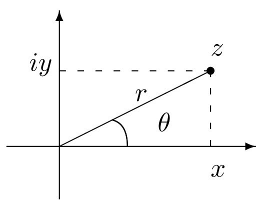
1.7.3 Représentation des nombres complexes et forme polaire

Le plan complexe. On peut représenter un nombre complexe $z = x + iy$ dans le plan $\mathbb{R}^2$ par le vecteur joignant l'origine au point (x, y). L'axe des abscisses représente les nombres réels et l'axe des ordonnées les nombres imaginaires purs. Cette représentation permet de donner une interprétation géométrique des nombres complexes. Par exemple, le module d'un nombre complexe est la distance du point (x, y) à l'origine $(0, 0)$. L'addition de deux nombres complexes correspond à l'addition de deux vecteurs. Pour interpréter le produit de deux nombres complexe on passe des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires dans le plan.

Coordonnées polaires. Soit $z \neq 0$. Donc $r = |z| \neq 0$ et $\frac{z}{r}$ correspond à un point unique du cercle unité (i.e. cercle de rayon 1 et de centre $(0, 0)$). Il existe donc une valeur unique $\theta \in [0, 2\pi[$ telle que

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{cases} \qquad \text{ou} \quad z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

θ est appelé l'*argument* de z et on le note $\theta = \arg z$. Noter que l'argument d'un nombre complexe z est défini à $2k\pi$ près avec $k \in \mathbb{Z}$. Si $x \neq 0$ on a toujours $\tan\theta = \frac{y}{x}$ mais seulement si $x > 0$ et $y \geq 0$ on a $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \arctan\frac{y}{x}$.



Formule d'Euler. Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on définit l'exponentielle d'un nombre imaginaire pur par :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

En utilisant la formule d'Euler, tout nombre complexe z peut s'écrire sous la forme polaire

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

où $r = |z|$ et $\theta = \arg z$. Nous démontrons au chapitre 3 que la base e est le nombre d'Euler, i.e. $e = 2.71828\ldots$, et nous donnerons une démonstration rigoureuse de ce lien entre la fonction exponentielle et les fonctions trigonométrique au chapitre 5 . En appliquant les formules d'addition du sinus et du cosinus nous démontrons ici seulement que l'exponentielle définie par la formule d'Euler satisfait aux propriétés habituelles.

Proposition 1.7.2. *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors*

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$$

Démonstration. On calcule aisément

$$\begin{aligned} e^{i\alpha}e^{i\beta} &= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) \\ &= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta). \end{aligned}$$

□

En utilisant $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ on peut représenter $\sin\theta$ et $\cos\theta$ en terme de l'exponentielle.

Proposition 1.7.3. *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad \text{et} \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}.$$

Valeurs particulières. Soit n un entier.

$$e^{2n\pi i} = 1, \quad e^{(2n+1)\pi i} = -1$$

$$e^{\frac{(4n+1)\pi i}{2}} = e^{\frac{i\pi}{2}} = i, \quad e^{\frac{(4n+3)\pi i}{2}} = e^{\frac{-i\pi}{2}} = -i$$

Formule de de Moivre. Pour tout entier n et tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta) = e^{in\theta}$$

Calcul en représentation polaire. Soit $z_1 = r_1e^{i\theta_1},\ z_2 = r_2e^{i\theta_2},\ z = re^{i\theta}$.

1. $\overline{z} = re^{-i\theta}$
2. Si $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$
3. $z_1 \cdot z_2 = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
4. $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Donc, multiplier par un nombre complexe $z = re^{i\theta} \neq 0$ correspond à une homothétie de centre l'origine et de rapport r suivie d'une rotation de centre l'origine et d'angle θ.

1.7.4 Racines d'un nombre complexe

Proposition 1.7.4. *Soient $s > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ et n un entier positif. L'équation*

$$z^n = se^{i\beta}$$

admet n solutions distinctes de la forme

$$z = \sqrt[n]{s} \cdot e^{i\theta} \quad \text{où} \quad \theta = \frac{\beta + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Racine carrée. Soit $z = x + iy$. Si $y > 0$

$$\sqrt{z} = \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{2}}$$

et si $y < 0$

$$\sqrt{z} = \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{2}}$$

.

1.7.5 Interprétation géométrique des opérations sur les nombres complexes

Addition d'un nombre complexe. L'addition d'un nombre complexe z_0 définit une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par $z \to z + z_0$ qui correspond à une translation dans le plan complexe.

Module et distance. L'ensemble

$$S_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : d(z, z_0) = |z - z_0| = R\}$$

définit dans le plan complexe le cercle de rayon R autour du centre z_0. En particulier, $S_R = S_R(0) = \{z \in \mathbb{C} : d(z, 0) = |z| = R\}$ est le cercle de rayon R autour de l'origine. Notons que $S_R(z_0)$ est l'image de S_R sous la translation $z \to z + z_0$.

Multiplication par un nombre complexe. La multiplication par un nombre complexe a définit une application linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par $z \to a \cdot z$ qui correspond à une homothétie de centre l'origine et de rapport $|a|$ suivie d'une rotation de centre l'origine et d'angle $\arg a$. L'image du cercle $S_R(z_0)$ sous l'application inéaire $z \to a \cdot z$ est le cercle $S_{|a|R}(az_0)$.

L'inverse d'un nombre complexe. L'inverse d'un nombre complexe z définit une application de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ par $z \to \frac{1}{z}$ qui correspond à une homothétie de centre l'origine et de rapport $\frac{1}{|z|^2}$ suivie d'une réflexion par rapport à l'axe des x.

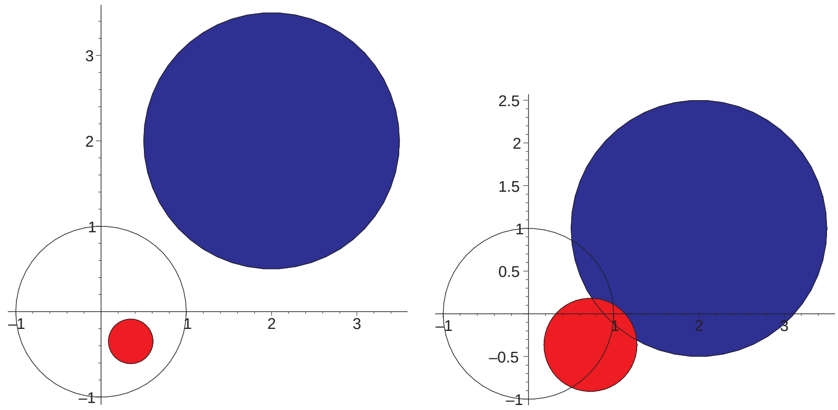
Proposition 1.7.5. *L'image du cercle $S_R(z_0)$ sous l'application $z \to \frac{1}{z}$ est le cercle*

$$S_{\frac{R}{|R^2 - |z_0|^2|}}\left(\frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2 - R^2}\right)$$

si $0 \notin S_R(z_0)$ (i.e. $R^2 \neq |z_0|^2$) et la droite d'équation

$$wz_0 + \bar{w}\bar{z}_0 = 1, \quad w \in \mathbb{C},$$

si $0 \in S_R(z_0)$ (i.e. $R^2 = |z_0|^2$).



1.8 Résolution des équations

Equation de degré n. On considère l'équation de la forme

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

pour $z \in \mathbb{C}$ ou $z \in \mathbb{R}$. Les coefficients $a_0, \ldots, a_n$ sont des nombres complexes. Si $a_n \neq 0$ on appelle cette équation une *équation de degré* n. Dans ce cas on peut la transformer sous la *forme normale* en posant $b_k = \frac{a_k}{a_n}$ pour tout $k = 0, \ldots, n$:

$$z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \ldots + b_1 z + b_0 = 0$$

On a une équation à coefficients réels si les b_k sont réels. On peut démontrer que cette équation possède toujours au moins une racine dans les nombres complexes.

1.8.1 Équations de degré deux

Forme normale. On considère l'équation

$$z^2 + pz + q = 0$$

où $p, q \in \mathbb{C}$. On trouve la solution en complétant le carré :

$$\left(z + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

On trouve les deux racines données par

$$z_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \qquad z_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

En particulier, si $p, q \in \mathbb{R}$, on a les trois cas suivants.

$z^2 + pz + q = 0,\ p, q \in \mathbb{R}$	$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$	deux racines réelles
$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$	une racine double réelle
$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$	deux racines complexes conjuguées

Relations entre les racines et les coefficients. Les racines z_1, z_2 satisfont à

$$z_1 + z_2 = -p, \qquad z_1 z_2 = q.$$

1.8.2 Équations de degré trois

Forme normale. On considère l'équation

$$x^3 + rx^2 + sx + t = 0, \qquad r, s, t \in \mathbb{R}.$$

Par la transformation $y = x + \frac{r}{3}$, on se ramène à l'équation

$$y^3 + py + q = 0, \qquad p = s - \frac{r^2}{3}, \quad q = \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t.$$

En posant $y = v + w$ on trouve

$$v^3 + w^3 + q + (v + w)(3vw + p) = 0.$$

Par conséquent, on obtient une solution, si v et w satisfont le système d'équations

$$v^3 + w^3 + q = 0, \qquad 3vw + p = 0$$

qui donnent des équations de degré deux pour v^3 et w^3. On donne les solutions de l'équation de degré trois dans le tableau ci-dessous.

Forme normale	$x^3 + rx^2 + sx + t = 0$	$r, s, t \in \mathbb{R}$
$y = x + r/3$	$y^3 + py + q = 0$	$p = s - \frac{r^2}{3}, \quad q = \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t$
Formule de Cardan	$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$ une racine réelle et deux racines complexes conjuguées	$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$ $w = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$ $y_1 = v + w$ $y_{2,3} = -\frac{v+w}{2} \pm i\frac{v-w}{2}\sqrt{3}$
	$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$ deux racines réelles dont une double	$y_1 = v + w$ $y_2 = y_3 = -\frac{v+w}{2}$
Casus irreducibilis	$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$ trois racines réelles	$R = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}, \ \cos\theta = \frac{-\frac{q}{2}}{R}$ $y_k = 2\sqrt[3]{R}\cos\frac{\theta + 2k\pi}{3}, \ k = 0, 1, 2$

Exemple - formule de Cardan. On veut résoudre

$$x^3 - 21x^2 + 123x - 247 = 0.$$

Par la substitution $y = x - 7$ on obtient l'équation

$$y^3 - 24y - 72 = 0.$$

Donc $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 36^2 - 8^3 = 784$. Par la formule de Cardan on trouve la solution réelle (noter que $\sqrt{784} = 28$)

$$y_1 = v + w = \sqrt[3]{36 + 28} + \sqrt[3]{36 - 28} = 4 + 2 = 6$$

et les deux racines complexe conjuguées $-3 \pm i\sqrt{3}$. Ceci donne les trois racines

$$x_1 = 13, \quad x_2 = 4 + i\sqrt{3}, \quad x_3 = 4 - i\sqrt{3}.$$

Remarque. En général, il est difficile de trouver des racines explicites à partir de la formule de Cardan.

Exemple - casus irreducibilis. On considère l'équation

$$x^3 - 6x - 4 = 0.$$

D'abord on note que $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 2^2 - 2^3 = -4 < 0$. Nous avons $R = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$ et $\cos\theta = \frac{2}{R} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Donc $\theta = \frac{\pi}{4}$. On doit calculer $\cos\frac{\pi}{12}, \cos\frac{3\pi}{4}, \cos\frac{17\pi}{12}$. Nous supposons que les valeurs $\cos\frac{3\pi}{2} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ et $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ sont connues. Alors

$$\begin{aligned}
&\cos\frac{\pi}{12} = \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{2}\big(1+\sqrt{3}\big) \\
&\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\
&\cos\frac{17\pi}{12} = \cos(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{12}) = -\sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}\sqrt{2}\big(1-\sqrt{3}\big)
\end{aligned}$$

Ce qui donne les trois racines réelles

$$x_1 = 1 + \sqrt{3} \qquad x_2 = -2 \qquad x_3 = 1 - \sqrt{3}.$$

1.8.3 Quelques résultats généraux

Réduction du degré. Si on connaît une racine z_1 de l'équation

$$z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \ldots + b_1 z + b_0 = 0$$

on peut réduire le degré de l'équation :

$$\frac{z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \ldots + b_1 z + b_0}{z - z_1} = z^{n-1} + c_{n-2}z^{n-2} + \ldots + c_1 z + c_0.$$

Ensuite on détermine les solutions de

$$z^{n-1} + c_{n-2}z^{n-2} + \ldots + c_1 z + c_0 = 0.$$

Exemple. On considère

$$z^3 - \frac{3}{8}z^2 - \frac{9}{16}z - \frac{1}{16} = 0.$$

On voit que $z = 1$ est une solution. On calcule

$$\frac{z^3 - \frac{3}{8}z^2 - \frac{9}{16}z - \frac{1}{16}}{z - 1} = z^2 + \frac{5}{8}z + \frac{1}{16}.$$

L'équation $z^2 + \frac{5}{8}z + \frac{1}{16} = 0$ possède les racines $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{8}$.

Équations à coefficients réels. On considère l'équation

$$z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \ldots + b_1 z + b_0 = 0$$

avec des coefficients $b_k \in \mathbb{R}$. Si z_1 est une racine de cette équation, alors le complexe conjugué $\overline{z_1}$ est aussi une racine.

Exemple. On peut vérifier que $z_1 = i$ est une racine de l'équation

$$6z^4 - z^3 + 5z^2 - z - 1 = 0.$$

Par conéquent $z_2 = -i$ est une autre racine et $(z+i)(z-i) = z^2 + 1$ divise $6z^4 - z^3 + 5z^2 - z - 1$. En effet,

$$6z^4 - z^3 + 5z^2 - z - 1 = 6(z^2+1)\big(z^2 - \frac{1}{6}z - \frac{1}{6}\big) = 6(z^2+1)\big(z - \frac{1}{2}\big)(z + \frac{1}{3}\big).$$

Chapitre 2

Suites, Limites et Continuité

Dans ce chapitre nous introduisons un concept central d'analyse, le processus de limite. Ce concept est motivé par le fait suivant : on ne peut pas calculer exactement le nombre réel $\sqrt{2}$ en un nombre fini d'étapes. Mais $\sqrt{2}$ peut être approché avec n'importe quelle précision. Approcher un nombre avec une précision arbitraire signifie le représenter comme limite d'une suite. Le concept du processus de limite est basé sur la structure topologique de l'ensemble des nombres réels donnée par les intervalles ouverts (et la distance de deux nombres réels définie à l'aide de la valeur absolue). Les axiomes algébriques et d'ordre permettent de traiter ce concept par le calcul puisqu'en cas d'existence des limites le processus de limite préserve ces structures, c'est-à-dire il commute avec les opérations algébriques et la relation d'ordre. De plus, nous introduisons une classe de fonctions réelles qui commutent également avec le processus de limite : les fonctions dites continues.

Notions à apprendre. suite, sous-suite, suite bornée, suite convergente, limite d'une suite, suite de Cauchy, critère de convergence, limites supérieure et limit inférieure d'une suite, suite divergente, suite fortement divergente, suite géométrique, le nombre d'Euler, fonction continue, point d'accumulation, le théorème de Bolzano-Weierstrass et ses applications aux suites et aux fonctions continues, le théorème de la valeur intermédiaire, suite récurrente, le théorème de point fixe de Banach

Compétences à acquérir. Connaître et savoir appliquer les règles de calcul pour les limites, connaître et savoir appliquer les critères de convergence et démontrer la convergence ou la divergence d'une suite donnée ou d'une suite récurrente à l'aide de ces critères, savoir vérifier la continuité d'une fonction, savoir appliquer le théorème de la valeur intermédiaire et le théorème du point fixe de Banach

2.1 Suites et sous-suites

2.1.1 Suites

Définition. Une *suite numérique* ou plus brièvement une *suite* est une *application* f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, notée $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, c'est-à-dire une correspondance qui, à chaque $n \in \mathbb{N}$ associe un nombre réel $f(n)$. On pose $x_n = f(n)$ et on désigne la suite par $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$.

Plus généralement, soit n_0 un entier, alors $(x_n)_{n\geq n_0}$ défini également une suite.

Exemple 1.

1. Soit $x_n = x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante $(x, x, x, x, \ldots)$.
2. Soit $x_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$.
3. Soit $x_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, \ldots)$.
4. Soit $q \in \mathbb{R}$ et $x_n = q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, q, q^2, q^3, \ldots)$.
5. Soit $x_n = \frac{(n+2)(n+3)}{n^2+n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (6, 4, \frac{20}{7}, \frac{30}{13}, \ldots)$.
6. Suite récurrente. Soit $x_0 = 2$ et $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408}, \ldots)$.
7. Série. Soit $x_k = \frac{1}{k(k+1)}$ pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On définit la suite des sommes $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ pour tout $n \geq 1$, donc $(S_n)_{n\geq 1} = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots)$.

2.1.2 Suites bornées

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On appelle *ensemble des valeurs* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou *l'ensemble des images* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'ensemble des valeurs prises par $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, i.e. l'ensemble $\{x_1, x_2, \ldots\}$. La notion d'une suite bornée correspond à celle d'un ensemble borné si on considère son ensemble des valeurs.

Définition. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *minorée* s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $x_n \geq a$. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *majorée* s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $x_n \leq b$. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *bornée*, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à la fois minorée et majorée.

Exemple. La suite géométrique $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si $|q| \leq 1$. Si $q > 1$ elle est seulement minorée, si $q < -1$ elle n'est ni majorée ni minorée.

Proposition. Une suite (x_n) est bornée si et seulement s'il existe une constante $c \geq 0$ tel que $|x_n| \leq c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.1.3 Suites monotones

Définition.

1. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *croissante* si $x_n \leq x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *strictement croissante* si $x_n < x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *décroissante* si $x_n \geq x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *strictement décroissante* si $x_n > x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *monotone* si elle est croissante ou décroissante.

Exemple. La suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante. La suite géométrique $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si $q > 1$, constante si $q = 1$ et strictement décroissante si $0 < q < 1$.

2.1.4 Sous-suites

Exemple. Soit $x_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut extraire une suite en considérant uniquement les indices pairs $n_k = 2k$ et $k \in \mathbb{N}$. Ceci donne une suite définie par $y_k = x_{n_k} = x_{2k}$. Une telle suite est appelée sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dans notre cas on obtient une sous-suite constante puisque $x_{n_k} = 1$ pour tout indice n_k. Plus généralement, on a la

Définition. Si $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers naturels on dit que $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une *sous-suite*, ou encore *suite extraite*, de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple. Pour $x_n = (-1)^n$ et n_k de la forme $n_k = 2k + 1$, on obtient la sous-suite donnée par $x_{n_k} = -1$. Si $n_k = 3k$, on a la sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, \ldots)$.

2.2 Suites convergentes et limites

2.2.1 Limite d'une suite

Introduction. Pour certaines suites, les éléments x_n tendent vers un nombre réel bien défini, lorsque l'indice croît. Par exemple, la suite $(x_n)_{n\geq 1} = (\frac{1}{n})_{n\geq 1} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$ tend vers 0. On dit aussi que la suite (x_n) *converge vers* 0. Plus précisément on a la

Définition. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $x \in \mathbb{R}$, si à tout $\epsilon > 0$, on peut associer un entier naturel N_ϵ tel que pour tout $n \geq N_\epsilon$ on a $|x_n - x| < \epsilon$. On écrit alors

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x.$$

On dit aussi que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *convergente* et admet pour *limite* $x \in \mathbb{R}$. Une suite non convergente est dite *divergente*.

Autres notations. Si $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$, on note aussi $x_n \to x$ lorsque $n \to +\infty$.

Remarque. La définition signifie que la distance $d(x_n, x) = |x_n - x|$ entre les éléments x_n de la suite et le point x devient arbitrairement petite pour tous les indices n suffisamment grands.

Remarque. Lorsque la limite existe, elle est unique, autrement dit, toute suite possède au plus une limite. En effet, s'il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $|x_n - y| < \epsilon$ pour tout $n \geq M_\epsilon$, on a pour tout $n \geq \max(N_\epsilon, M_\epsilon)$

$$\begin{aligned} |x - y| &= |x - x_n + x_n - y| \\ &\leq |x - x_n| + |x_n - y| \qquad \text{par l'inégalité triangulaire} \\ &< \epsilon + \epsilon = 2\epsilon \end{aligned}$$

Donc $x = y$.

Remarque. La suite (x_n) converge vers x si pour tout intervalle ouvert de la forme $]x-\epsilon, x+\epsilon[$ toutes les valeurs x_n, à partir d'un indice $N = N_\epsilon$, se trouvent dans $]x-\epsilon, x+\epsilon[$ et par conséquent, seulement un nombre fini d'éléments x_n sont à l'extérieur de cet intervalle. Notant que tout ensemble fini est borné cette remarque implique la proposition suivante :

Proposition 2.2.1. *Toute suite convergente est bornée. Toute sous-suite d'une suite convergente converge vers la même limite.*

Remarque. Nous allons expliquer comment nous utilisons le nombre ϵ. Supposons que nous ayons démontré que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un entier naturel N_ϵ tel que pour tout $n \geq N_\epsilon$ l'inégalité $|x_n - x| < C\epsilon$ est valable où C ne dépend ni de ϵ ni de n. Nous affirmons que x est la limite de la suite (x_n). La seule différence par rapport à la définition est la constante C devant ϵ. Pour se ramener à l'inégalité de la définition nous posons $\epsilon' = \epsilon/C$. Il existe alors un entier naturel N' tel que pour tout $n \geq N'$ on a $|x_n - x| < C\epsilon'$. Par conséquent pour tout $n \geq N'$
$$|x_n - x| < C\epsilon' = \epsilon.$$
Dans la litérature, les estimations sont présentées telles qu'on a $< \epsilon$ à la fin en faisant les réarrangements comme ci-dessus. Dans ce cours nous gardons souvent les constantes devant ϵ.

Remarque. Au lieu de dire qu'il existe un entier naturel N tel qu'une certaine affirmation est vraie pour tout $n \geq N$ nous disons souvent simplement *pour tout entier naturel n suffisamment grand.*

Exemples élémentaires.

1. La suite constante $x_n = x$ où $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, satisfait à $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ puisque pour tout $\epsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|x_n - x| = 0 < \epsilon$.

2. Soit $x_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$. Pour tout $\epsilon > 0$ on a $|\frac{1}{n}| < \epsilon$ si $n > \frac{1}{\epsilon}$. On choisit donc un entier naturel N_ϵ tel que $N_\epsilon > \frac{1}{\epsilon}$, par exemple $N_\epsilon = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$. Par conséquent pour tout $\epsilon > 0$, on a $|\frac{1}{n}| < \epsilon$ pour tout $n \geq N_\epsilon$, c'est-à-dire
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$
3. La suite $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ est divergente. Pour démontrer cette affirmation nous supposons que (x_n) converge vers un nombre réel x. Donc pour $\epsilon = 1$ il existe un nombre naturel N tel que $|x_n - x| < 1$ pour tout $n \geq N$. Alors, pour tout $n \geq N$ nous avons grâce à l'inégalité triangulaire
$$2 = |x_n - x_{n+1}| = |x_n - x + x - x_{n+1}| \leq |x_n - x| + |x_{n+1} - x| < 1 + 1 = 2$$
c'est-à-dire $2 < 2$. La suite ne peut donc converger vers aucun x.
4. Considérons la suite géométrique $x_n = q^n$, $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}$. Si $q = 1$ la suite est constante et donc convergente (voir 1.). Si $q = -1$ la suite est divergente(voir 3.). Soit $|q| > 1$, alors la suite n'est pas convergente car $|q|^n$ n'est pas majoré, i.e. pour tout $C > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|q|^n > C$. Pour démontrer cette affirmation noter que par l'inégalité de Bernoulli on a pour tout entier naturel n :
$$|q|^n = (1 + |q| - 1)^n \geq 1 + n(|q| - 1)$$
Soit $C > 0$ arbitraire. Par l'axiome d'Archimède : il existe un nombre naturel n tel que $n(|q| - 1) > C$. Par conséquent pour cette valeur de n
$$|q|^n \geq 1 + n(|q| - 1) \geq 1 + C > C.$$
Il reste le cas $|q| < 1$:
Proposition 2.2.2. *Soit $|q| < 1$. Alors, la suite géométrique (q^n), $n \in \mathbb{N}$, est convergente et*
$$\lim_{n \to +\infty} q^n = 0.$$
Démonstration. Notons que $\frac{1}{|q|} > 1$. Donc pour tout $\epsilon > 0$ il existe un nombre naturel N tel que $(\frac{1}{|q|})^N > \frac{1}{\epsilon}$, c'est-à-dire $|q|^N < \epsilon$. Ceci implique $|q|^n < \epsilon$ pour tout $n \geq N$. □

2.2.2 Propriétés des valeurs limites

Nous présentons les règles de calcul pour des valeurs limites.

Théorème 2.1. - *Règles de calcul pour des limites.* *Supposons que*
$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x \qquad et \qquad \lim_{n \to +\infty} y_n = y.$$
Alors, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a
$$\lim_{n \to +\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha x + \beta y. \tag{2.1}$$
$$\lim_{n \to +\infty} x_n y_n = xy. \tag{2.2}$$
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y} \qquad si \quad y \neq 0. \tag{2.3}$$
$$\lim_{n \to +\infty} |x_n| = |x| \ (= |\lim_{n \to +\infty} x_n|). \tag{2.4}$$

Démonstration. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$

$$|x_n - x| < \epsilon \qquad \text{et} \qquad |y_n - y| < \epsilon$$

De plus, les suites sont bornées. Il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que $x_n \leq C_1$ et $y_n \leq C_2$. Alors pour tout entier naturel $n \geq N$

$$\begin{aligned} |\alpha x_n + \beta y_n - (\alpha x + \beta y)| &\leq |\alpha||x_n - x| + |\beta||y_n - y| \\ &< |\alpha|\epsilon + |\beta|\epsilon \\ &= (|\alpha| + |\beta|)\epsilon. \end{aligned}$$

D'après la remarque ci-dessus cette inégalité implique que la suite $(\alpha x_n + \beta y_n)$ converge vers $\alpha x + \beta y$. Pour tout entier naturel $n \geq N$ on a

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |(x_n - x)y_n + x(y_n - y)| \\ &< C_2\epsilon + C_1\epsilon \\ &= (C_1 + C_2)\epsilon \end{aligned}$$

Si $y \neq 0$ il existe un entier naturel N_0 tel que $y_n \neq 0$ et $|y_n - y| < \frac{|y|}{2}$ pour tout $n \geq N_0$. La dernière inégalité implique que $|y_n| > \frac{|y|}{2}$ si $n \geq N_0$. Alors pour tout $n \geq \max(N, N_0)$

$$\begin{aligned} \left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| &= \left|\frac{(x_n - x)y + x(y - y_n)}{yy_n}\right| \\ &= \frac{|(x_n - x)y + x(y - y_n)|}{|y||y_n|} \\ &< 2\frac{(|y| + |x|)\epsilon}{|y|^2} \end{aligned}$$

Le fait que $(|x_n|)$ converge vers $|x|$ est une conséquence de l'inégalité

$$\big||x_n| - |x|\big| \leq |x_n - x|.$$

□

Exemple. Soit $x_n = \frac{(n+2)(n+3)}{n^2+n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour appliquer le théorème on doit extraire le terme n^2 du numérateur et du dénominateur, c'est-à-dire, on écrit x_n comme suit :

$$x_n = \frac{n^2(1 + \frac{2}{n})(1 + \frac{3}{n})}{n^2(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})} = \frac{(1 + \frac{2}{n})(1 + \frac{3}{n})}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$$

Notons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ implique $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} x_n &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(1 + \frac{2}{n})(1 + \frac{3}{n})}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{(\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n})(\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n})}{\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} + \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{(1 + 0)(1 + 0)}{1 + 0 + 0} = 1 \end{aligned}$$

Proposition 2.2.3. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers 0. Alors, la suite $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*

Exemple. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n}$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

2.3 Critères de convergence

Proposition 2.3.1. *Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites satisfaisant les deux propriétés suivantes :*

1. *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers x et y.*
2. *Il existe un entier naturel N_0 tel que pour tout $n \geq N_0$: $x_n \leq y_n$*

Alors, $x \leq y$.

Démonstration. Nous raisonnons par l'absurde et supposons que $x > y$. Prenons $\epsilon = \frac{x-y}{2} > 0$. Pour cet ϵ il existe $N \geq N_0$ tel que pour tout $n \geq N$:

$$|x_n - x| < \epsilon, \quad |y_n - y| < \epsilon \quad \text{et} \quad x_n \leq y_n$$

En particulier,

$$x - \epsilon < x_n \leq y_n < y + \epsilon$$

C'est absurde car $x - \epsilon = y + \epsilon = \frac{x+y}{2}$. □

Le théorème des deux gendarmes est une simple conséquence de cette Proposition.

Théorème 2.2. ***- Théorème des deux gendarmes.*** *Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites satisfaisant les deux propriétés suivantes :*

1. *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite L*
2. *Il existe un entier naturel N_0 tel que pour tout $n \geq N_0$: $u_n \leq x_n \leq v_n$*

Alors, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L.

Démonstration. Nous donnons une démonstration directe. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe un entier naturel N_1 tel que

$$|u_n - L| < \epsilon \quad \text{i.e.} \quad -\epsilon < u_n - L < \epsilon$$

et

$$|v_n - L| < \epsilon \quad \text{i.e.} \quad -\epsilon < v_n - L < \epsilon$$

Alors, pour tout $n \geq N = \max(N_0, N_1)$

$$-\epsilon < u_n - L < x_n - L < v_n - L < \epsilon$$

et donc $|x_n - L| < \epsilon$. □

Exemple. Soit $a > 0$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1 + \frac{a}{n}}$. Notons que

$$1 \leq \sqrt{1 + \frac{a}{n}} \leq 1 + \frac{a}{2n}$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1 + \frac{a}{n}} = 1$.

Exemple. Soit $a > 0$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Notons $x_n = \sqrt[n]{a}$. Si $a > 1$ nous avons $x_n \geq 1$ et par l'inégalité de Bernoulli

$$a = (x_n)^n = (1 + x_n - 1)^n \geq 1 + n(x_n - 1) \quad \text{i.e.} \quad x_n \leq 1 + \frac{a-1}{n}$$

et le théorème des deux gendarmes donne le résultat souhaité. Si $a = 1$ le résultat est trivial et si $a < 1$ nous obtenons le résultat grâce à l'identité $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}$.

Exemple. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

L'inégalité de Bernoulli ne donne plus une borne qui converge vers 1. Donc considérons la suite définie par $y_n = \sqrt{x_n}$ où $x_n = \sqrt[n]{n}$. Notons que $y_n \geq 1$. Par l'inégalité de Bernoulli nous trouvons pour tout $n \geq 1$

$$\sqrt{n} = (y_n)^n = (1 + y_n - 1)^n \geq 1 + n(y_n - 1) \quad \text{i.e.} \quad y_n \leq 1 + \frac{\sqrt{n}-1}{n}$$

et par le théorème des deux gendarmes nous obtenons $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 1$ puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{n} = 0$. Par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n^2 = (\lim_{n\to+\infty} y_n)^2 = 1.$$

Théorème 2.3. - ***"Critère des suites géométriques".*** *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite pour laquelle la limite*

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$$

existe. Alors, si $\rho < 1$ la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 tandis que si $\rho > 1$ elle diverge.

Remarque. Si $\rho = 1$ la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être convergente (par exemple $x_n = 1$) ou divergente (par exemple $x_n = (-1)^n$).

Exemple. La suite géométrique $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (q^n)_{n\in\mathbb{N}}, |q| \neq 1$ satisfait ce critère car $x_{n+1} = qx_n$.

Exemple. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Avec $x_n = \frac{a^n}{n!}$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a|}{n+1} = 0 < 1.$$

Théorème 2.4. - ***Critères de monotonie.***

1. *Toute suite croissante et majorée converge vers le supremum de son ensemble des valeurs.*

2. *Toute suite décroissante et minorée converge vers l'infimum de son ensemble des valeurs.*
3. *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite décroissante telles que*
$$\lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0.$$
Alors,
   (a) *pour tout* $n \in \mathbb{N}$: $x_0 \leq x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n \leq y_0$
   (b) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent vers la même limite.*

Exemple - le nombre d'Euler. Considérons les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par
$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$
Nous affirmons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. En effet, en appliquant l'inégalité de Bernoulli nous avons
$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{(n+2)^{n+1}n^n}{(n+1)^{2n+1}}\\ &= \frac{(n^2+2n)^{n+1}}{(n+1)^{2(n+1)}}\frac{n+1}{n}\\ &= \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n}\\ &> \left(1-(n+1)\frac{1}{(n+1)^2}\right)\frac{n+1}{n} = 1\end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned}\frac{y_n}{y_{n+1}} &= \frac{(n+1)^{2n+3}}{(n+2)^{n+2}n^{n+1}}\\ &= \frac{(n^2+2n+1)^{n+2}}{(n^2+2n)^{n+2}}\frac{n}{n+1}\\ &= \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2}\frac{n}{n+1}\\ &> \left(1+(n+2)\frac{1}{n(n+2)}\right)\frac{n}{n+1} = 1\end{aligned}$$
Ceci implique que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont bornées et
$$x_1 \leq x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n \leq y_1$$
De plus
$$\lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 0.$$
Alors, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite et nous posons
$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne sont pas très adaptées pour le calcul numérique du nombre e car elles ne convergent que lentement. Nous allons encore montrer que

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Ce développement en série converge beaucoup plus rapidement vers la limite (voir chapitre 3.6).

Exemple - une suite récurrente pour la racine carrée. Soit $a > 0$. Considérons la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) \qquad \text{et} \quad x_0 > 0$$

Proposition 2.3.2. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sqrt{a}$.

Démonstration. Première méthode : La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait les propriétés suivantes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. $x_n > 0$ car $x_0 > 0$ et $x_n > 0$ implique $x_{n+1} > 0$.
2. $x_{n+1}^2 \geq a$ car $x_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4}\big(x_n - \frac{a}{x_n}\big)^2 \geq 0$.
3. $x_{n+1} \leq x_n$ car $x_n - x_{n+1} = \frac{1}{2x_n}\big(x_n^2 - a\big) \geq 0$.

Par conséquent, pour $n \geq 1$, (x_n) est une suite décroissante et minorée par $\frac{a}{x_1}$ car $x_n \geq \frac{a}{x_n} \geq \frac{a}{x_1}$ grâce aux propriétés 2 et 3. Donc $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ existe et $x > 0$. Par la formule de récurrrence nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \frac{1}{2}(\lim_{n\to+\infty} x_n + \frac{a}{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n})$$

c'est-à-dire

$$x = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$$

ou $x^2 = a$ et, de plus, $x > 0$ par la propriété 1. □

Démonstration. Deuxième méthode : Si la suite est convergente elle doit converger vers $\sqrt{a}$. On définit $y_n = x_n - \sqrt{a}$ qui vérifie la récurrence

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{y_n}{y_n + \sqrt{a}}\, y_n.$$

$y_0 > -\sqrt{a}$ implique $y_1 > 0$ et donc par récurrence $y_n > 0$ pour tout entier $n \geq 1$, d'où

$$y_{n+1} = \frac{1}{2} y_n$$

pour tout entier $n \geq 1$. Cette inégalité implique par récurrence que $y_n \leq 2^{1-n} y_1$. Par le théorème des deux gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$, i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sqrt{a}$. □

On présente d'autres suites récurrentes au ch. 2.8 dans le contexte des méthodes de résolution exactes pour certaines suites récurrentes ainsi que des méthodes pour étudier leur convergence.

Vitesse de la convergence. Après chaque étape de la récurrence nous pouvons estimer l'erreur de l'approximation de $\sqrt{a}$ grâce aux inégalités

$$\frac{a}{x_n} \leq \sqrt{a} \leq x_n$$

Nous considérons les erreurs définies par $x_n = \sqrt{a}(1+u_n)$ et $\frac{a}{x_n} = \sqrt{a}(1-v_n)$. Donc $u_n \geq 0$ pour $n \geq 1$ et $v_n = \frac{u_n}{1+u_n} \leq u_n$. Les u_n satisfont la récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{u_n^2}{1+u_n}$$

et nous pouvons estimer u_n par $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}\min(u_n, u_n^2)$. Par exemple, si pour un n, l'erreur est plus petite que un pour cent, c'est-à-dire $u_n \leq 10^{-2}$, alors $u_{n+1} \leq 5 \cdot 10^{-5}$ et $u_{n+2} \leq 1.25 \cdot 10^{-9}$.

2.4 Le théorème de Bolzano-Weierstrass

Introduction. Nous avons vu que toute suite convergente est bornée. Une suite bornée n'est pas toujours convergente. Nous allons montrer, que de toute suite bornée, nous pouvons extraire une sous-suite convergente.

Théorème 2.5. ***- théorème de Bolzano-Weierstrass.*** *De toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut extraire une sous-suite convergente $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.*

Interprétation du théorème de Bolzano-Weierstrass. Le théorème de Bolzano-Weierstrass signifie que pour toute suite bornée il y a toujours (au moins) un nombre réel x dont chacun des voisinages contient un nombre infini d' éléments de cette suite. Autrement dit, les éléments d'une suite bornée (ou d'une infinité de nombres dans un intervalle borné) s'accumulent ou se concentrent autour (au moins) un nombre réel.

Pour démontrer ce résultat nous construisons une suite convergente à partir de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sa limite est appelée la limite supérieure de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Limite supérieure et limite inférieure. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. On définit la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant

$$y_n = \sup\{x_k : k \geq n\}.$$

La suite (y_n) est décroissante et minorée, donc convergente. Sa limite est appelée la *limite supérieure* de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on la note par $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n$. La suite définie par

$$z_n = \inf\{x_k : k \geq n\}$$

est croisssante et majorée et nous notons sa limite, appelée *limite inférieure* de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n$. Par définition on a toujours

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n \leq \limsup_{n\to+\infty} x_n$$

Exemple. La suite $x_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$ est bornée mais elle n'est pas convergente. Nous avons

$$y_n = \sup\{x_k : k \geq n\} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ pair,} \\ 1 + \frac{1}{n+1} & \text{si } n \text{ impair,} \end{cases}$$

et donc $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$. Similairement on démontre $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = -1$.

Démonstration. (du théorème de Bolzano-Weierstrass) Soient $y_n = \sup\{x_k : k \geq n\}$ et $y = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$. Pour tout $\epsilon > 0$ et tout entier naturel N il existe $n \geq N$ tel que

$$|y_n - y| < \frac{1}{2}\epsilon.$$

Par construction de la suite y_n il existe un indice $n_1 \geq n$ tel que $|x_{n_1} - y_n| < \frac{1}{2}\epsilon$. Donc $n_1 \geq N$ et

$$|x_{n_1} - y| = |x_{n_1} - y_n + y_n - y| \leq |x_{n_1} - y_n| + |y_n - y| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon.$$

Ceci implique que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un nombre infini de $n_k \in \mathbb{N}$ et $n_k \geq N$ tel que $|x_{n_k} - y| < \epsilon$ (Si n_k est l'indice trouvé, choisir $N = n_k + 1$ pour trouver un $n_{k+1} > n_k$ etc.). □

Proposition 2.4.1. lim inf, lim sup *et suites convergentes.* *Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et x un réel. Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ si et seulement si $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.*

Démonstration. Si $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = x$, alors pour les y_n, z_n construits ci-dessus : $z_n \leq x_n \leq y_n$ et on conclut par le théorème de deux gendarmes. Soit $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n = y$ et $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = z$ existent. La convergence des x_n implique que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un nombre naturel $N = N_\epsilon$ tel que $x_n \in]x - \epsilon, x + \epsilon[$ pour tout $n \geq N_\epsilon$ d'où $y_n, z_n \in]x - \epsilon, x + \epsilon[$ pour tout $n \geq N_\epsilon$. Par conséquent, $x = y = z$. □

Point d'accumulation d'une suite. On appelle $p \in \mathbb{R}$ un point d'accumulation d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = p$.

Proposition 2.4.2. - *Adhérence d'un ensemble et point d'accumulation.* *Un point a est adhérent à un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ si et seulement s'il existe une suite d'éléments $a_n \in E$ qui converge vers a.*

Démonstration. Si $a_n \in E$ converge vers a, alors pour tout $r > 0$ il existe un entier naturel N tel que $|a_n - a| < r$ pour tout $n \geq N$, c'est-à dire $a_n \in]a - r, a + r[\cap E$. Si a est adhérent à E, alors pour tout entier naturel n il existe un $a_n \in]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}[\cap E$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a. □

Remarque. Si $a \in E$ on peut choisir la suite constante : $a_n = a$. Si E est majoré et $\sup E \notin E$ il existe une suite d'éléments $a_n \in E$ qui converge vers $\sup E$. Si E est minoré et $\inf E \notin E$ il existe une suite d'éléments $a_n \in E$ qui converge vers $\inf E$.

Exemple - l'adhérence de l'ensemble des valeurs d'une suite bornée. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée et considérons son ensemble de valeurs $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Par la proposition précédente la réunion de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ avec l'ensemble de points d'accumulation de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne l'adhérence de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Exemple - l'adhérence des rationnels. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (r_1, r_2, \ldots)$ la suite des rationnels dans $]0, 1[$. Alors, tout $x \in [0, 1]$ est un point d'accumulation de cette suite. Donc l'adhérence de son ensemble des valeurs est $[0, 1]$.

Corollaire 2.6. - ***Suites dans un ensemble fermé.*** *Soient $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble fermé et (x_n) un suite d'éléments $x_n \in E$. Alors, tout point d'accumulation de (x_n) est dans E. En particulier, si $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$, alors $x \in E$.*

Démonstration. Soit x un point d'accumulation de (x_n). Par la proposition 2.4.2 $x \in \bar{E}$ et $\bar{E} = E$ puisque E est fermé. □

2.5 Suites de Cauchy

Introduction. Soit (x_n) une suite qui converge vers x. Nous avons observé que les distances entre les éléments de la suite deviennent arbitrairement petites. Plus précisément, si (x_n) converge vers x, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - x| < \frac{1}{2}\epsilon$ pour tout $n \geq N$. Donc, pour tout entier $m, n \geq N$

$$|x_n - x_m| = |x_n - x + x - x_m| \leq |x_n - x| + |x_m - x| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon.$$

C'est cette dernière propriété que nous prenons comme définition d'une famille de suites appelées suites de Cauchy.

Suites de Cauchy. Une suite est dite *suite de Cauchy* si à tout $\epsilon > 0$, on peut associer un $N = N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geq N$ on a $|x_n - x_m| < \epsilon$.

Théorème 2.7. - ***théorème fondamental des suites de Cauchy.*** *Une suite (x_n) est une suite de Cauchy si et seulement si elle converge.*

Démonstration. Nous avons déjà vu que toute suite convergente est une suite de Cauchy. Pour montrer que toute suite de Cauchy converge, notons que si (x_n) est une suite de Cauchy, alors (x_n) est borné car pour un ϵ donné, il existe un entier naturel N tel que $|x_n - x_N| < \epsilon$ pour tout $n \geq N$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass il existe une sous-suite de (x_n) qui converge. Soit x cette limite. Nous allons démontrer que toute la suite (x_n) converge vers x. La suite (x_n) est de Cauchy, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geq N$

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{2}\epsilon.$$

Il existe un élément de la sous-suite x_m tel que $m \geq N$ et $|x_m - x| < \frac{1}{2}\epsilon$. Donc pour tout $n \geq N$

$$|x_n - x| = |x_n - x_m + x_m - x| \leq |x_n - x_m| + |x_m - x| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon.$$

□

Remarque. On peut montrer que ce théorème est équivalent à l'axiome que tout ensemble majoré a un supremum. On peut donc caractériser la propriété de $\mathbb{R}$ d'être complet par le fait que toute suite de Cauchy converge.

2.6 Fonctions continues

Fonction continue. Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction et $x \in D_f$. On dit que f est continue en x si pour toute suite (x_n) d'éléments dans D_f telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x) = f\big(\lim_{n\to+\infty} x_n\big). \tag{2.5}$$

Nous notons cette propriété comme suit (voir aussi le chapitre 4) :

$$\lim_{\eta\to x} f(\eta) = f(x). \tag{2.6}$$

Une fonction f est continue sur D_f si elle est continue en tout $x \in D_f$. Il suit des règles de calcul pour les limites du théorème 2.1 et de la définition de continuité :

Opérations sur des fonctions continues.

1. La somme et le produit de fonctions continues sont continues.
2. La composition de fonctions continues est continue.
3. La fonction réciproque d'une fonction continue est continue.

2.6.1 Exemples de fonctions continues

1. Les fonctions polynômiales $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x^k$, $a_k \in \mathbb{R}$ sont continues en tout $x \in \mathbb{R}$ puisque si $\lim\limits_{i\to+\infty} x_i = x$, alors par les règles de calcul pour les limites $\lim\limits_{i\to+\infty} x_i^2 = x^2$ et par récurrence $\lim\limits_{i\to+\infty} x_i^k = x^k$ pour tout entier positif k et la somme de suites convergentes est convergente.
2. Par le même argument les fonctions rationnelles sont continues sur leur domaine de définition.
3. $f(x) = |x|$ est continue en tout $x \in \mathbb{R}$: c'est le point 4. du théorème 2.1.
4. Les fonctions $\sin x, \cos x$ sont continues en tout $x \in \mathbb{R}$: Noter d'abord que $\sin x$ est continue en $x = 0$ puisque $|\sin x| \leq |x|$ d'où pour toute suite telle que $\lim\limits_{i\to+\infty} x_i = 0$ il suit que $\lim\limits_{i\to+\infty} \sin x_i = 0$. Par le théorème de Pythagore, $\cos x$ est continue en $x = 0$. La continuité en tout $x \in \mathbb{R}$ est une conséquence de formules d'addition. Par exemple, si $\lim\limits_{i\to+\infty} x_i = x$, alors

$$\begin{aligned}\lim_{i\to+\infty} \sin x_i &= \lim_{i\to+\infty} \sin(x_i - x + x)\\ &= \lim_{i\to+\infty} \sin(x_i - x)\cos x + \cos(x_i - x)\sin x\\ &= 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x = \sin x.\end{aligned}$$

2.6.2 Applications du théorème de Bolzano-Weierstrass aux fonctions continues sur $[a, b]$

Introduction. Les propriétés importantes des fonctions continues définies sur un intervalle borné et fermé sont des conséquences du théorème de Bolzano-Weierstrass. Ici nous montrons que toute fonction continue sur un intervalle borné et fermé atteint ses valeurs extrémales. Pour une autre conséquence sur la continuité uniforme des fonctions voir chapitre 4.

Maximum et minimum d'une fonction. Soient $D, T \subset \mathbb{R}$ et $f : D \to T$. Alors, $\sup\{f(x) : x \in D\}$ et $\inf\{f(x) : x \in D\}$ sont appelés le supremum respectivement l'infimum de f et on le note $\sup\limits_{x \in D} f(x)$ respectivement $\inf\limits_{x \in D} f(x)$. On dit que f atteint son maximum (respectivement son minimum) en $a \in D$ si $f(a) = \sup\limits_{x \in D} f(x)$ (resp. $\inf\limits_{x \in D} f(x)$) et on le note $f(a) = \max\limits_{x \in D} f(x)$ (resp. $f(a) = \min\limits_{x \in D} f(x)$).

Théorème 2.8. *Soit f une fonction continue définie sur l'intervalle borné et fermé $[a, b]$. Alors f atteint son maximum et son minimum.*

Démonstration. Il suffit de montrer que la fonction f atteint son maximum car $\min\limits_{x \in D} f(x) = -\max\limits_{x \in D}(-f(x))$ et $-f$ est continue. Soit $S := \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. (Noter que $S = \infty$ si f n'est pas bornée). Il existe une suite (x_n) d'éléments $x_n \in [a, b]$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = S$. La suite (x_n) est bornée (car $[a, b]$ est borné), donc par le théorème de Bolzano-Weierstrass il existe un sous-suite (x_{n_k}) qui converge. Notons p la limite de cette sous-suite. L'intervalle $[a, b]$ est fermé, donc $p \in [a, b]$. Par la continuité de f nous avons

$$f(p) = \lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = S.$$

En particulier, $S < \infty$ donc f est bornée et atteint son maximum. □

Remarque. Si l'intervalle est ouvert, semi-ouvert ou non-borné ce résultat n'est plus valable. Par exemple, la fonction identité $x \mapsto x$ définie sur $]0, 1[$ est bornée et continue mais n'atteint ni son supremum 1 ni son infimum 0.

Théorème 2.9. - *Théorème de la valeur intermédiaire.* *Soit f une fonction continue définie sur l'intervalle borné et fermé $[a, b]$ et $f(a) < f(b)$. Alors, pour tout nombre réel r tel que $f(a) < r < f(b)$ il existe un $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = r$. r est dit valeur intermédiaire.*

Démonstration. On considère l'ensemble borné $E = \{x \in [a, b] : f(x) \leq r\}$. Noter que $E \neq \emptyset$ puisque $a \in E$. On pose $c := \sup E$. c est un point adhérent à E, donc il existe une suite d'éléments $x_n \in S$ qui convege vers c. Par la continuité de f :

$$f(c) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) \leq r.$$

$r < f(b)$ implique $c < b$. Par conséquent, l'intervalle semi-ouvert $]c, b]$ est non vide et $f(x) > r$ pour tout $x \in]c, b]$. Par conséquent,

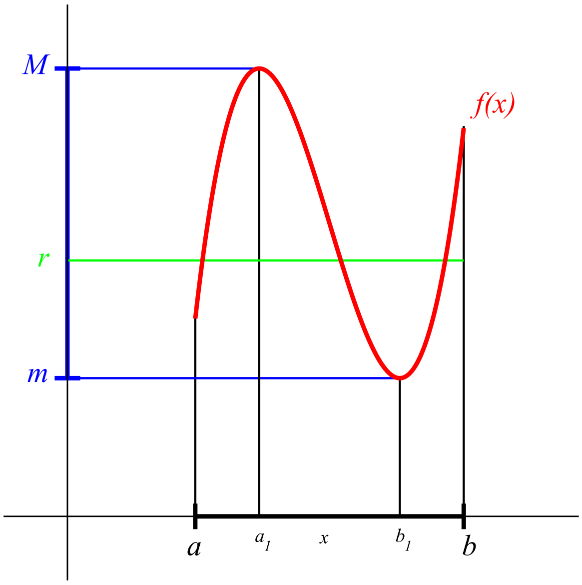
$$f(c) = \lim_{n \to +\infty} f(c + \frac{1}{n}) \geq r.$$

d'où $f(c) = r$. □

Remarque. Si $f(a) > f(b)$ la conclusion du théorème de la valeur intermédiaire reste évidemment vraie en appliquant le théorème à $-f$.

Théorème 2.10. **- *Théorème du transport des intervalles.*** *Soit f une fonction continue définie sur l'intervalle borné et fermé $[a, b]$. Alors l'ensemble des images de f est l'intervalle borné et fermé $[\min_{x\in[a,b]} f(x), \max_{x\in[a,b]} f(x)]$.*

Démonstration. Le théorème du transport des intervalles est un corollaire du théorème 2.8 et du théorème de la valeur intermédiaire. □



L'image d'une fonction continue sur $[a, b]$ et théorème de la valeur intermédiaire.

Corollaire (Solutions des équations). Soit f une fonction continue définie sur l'intervalle borné et fermé $[a, b]$ et $f(a)f(b) \leq 0$ Alors léquation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a, b]$.

Proposition. Soit $h : [0, 1] \to [0, 1]$ continue. Alors, l'équation

$$x = h(x)$$

admet au moins une solution $\hat{x}$ dans $[0, 1]$. On appelle $\hat{x}$ un *point fixe* de h [1]. Plus généralement, soit $g : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue et surjective. Alors, l'équation

$$g(x) = h(x)$$

admet au moins une solution $\hat{x}$ dans $[0, 1]$.

1. C'est le théorème de Brouwer(1881-1966) pour des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

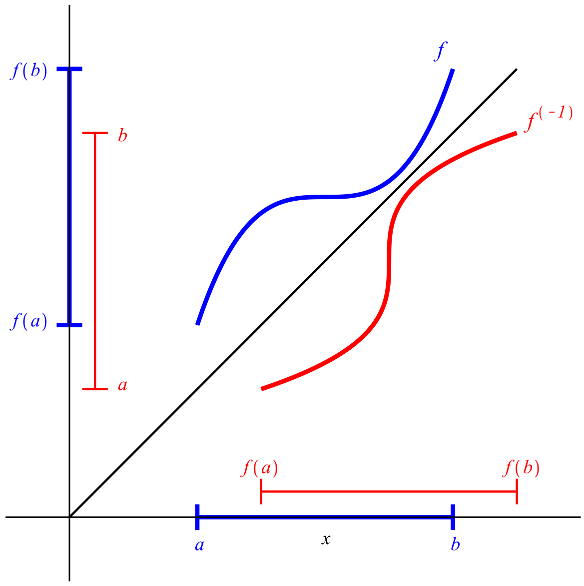
Démonstration. Posons $f(x) = g(x) - h(x)$. La fonction g est surjective, alors il existe $c, d \in [0,1]$ tels que $g(c) = 0$ et $g(d) = 1$. Par conséquent $f(c) = -h(c) \leq 0$ et $f(d) = 1 - h(d) \geq 0$. Par le corollaire ci-dessus il existe un $\hat{x}$ tel que $f(\hat{x}) = 0$. En particulier, si $g(x) = x$, g est surjective et il existe un point fixe de h.

Proposition.

1. Soit I un intervalle et $f : I \to J$ une fonction continue et injective. Alors, f est strictement monotone.
2. Soit I un intervalle et $f : I \to J$ une fonction continue et bijective. Alors, sa fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue.

Démonstration.

1. Il suffit de considérer le cas $I = [a, b]$ sinon prendre $a, b \in I, a < b$ arbitraire pour montrer la stricte montonie sur tout sous-intervalle borné et fermé de I, donc sur I. Sans restriction de la généralité on peut supposer que $f(a) < f(b)$. Soient $x_1, x_2 \in]a, b[, x_1 < x_2$ arbitraires. L'injectivité de f implique que $f(x_1), f(x_2) \in]f(a), f(b)[$ puisque si, par exemple, $f(x_1) < f(a)$ alors le théorème de la valeur intermédiaire garantit l'existence d'un $c \in]x_1, b[$ tel que $f(c) = f(a)$ ce qui est en contradiction avec l'injectivité. De plus $f(x_1) \neq f(x_2)$. Si $f(x_1) > f(x_2)$ par le théorème de la valeur intermédiaire il existe $c \in]x_2, b[$ tel que $f(c) = f(x_1)$ d'où la contradiction.
2. Comme avant il suffit de considérer le cas $I = [a, b]$. Sans restriction de la généralité on peut supposer que $f(a) < f(b)$, c'est-à-dire f est strictement croissante d'où $J = [f(a), f(b)]$. Soit (y_n) une suite d'éléments $y_n \in J$ qui converge vers y. Noter que $y \in J$ car J est fermé. On définit $x_n := f^{-1}(y_n)$. Alors $x_n \in I = [a, b]$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass il existe une sous-suite $(x_{n_k}) = (f^{-1}(y_{n_k}))$ qui converge vers un $x \in I$:
$$x = \lim_{k \to +\infty} f^{-1}(y_{n_k}).$$
En appliquant la fonction continue f à cette identité on obtient :
$$f(x) = f(\lim_{k \to +\infty} f^{-1}(y_{n_k})) = \lim_{k \to +\infty} f(f^{-1}(y_{n_k})) = y.$$
S'il y a une autre sous-suite $(x_{m_k}) = (f^{-1}(y_{m_k}))$ avec limite $\bar{x} \in I$ on trouve par le même argument que $f(\bar{x}) = y$ d'où $x = \bar{x}$ grâce à l'injectivité de f. Par conséquent, toute la suite (x_n) converge vers x. Il en suit que pour toute suite (y_n) une suite d'éléments $y_n \in J$ qui converge vers y :
$$\lim_{n \to +\infty} f^{-1}(y_n) = x = f^{-1}(y),$$
c'est-à-dire f^{-1} est continue en tout $y \in J$.



Une fonction continue strictement monotone sur $[a, b]$ et sa fonction réciproque.

2.7 Suites fortement divergentes

Introduction. Parmi toutes les suites divergentes, nous distinguerons en particulier celles qui tendent vers l'infini.

Définition. On dit que la suite (x_n) tend vers ∞ (respectivement $-\infty$) , si pour tout $C \in \mathbb{R}$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $x_n > C$ (respectivement $x_n < C$) et on note $\lim_{n \to +\infty} x_n = \infty$ (respectivement $\lim_{n \to +\infty} x_n = -\infty$). Une suite est *dite fortement divergente* si elle tend vers ∞ (respectivement $-\infty$).

Exemple. La *suite arithmétique* définie par $x_{n+1} = x_n + d$ et $x_0 = a$ tend vers ∞ si $d > 0$ et tend vers $-\infty$ si $d < 0$. En effet, par récurrence on peut facilement démontrer que $x_n = a + nd$.

Règles de calcul pour des valeurs limites. Dans certains cas les règles de calcul (2.1)-(2.3) pour des valeurs limites de suites convergentes s'étendent aux suites fortement divergentes si nous définissons les règles suivantes.

Théorème 2.11. - *Règles de calcul pour le symbole ∞.*

$$\infty + \infty = \infty, \quad \infty \cdot \infty = \infty, \quad 0/\infty = 0$$

$$c + \infty = \infty, \quad c/\infty = 0, \quad \textit{pour tout} \quad c \in \mathbb{R}$$
$$c \cdot \infty = \infty, \quad \textit{pour tout} \quad c > 0$$

Remarque. Evidemment on ne définit pas des expressions dites indéfinies comme $0 \cdot \infty$, ∞/∞, $\infty - \infty$, $\infty/0$ ou $c/0$.

2.8 Limites des suites récurrentes

On présente une approche assez générale pour résoudre les exercices qui consistent à déterminer la limite d'une suite récurrente. Les suites à étudier sont des suites linéaires de la forme $x_{n+1} = qx_n + b$ ou $x_{n+1} = (1-q)x_n + qx_{n-1}$ et des suites non-linaires $x_{n+1} = f(x_n)$. La théorie et l'algorithme pour résoudre explicitement les suites linéaires sont traités soit dans un cours d'algèbre linéaire soit dans un cours sur des équations différentielles et des systèmes dynamiques. Ici on s'intéresse uniquement au problème de convergence. Pour des suites non-linéaires on présente une méthode générale pour étudier le problème de convergence.

2.8.1 Suites récurrentes linéaires

La récurrence $x_{n+1} = qx_n + b$

Suites géométriques. Soient $a, q \in \mathbb{R}$ (ou plus généralement $a, q \in \mathbb{C}$). Considérons la suite géométrique $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_n = aq^n \tag{2.7}$$

Une suite géométrique est caractérisée par la propriété $x_{n+1} = qx_n$ et la valeur initiale $x_0 = a$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si $|q| < 1$ ou $q = 1$ sinon elle est divergente (sauf si $a = 0$). Plus précisement, si (x_n) est une suite satisfaisant $x_{n+1} = qx_n$ et $x_0 = a \neq 0$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \begin{cases} 0 & \text{si } |q| < 1, \\ a & \text{si } q = 1, \\ +\infty \operatorname{sgn}(a) & \text{si } q > 1, \\ \text{n'existe pas} & \text{autrement pour } a \neq 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Suites récurrentes. Soit x_n définie par

$$x_{n+1} = qx_n + b \quad \text{et} \quad x_0 = a \tag{2.9}$$

pour un $b \neq 0$. Nous supposons que la suite (x_n) converge et tend vers une limite x. La limite x est nécessairement une solution de l'équation linéaire

$$x = qx + b \quad \text{i.e.} \quad x = \frac{b}{1-q} \tag{2.10}$$

Par conséquent, si $q = 1$ la suite ne converge pas. On définit y_n par $y_n = x_n - x$. En cas de convergence (y_n) doit converger vers 0. En utilisant que $x = qx + b$ nous trouvons

$$x_{n+1} - x = qx_n + b - qx - b = q(x_n - x)$$

ou

$$y_{n+1} = qy_n \tag{2.11}$$

et $y_0 = x_0 - x = a - x$. On en déduit le résultat suivant :

Proposition 2.8.1. *La suite récurrente définie par (2.9) converge pour toute valeur initiale x_0 si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{b}{1-q}.$$

En particulier, la suite (x_n) est donnée par

$$x_n = \frac{b}{1-q} - \frac{bq^n}{1-q} + x_0 q^n.$$

Exemple. Calculer la limite de la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \frac{1}{4}(3x_n + 1), \quad x_0 = 0$$

Corrigé. Supposons que (x_n) converge. Notons x sa limite qui satisfait $x = \frac{1}{4}(3x+1)$, i.e. $x = 1$. Posons $y_n = x_n - x = x_n - 1$. Alors

$$x_{n+1} - 1 = \frac{1}{4}(3x_n + 1) - 1 = \frac{3}{4}(x_n - 1)$$

ou

$$y_{n+1} = \frac{3}{4} y_n$$

et $y_0 = x_0 - 1 = -1$. La suite (y_n) est une suite géométrique avec $q = \frac{3}{4}$. Donc (y_n) converge vers 0. Par conséquent, $x_n = y_n + x = y_n + 1$ converge vers 1.

La récurrence $x_{n+1} = (1-q)x_n + qx_{n-1}$

Transformation du problème. Considérons la suite récurrente (x_n) définie par

$$x_{n+1} = (1-q)x_n + qx_{n-1} \quad \text{et} \quad x_0 = a_0, x_1 = a_1 \tag{2.12}$$

où $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. La stratégie présentée avant (i.e. supposer que (x_n) converge, calculer la limite pour construire une suite (y_n) qui converge vers zéro) ne s'applique plus directement car l'équation pour la limite x donne l'équation triviale $x = (1-q)x + qx$ qui est satisfaite pour tout x. Pour trouver de nouveau une suite géométrique on définit d'abord une suite (d_n) par $d_n = x_n - x_{n-1}$. La suite (d_n) satisfait la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} d_{n+1} = x_{n+1} - x_n &= (1-q)x_n + qx_{n-1} - x_n \\ &= -qx_n + qx_{n-1} \\ &= -qd_n \end{aligned}$$

et $d_1 = x_1 - x_0 = a_1 - a_0$. Donc (d_n) est une suite géométrique. Ensuite on définit la suite (s_n) par $s_n = x_n + qx_{n-1}$. La suite (s_n) satisfait la relation de récurrence

$$\begin{aligned} s_{n+1} = x_{n+1} + qx_n &= (1-q)x_n + qx_{n-1} + qx_n \\ &= x_n + qx_{n-1} \\ &= s_n \end{aligned}$$

et $s_1 = x_1 + qx_0 = a_1 + qa_0$. Donc (s_n) est une suite constante.

On en déduit le résultat suivant :

Proposition 2.8.2. *La suite récurrente définie par (2.12) converge pour tout couple* $(x_0, x_1) = (a_0, a_1)$ *si et seulement si* $|q| < 1$. *Dans ce cas*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{a_1 + qa_0}{1+q}$$

Démonstration. La suite (x_n) converge si et seulement si elle est de Cauchy, donc si et seulement si la suite (d_n) converge vers 0, i.e. $|q| < 1$. Pour calculer sa limite on utilise la suite constante (s_n). On pose $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$. Alors

$$a_1 + qa_0 = s_1 = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} + q \lim_{n\to+\infty} x_n = (1+q)x.$$

$\square$

Remarque. La relation de récurrence (2.12) est une relation de récurrence linéaire qui peut être résolue explicitement (voir algèbre linéaire). On trouve que

$$x_n = \frac{a_1 + qa_0}{1+q} + \frac{(a_0 - a_1)(-q)^n}{1+q}.$$

On peut vérifier ce résultat par récurrence.

2.8.2 Suites récurrentes non-linéaires

Une méthode générale. Soit x_n définie par

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{et} \quad x_0 = a \tag{2.13}$$

pour une fonction réelle continue f. Nous supposons que la suite (x_n) converge et tend vers une limite x^*. La limite x est nécessairement une solution de l'équation

$$x^* = f(x^*). \tag{2.14}$$

Une telle solution x^* est aussi appelée un point fixe de f. Supposons que cette équation possède une seule solution. (S'il existe plusieurs solutions, on prend celle qui semble être la bonne limite ou on cherche des bornes sur la suite (x_n) pour exclure toutes les solutions sauf une ; s'il n'y a pas de solution, alors (x_n) ne peut pas converger). Comme pour le cas linéaire on définit y_n par $y_n = x_n - x^*$. En cas de convergence (y_n) doit converger vers 0. En utilisant $x^* = f(x^*)$ nous trouvons

$$x_{n+1} - x^* = f(x_n) - f(x^*)$$

ou

$$y_{n+1} = f(x^* + y_n) - f(x^*) \tag{2.15}$$

Ensuite on essaie de trouver des estimations de y_n qui garantissent que $|f(x^* + y_n) - f(x^*)| \leq q|y_n|$ pour une constante $q \in \mathbb{R}$ telle que $0 < q < 1$. Dans ce cas

$$|y_{n+1}| \leq q|y_n|$$

et donc par récurrence

$$|y_n| \leq q^n |y_0|$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = 0, \quad \text{ou} \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = x^*,$$

2.8.3 Exercices avec les corrigés

Introduction. Les exercices sont résolus par la méthode présentée ci-dessus. Bien évidemment il n'est pas exclu que pour certains problèmes il existe une solution plus directe.

Problème 1. Calculer la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}(3x_n - x_n^2 + 4), \quad x_0 = 0.$$

Corrigé. Si (x_n) converge, alors sa limite x est une solution de l'équation de degré 2 :

$$x = \frac{1}{3}(3x - x^2 + 4)$$

qui admet les deux racines $x_+ = 2$ et $x_- = -2$. Nous allons exclure la solution $x_- = -2$. Notons que $\frac{1}{3}(3x - x^2 + 4)$ admet son maximum pour $x_{\max} = \frac{3}{2}$. Donc

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}(3x_n - x_n^2 + 4) \leq \frac{1}{3}(3x_{\max} - x_{\max}^2 + 4) = \frac{25}{12}$$

pour tout $n \geq 0$. Nous allons montrer que $x_n \geq 0$ implique $x_{n+1} \geq 0$. D'après l'inégalité ci-dessus nous avons $x_n \leq \frac{25}{12}$. Notons d'abord que $\frac{1}{3}(3x - x^2 + 4) = \frac{1}{3}(1 + x)(4 - x)$. Donc si $x_n \geq 0$, alors

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}(1 + x_n)(4 - x_n) \geq 0$$

car les deux facteurs sont positifs. Par conséquent, si la suite (x_n) converge sa limite est $x = x_+ = 2$.

Ensuite nous montrons que la suite (x_n) est convergente. Posons $y_n = x_n - x = x - 2$. La suite (y_n) satisfait

$$\begin{aligned} y_{n+1} = x_{n+1} - 2 &= \frac{1}{3}(3x_n - x_n^2 + 4) - 2 \\ &= \frac{1}{3}(1 - x_n)(x_n - 2) \\ &= \frac{1}{3}(1 - x_n)y_n. \end{aligned}$$

Noter que $0 \leq x_n \leq 25/12$ implique $-13/12 \leq 1 - x_n \leq 1$ et donc

$$\left|\frac{1 - x_n}{3}\right| \leq \frac{13}{36} = q$$

ce qui implique la convergence, i.e. $\lim_{n\to+\infty} x_n = 2$.

Problème 2. Calculer la limite de la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{3x_n + 1}, \quad x_0 = 1$$

Corrigé. Si (x_n) converge, alors sa limite x est une solution de l'équation de degré 2 :

$$x = \frac{x+1}{3x+1}$$

qui admet les deux racines $x_+ = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ et $x_- = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$. On montre facilement par récurrence que $x_n \geq 0$ implique $x_{n+1} \geq 0$, donc $x_n \geq 0$ pour tout entier naturel n car $x_0 = 1 \geq 0$. Par conséquent si la suite (x_n) converge elle converge vers $x = x_+ = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Posons $y_n = x_n - x = x_n - \frac{1}{3}\sqrt{3}$. La suite (y_n) satisfait

$$\begin{aligned} y_{n+1} = x_{n+1} - x &= \frac{x_n + 1}{3x_n + 1} - \frac{x+1}{3x+1} \\ &= -2\frac{x_n - x}{(3x+1)(3x_n+1)} \\ &= \frac{-2y_n}{(3x+1)(3x_n+1)} \end{aligned}$$

De plus, en utilisant $x_n \geq 0$ nous avons

$$\left|\frac{-2}{(3x+1)(3x_n+1)}\right| \leq \frac{2}{3x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}+1} = q < 1$$

d'où la convergence de la suite (x_n) : $\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Problème 3. Calculer la limite de la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}, \quad x_0 = 0$$

Corrigé. C'est un problème du même type que le problème 2. Si (x_n) converge, alors sa limite x est une solution de l'équation de degré 2 :

$$x = \frac{1}{1+x}$$

qui admet les deux racines $x_+ = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ et $x_- = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$. On montre facilement par récurrence que $x_n \geq 0$ implique $x_{n+1} \geq 0$, donc $x_n \geq 0$ pour tout entier naturel n car $x_0 = 0$. Par conséquent si la suite (x_n) converge, elle converge vers $x = x_+ = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Posons $y_n = x_n - x$. La suite (y_n) satisfait

$$\begin{aligned} y_{n+1} = x_{n+1} - x &= \frac{1}{1+x_n} - \frac{1}{1+x} \\ &= -\frac{x_n - x}{(1+x)(1+x_n)} \\ &= \frac{-y_n}{(1+x)(1+x_n)}. \end{aligned}$$

De plus, en utilisant $x_n \geq 0$ nous avons

$$\left|\frac{-1}{(1+x)(1+x_n)}\right| \leq \frac{1}{1+x} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = q < 1$$

d'où la convergence de la suite (x_n) : $\lim_{n\to+\infty} x_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$

Remarque. La suite (x_n) représente le développement de $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ en fraction continue :

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}.$$

Problème 4. Calculer la limite de la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \sqrt{3x_n}, \quad x_0 = 1.$$

Corrigé. On va appliquer la même méthode. Si (x_n) converge, alors sa limite x est une solution de l'équation de degré 2 :

$$x^2 = 3x$$

qui admet les deux racines $x_+ = 3$ et $x_- = 0$. On montre facilement par récurrence que $x_n \geq 1$ implique $x_{n+1} \geq 1$, donc $x_n \geq 1$ pour tout entier naturel n car $x_0 = 1$. Par conséquent si la suite (x_n) converge elle converge vers $x = x_+ = 3$. Posons $y_n = x_n - x$. La suite (y_n) satisfait

$$\begin{aligned} y_{n+1} = x_{n+1} - x &= \sqrt{3x_n} - \sqrt{3x} \\ &= \sqrt{3}\frac{x_n - x}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{y_n\sqrt{3}}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

De plus, en utilisant $x_n \geq 1$ nous avons

$$\left|\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}}\right| \leq \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = q < 1$$

d'où la convergence de la suite (x_n) : $\lim_{n\to+\infty} x_n = 3$.

Remarque. On peut facilement donner la suite (x_n) explicitement : on pose $z_n = \ln x_n$, alors z_n vérifie la relation de récurrence linéaire :

$$z_{n+1} = \frac{z_n}{2} + \frac{\ln 3}{2}, \quad z_0 = 0.$$

Sa solution est donnée par

$$z_n = \ln(3)\big(1 - 2^{-n}\big)$$

donc

$$x_n = 3 \cdot 3^{-2^{-n}}.$$

2.8.4 Le théorème du point fixe de Banach

En généralisant la méthode presentée dans 2.8.2 on peut démontrer un théorème célèbre (et important !) :

Théorème 2.12. - ***théorème de point fixe de Banach.*** *Soit I un intervalle fermé et $f : I \to I$ une application contractante, c'est-à-dire il existe $0 < q < 1$ tel que*

$$|f(x) - f(x')| \leq q|x - x'| \tag{2.16}$$

pour tout $x, x' \in I$. Alors f admet un unique point fixe x^* dans I.

Démonstration. Pour $x_0 \in I$ on considère la récurrence (2.13). Notons d'abord que $x_n \in I$ implique $x_{n+1} \in I$ puisque $f : I \to I$. Par récurrence pour tout entier naturel n :

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq q|x_n - x_{n-1}| = \ldots \leq q^n|x_1 - x_0|.$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy puisque pour tout n, k des entiers positifs, par une somme téléscopique et l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
|x_{n+k} - x_n| &= \Big|\sum_{i=1}^{k}(x_{n+i} - x_{n+i-1})\Big| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k}|x_{n+i} - x_{n+i-1}| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} q^{n+i-1}|x_1 - x_0| = q^n|x_1 - x_0|\sum_{i=1}^{k} q^{i-1} \\
&\leq \frac{q^n|x_1 - x_0|}{1-q}.
\end{aligned}$$

Soit x^* la limite de cette suite. Noter que $x^* \in I$ puisque I est fermé. On montre que x^* est un point fixe de f. Pour tout n :

$$\begin{aligned}
|f(x^*) - x^*| &= |f(x^*) - f(x_n) + x_{n+1} - x^*| \\
&\leq |f(x^*) - f(x_n)| + |x_{n+1} - x^*| \\
&\leq q|x_n - x^*| + |x_{n+1} - x^*| \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Il reste à démontrer l'unicité. Soit $x^{**} \in I$ un autre point fixe, alors

$$|x^{**} - x^*| = |f(x^{**}) - f(x^*)| \leq q|x^{**} - x^*|$$

d'où $x^{**} = x^*$. □

Remarque. Le théorème du point fixe nous assure l'existence d'une solution unique x^* de l'équation $x = f(x)$ dans I pour toute application contractante et, en plus, que toute suite récurrente définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ avec condition initiale x_0 dans I converge vers x^*. Le théorème permet donc d'analyser plus profondément ces récurrences. Pour l'illustrer nous allons réexaminer un exemple précédent :

Exemple. On considère la récurrence définie par

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}(3x_n - x_n^2 + 4).$$

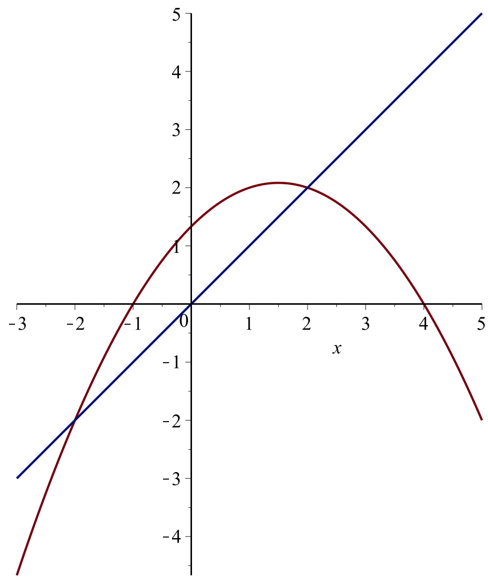
Pour pouvoir appliquer le théorème du point fixe on espère de trouver un intervalle fermé I sur lequel $f(x) := \frac{1}{3}(3x - x^2 + 4)$ est une application contractante $f : I \to I$. On avait déjà démontré que $f(x) \leq \frac{25}{12}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [-1, 4]$ (les zéros se trouvent en -1 et 4). Par conséquent, $f : [-1, 4] \to [0, \frac{25}{12}] \subset [-1, 4]$. Il faut encore vérifier si f est une application contractante sur ce domaine. On a

$$f(x) - f(x') = (x - x')\frac{3 - x - x'}{3}.$$

Donc f n'est pas une application contractante sur ce domaine puisqu'en choisissant $x = 3, x' = 4$ le deuxième facteur devient $-4/3$ donc plus grand que 1 en valeur absolue (de même pour $x, x' \leq 0$. On essaie de prendre un domaine plus petit. Un choix suffisant est, par exemple, $I = [1, \frac{25}{12}]$ puisque $f(x) \in [1, 2] \subset I$ pour tout $x \in I$ et

$$\frac{-7}{18} \leq \frac{3 - x - x'}{3} \leq \frac{1}{3}$$

d'où le choix $q = 7/18$ est admissible. Par le théorème du point fixe de Banach pour toute valeur initiale $x_0 \in I$ la suite définie par cette récurrence converge vers le point fixe $x^* = 2$. Noter que la valeur initiale $x_0 = 0$ n'est pas dans I, mais $x_1 = 4/3 \in I$ d'où la convergence vers $x^* = 2$.



Le graphe de $f(x) := \frac{1}{3}(3x - x^2 + 4)$ et la droite d'équation $y = x$.

Chapitre 3

Séries numériques

Nous appliquons les résultats du Chapitre 2 au calcul des séries numériques. Nous démontrons que le nombre d'Euler peut être représenté par une série et définissons la série exponentielle.

Notions à apprendre. Série convergente ou divergente, série absolument convergente, série géométrique, critère de majoration, critère de d'Alembert, critère de Cauchy, série alternée, critère de Leibniz, série exponentielle, séries pour sin, cos, sinh et cosh.

Compétences à acquérir. Comprendre les différentes notions de convergence, connaître et savoir appliquer les critères de convergence et démontrer la convergence ou la divergence d'une série donnée à l'aide de ces critères, calculer la valeur s'une série convergente dans des cas simples à l'aide des règles de calcul établies.

3.1 Convergence d'une série

Définition - série numérique. Soit (a_k) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Toute expression formelle de la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots \tag{3.1}$$

est appelée une *série numérique.* Les a_k sont appelés les *termes* de la série.

L'expression (3.1) est formelle car elle demande une infinité d'additions. Pour donner un sens à (3.1) nous allons étudier la suite (S_n) des *sommes partielles,* définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \ .$$

Définition - convergence d'une série. La série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ est dite *convergente* si la suite (S_n) des *sommes partielles* converge, autrement elle est appelée *di-*

vergente. La limite $S = \lim_{n \to +\infty} S_n$ est appelée la *valeur* de la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Si la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge on on dit aussi que la suite des a_k est *sommable*, ou *sommable de somme* S. Si la suite des S_n diverge fortement, c.-à-d. si $\lim_{n \to +\infty} S_n = \infty$ ou $\lim_{n \to +\infty} S_n = -\infty$, on écrit respectivement $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$ et $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = -\infty$.

Relation de récurrence. Les sommes partielles S_n vérifient la récurrence $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$.

Théorème 3.1. ***-Théorème - critère principal de convergence.***

La série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *converge si et seulement si pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe un entier naturel* N *tel que pour tout* $n > m \geq N$ *on a* $\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon$.

Démonstration. Une série converge si la suite des sommes partielles S_n convergent. La suite (S_n) est donc une suite de Cauchy, c.-à-d. pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier naturel N tel que pour tout $n > m \geq N$ on a $|S_n - S_m| < \varepsilon$ ce qui montre le théorème puisque $S_n - S_m = \sum_{k=m+1}^{n} a_k$. □ □

Pour le cas $n = m + 1$ le Théorème 3.1 donne la condition de convergence nécessaire suivante :

Corollaire 3.2. - ***condition nécessaire pour la convergence.***

Si la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *converge, alors la suite des* a_k *converge vers zéro.*

Exemple. La série $\sum_{k=0}^{\infty} \sin(k)$ est divergente puisque la suite des $\sin(k)$ est divergente.

Nous introduisons maintenant une deuxième notion de convergence pour une série, celle de la convergence absolue. Nous verrons que cette notion est plus forte dans le sens que la convergence absolue implique la convergence mais pas vice versa, et ils existent donc des séries convergentes qui ne sont pas absolument convergent. L'avantage de la notion de la convergence absolue est quelle permet d'établir des critères de convergence facilement applicables. En plus nous verrons que la convergence absolue est une condition nécessaire et suffisante pour que la valeur d'une série soit indépendante de la numérotation des éléments de la suite (a_k).

Définition - convergence absolue d'une série. La série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ est dite absolument *convergente* si la série $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ des valeurs absolues converge.

Théorème 3.3. - *absolument convergent implique convergent*

Si la série des valeurs absolues $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ converge, alors la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge.

Démonstration. Ce théorème est une conséquence de l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue qui implique

$$|S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \ .$$

Puisque la série est absolument convergente nous avons par le Théorème 3.1 que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier naturel N tel que, pour tout $n > m \geq N$, $\left| \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \right| = \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon$, ce qui montre que la suite (S_n) des sommes partielles est une suite de Cauchy. $\square$

Exemple - série géométrique. Soit $q \in \mathbb{R}$. La série avec les termes $a_k = q^k$ est appelée série géométrique. Elle converge absolument si $|q| < 1$ et

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \ . \tag{3.2}$$

Pour $q \leq -1$ la série diverge et pour $q \geq 1$ elle diverge fortement.

Démonstration. Pour $q \neq 1$ on a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Si $|q| < 1$, alors $\left| \sum_{k=0}^{n} q^k - \frac{1}{1-q} \right| \leq \frac{1}{1-q} |q|^{n+1} \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Pour $q \leq -1$ les S_n sont positives pour les n pairs et négaitfs ou nuls pour les n impairs. Pour $q > 1$ les S_n sont positives et $\lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} = \infty$. Pour $q = 1$ on a $S_n = n + 1 \to \infty$ lorsque $n \to \infty$. $\square$

Exemple - série harmonique. La série harmonique $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ est divergente. Il en suit que le Corollaire 3.2 donne une condition nécessaire mais pas suffisante pour la convergence d'une série.

Démonstration. Montrons la divergence de la série harmonique. Soit p un entier naturel. Nous allons montrer par récurrence que

$$S_{2^p} = \sum_{k=1}^{2^p} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{p}{2}$$

Pour $p = 0$ cette inégalité est vraie. Donc

$$\begin{aligned} S_{2^{p+1}} = S_{2^p} + \sum_{k=2^p+1}^{2^{p+1}} \frac{1}{k} &\geq 1 + \frac{p}{2} + \sum_{k=2^p+1}^{2^{p+1}} \frac{1}{k} \\ &\geq 1 + \frac{p}{2} + (2^{p+1} - 2^p)\frac{1}{2^{p+1}} = 1 + \frac{p+1}{2}. \end{aligned}$$

La sous-suite des S_{2^p} diverge et donc, par conséquent, la suite des S_n aussi. □

Exemple - série harmonique alternée. De l'exemple précédent on déduit que la série harmonique alternée, $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ n'est pas absolument convergente. Comme nous allons montrer dans la Section 3.4 elle est néanmoins convergente. Il existent donc des séries qui sont convergentes mais pas absolument convergentes.

Motivés par ces exemples nous analysons maintenant deux situations pour lesquelles nous pouvons facilement établir des critères de convergences : les séries à termes positifs ainsi que les séries alternées.

3.2 Séries à termes positifs ou nuls

Soit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ une série à termes a_k positifs ou nuls. La suite des sommes partielles S_n satisfait la récursion $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$ et on a donc $S_{n+1} \geq S_n$. Par le Théorème de Bolzano Weierstrass la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ est donc convergente si et seulement si la suite des sommes partielles est bornée, et la série est fortement divergente sinon. Nous écrivons $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$ si la série converge et $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$ si la série diverge fortement.

Exemple. La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ converge car $S_n = \frac{n}{n+1}$ (voir éq. (1.2)), et donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1 \ .$$

Proposition 3.2.1. ***- critère de comparaison.***

Soient (a_n) et (b_n) deux suites d'éléments positifs ou nul et soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $a_n \leq b_n$. Alors,

$$\begin{array}{rclcl} \sum_{k=0}^{\infty} b_k & < & \infty & \textit{implique que} & \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty \ , \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k & = & \infty & \textit{implique que} & \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \infty \ . \end{array}$$

Exemple. La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ diverge si $0 < \alpha \leq 1$ et converge si $\alpha > 1$.

Démonstration. En effet, si $0 < \alpha \leq 1$ on a $\frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{k}$ et donc

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \infty \ ,$$

car la série harmonique est divergente. Si $\alpha \geq 2$ on utilise (pour $k > 2$) les majoration $\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}$ et donc

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} &\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \\ &= 1 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = 2 \ . \end{aligned}$$

Si $1 < \alpha \leq 2$ nous montrons par récurrence que pour tout entier naturel p

$$S_{2^p-1} = \sum_{k=1}^{2^p-1} \frac{1}{k^\alpha} \leq \sum_{n=0}^{p-1} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n \ .$$

Pour $p = 1$ cette inégalité est vraie. Donc

$$\begin{aligned} S_{2^{p+1}-1} = S_{2^p-1} + \sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{k^\alpha} &\leq \sum_{n=0}^{p-1} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n + \sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{k^\alpha} \\ &\leq \sum_{n=0}^{p-1} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n + (2^{p+1} - 2^p) \cdot \frac{1}{2^{\alpha p}} \\ &= \sum_{n=0}^{p-1} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^p \\ &= \sum_{n=0}^{p} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n . \end{aligned}$$

La suite de sommes partielles (S_n) est croissante. Pour tout n il existe p tel que $n \leq 2^p - 1$ et par conséquent

$$S_n \leq S_{2^p-1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n = \frac{1}{1 - 2^{1-\alpha}}$$

d'où la convergence de (S_n). □

Cette technique de "densifier" une série s'étend également à une situation plus générale :

Proposition - Critère de densification . Soit (a_n) une suite décroissante d'éléments positifs ou nul. Alors, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge si et seulement si $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ converge.

3.3 Séries alternées

Définition - série alternée. Une série de la forme $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k b_k$, avec (b_k) une suite d'éléments positifs ou nul est appelée une suite *alternée.*

Remarque. Si une série alternée converge on a $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k b_k = -\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1} b_k$, car pour tout $n \geq 0$ on a $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k b_k = -\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1} b_k$.

Théorème 3.4. - *critère de convergence de Leibniz.* *Soit (b_k) une suite décroissante d'éléments positifs ou nuls telle que $\lim_{k \to +\infty} b_k = 0$. Alors la série alternée $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k b_k$ converge.*

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$ soit $x_n = S_{2n+1}$ et $y_n = S_{2n}$. Nous montrons montrer que les suites (x_n) et (y_n) satisfont le troisième critère de monotonie du Chapitre 2.3. La monotonie de (a_n) implique que (x_n) est croissante et que (y_n) est décroissante car

$$x_{n+1} - x_n = S_{2n+3} - S_{2n+1} = -b_{2n+3} + b_{2n+2} \geq 0$$

et

$$y_{n+1} - y_n = S_{2n+2} - S_{2n} = b_{2n+2} - b_{2n+1} \leq 0.$$

De plus $x_n - y_n = S_{2n+1} - S_{2n} = -b_{2n+1} \leq 0$. Alors, (x_n) et (y_n) sont bornés et

$$\lim_{n \to +\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n \to +\infty}(-a_{2n+1}) = 0.$$

Le troisième critère de monotonie du théorème 2.4 implique que les suites (x_n) et (y_n) convergent vers la même limite. Ainsi, la suite des sommes partielles S_n converge.

□

Remarque. Une série alternée satisfait pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$S_{2n+1} \leq \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k b_k \leq S_{2n}.$$

Exemple. Par le critère de Leibniz la série harmonique alternée, $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$, est convergente. En appliquant les estimations ci-dessus pour $n = 2$ et $n = 3$ nous trouvons

$$\frac{7}{12} < \frac{37}{60} < \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} < \frac{47}{60} < \frac{5}{6}.$$

Exemple. Par le critère de Leibniz la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k^2}$ est convergente. La série est en fait absolument convergente car $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} = 2.$

3.4 Critères de convergence

Il est en général plus facile d'étudier si une série est absolument convergente car nous pouvons appliquer les critères de comparaison que nous avons établis pour des séries à termes positifs.

Théorème - critère de comparaison. Soient $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ une série absolument convergente et $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|a_k| \leq |b_k|$. Alors, la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge absolument.

Soient $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ une série qui n'est pas absolument convergente et $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|a_k| \geq |b_k|$. Alors, la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ne converge pas absolument.

Les critères suivants sont des conséquences du critère de comparaison où (b_k) est une suite géométrique, c.-à-d. $b_k = C\rho^k$. Voir ((3.2))

Théorème - critère de d'Alembert. Soit (a_k) une suite d'éléments de $\mathbb{R}^*$ pour laquelle $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \rho$. Alors, si $\rho < 1$ la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge absolument et diverge si $\rho > 1$.

Théorème - critère de d'Alembert généralisé (le cas convergent)**.** Soient (a_k) une suite d'éléments de $\mathbb{R}^*$ pour laquelle il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\rho < 1$ tels que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \rho \quad \text{pour tout} \quad n \geq n_0$$

alors la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge absolument. En particulier, si

$$\limsup_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \rho$$

pour un $\rho < 1$, alors la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge absolument.

Théorème - critère de Cauchy. Soient (a_k) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ pour laquelle $\limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \rho$. Alors, si $\rho < 1$ la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge absolument et diverge si $\rho > 1$.

Remarque. Si la suite $(\sqrt[k]{|a_k|})_k$ est convergente, alors $\limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$.

Application. Soit la série géométrique $a_k = a_0 q^k$. Alors $\rho = |q|$ puisque

$$\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = |q|.$$

Remarque - Domaine d'application des critères. Rappelons que le critère de d'Alembert et le critère de Cauchy ne donnent aucune information si la suite des a_k admet une décroissance polynomiale. Par exemple, si $a_k = \frac{1}{k^\alpha}$, $\alpha > 0$, $k \geq 1$ on obtient $\rho = 1$ pour les deux critères. En effet,

$$\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to+\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{\alpha} = 1.$$

et

$$\lim_{k\to+\infty}\sqrt[k]{\frac{1}{k^\alpha}} = 1.$$

Dans ce cas il faut directement appliquer le critère de comparaison. Noter également que

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left(\frac{k}{k+1}\right)^{\alpha} < 1 \quad \text{pour tout } k$$

mais il n'existe pas de n_0 et de $\rho < 1$ tel que $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq \rho$ pour tout $k \geq n_0$.

Le fait que le critère de Cauchy donne la même valeur pour ρ que le critère de d'Alembert n'est pas particulier à cet exemple.

Remarque - Comparer d'Alembert et Cauchy Si $\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \rho$ alors $\lim_{k\to+\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = \rho$. Si on trouve $\rho = 1$ par le critère de d'Alembert (donc d'Alembert ne donne aucune information sur la convergence ou divergence de la série) il ne faut pas tester le critère de Cauchy car il donnera $\rho = 1$ aussi. En revanche il y a des séries pour lesquelles la limite du critère de d'Alembert n'existe pas mais le critère de Cauchy marche comme démontre notre premier exemple ci-dessous.

Exemple. Pour $k \in \mathbb{N}$ soit a_k défini par

$$a_k = \left(3 - 2 \cdot (-1)^k\right) \left(\frac{3}{4}\right)^k \quad \text{c.-à-d.} \quad a_k = \begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^k & \text{si } k \text{ est pair} \\ 5\left(\frac{3}{4}\right)^k & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

En appliquant le critère de majoration avec $b_k = 5\left(\frac{3}{4}\right)^k$ nous concluons que la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge absolument. Le critère de d'Alembert n'est pas applicable car

$$\left|\frac{a_{2m+1}}{a_{2m}}\right| = \frac{15}{4} \quad \text{et} \quad \left|\frac{a_{2m}}{a_{2m-1}}\right| = \frac{3}{20},$$

donc $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ ne converge pas. La généralisation du critère de d'Alembert n'est pas applicable non plus. Le critère de Cauchy nous donne la convergence de $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ car

$$\sqrt[2m]{|a_{2m}|} = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad \sqrt[2m+1]{|a_{2m+1}|} = \frac{3}{4} \sqrt[2m+1]{5}$$

et par conséquent

$$\limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{3}{4} \sqrt[k]{5} = \frac{3}{4} < 1.$$

Nous calculons la série.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k &= \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m+1} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{3^2}{4^2}\right)^m + 5 \cdot \frac{3}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{3^2}{4^2}\right)^m \\ &= \frac{1}{1 - (\frac{3}{4})^2} + 5 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1 - (\frac{3}{4})^2} = \frac{76}{7}. \end{aligned}$$

3.5 Sur l'ordre des termes dans une série

Dans le dernier exemple de la section précédente nous avons changé l'ordre des termes de la série pour calculer séparément la somme sur les indices pairs et impairs. Nous avons tacitement supposé que cela ne change pas le résultat. Cette propriété est loin d'être évidente. On peut démontrer que les séries absolument convergentes sont les seules pour lesquelles l'ordre des termes n'a pas d'importance où nous allons distinguer deux situations : Le changement d'ordre des a_k donné par une permutation et le changement d'ordre par sommation par sous-suite.

Théorème - Commutativité pour les séries absolument convergentes. Pour une série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolument convergente la limite ne dépend pas de l'ordre des termes a_k.

1. Pour toute application bijective σ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$, on a
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$
2. Pour toute paire des sous-suites disjointes $(m_k), (n_k)$ de $\mathbb{N}$ telles que $\{m_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{n_k : k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$ on a
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{m_k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{n_k}.$$
En choissisant $m_k = 2k$, $n_k = 2k+1$ on obtient en particulier
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}.$$

Nous donnons un exemple pour montrer qu'il est possible de réordonner les termes d'une série convergente mais non absolument convergente afin de faire converger la série finale vers une autre limite.

Exemple. La série
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \dots$$
est convergente mais non absolument convergente.

Démonstration. Nous avons trouvé que
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} < \frac{5}{6}.$$
Nous allons réordonner les termes de la façon suivante :
$$(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}) + \dots$$
Chaque parenthèse, notée p_m, $m \geq 1$ contient trois termes :
$$p_m = \frac{1}{4m-3} + \frac{1}{4m-1} - \frac{1}{2m} = \frac{8m-3}{2m(4m-1)(4m-3)} > 0$$
Donc
$$\sum_{m=1}^{\infty} p_m = \frac{5}{6} + \sum_{m=2}^{\infty} p_m > \frac{5}{6}.$$
et par conséquent
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} \neq \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4m-3} + \frac{1}{4m-1} - \frac{1}{2m}\right).$$
□

Remarque. Pour les séries

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k(k+1)}$$

nous pouvons réordonner les termes comme ci-dessus sans que le résultat change car les deux séries sont absolument convergentes.

Produit de séries absolument convergentes. Soient $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ deux séries absolument convergentes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

3.6 La série exponentielle

Nous définissons la fonction exponentielle à l'aide d'une série et étudions ses propriétés. Les fonctions trigonométriques sin, cos et hyperboliques sinh, cosh sont construites à partir de la série exponentielle. Nous présentons également quelques propriétés élémentaires.

Théorème 3.5. ***- série exponentielle.***

1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit un nombre $\exp(x)$ par la série absolument convergente*
$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \ .$$
2. *Le nombre d'Euler e défini par $e = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ satisfait $e = \exp(1)$, c.-à-d.*
$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \ .$$
3. *Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$, c.-à-d.*
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}\right).$$
4. *La fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \to]0,\infty[$ est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. 1. Montrons que la série est absolument convergente. Posons $a_k = \frac{x^k}{k!}$. Par le critère de d'Alembert

$$\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{x}{k+1}\right| = 0.$$

Pour tout $n \geq 1$, on a par la formule du binôme de Newton

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}n^{-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)\end{aligned}$$

En utilisant $\left(1-\frac{j}{n}\right) < 1$ nous obtenons le majorant

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \equiv S_n.$$

2. Par l'inégalité de Bernoulli nous trouvons, pour $k \geq 1$ et $k \leq n$

$$\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right) \geq \left(1-\frac{k-1}{n}\right)^k \geq 1-\frac{k(k-1)}{n}$$

et donc, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)\\ &\geq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{k(k-1)}{n}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-2)!} = S_n - \frac{1}{n}\cdot S_{n-2}.\end{aligned}$$

Donc $e = \exp(1)$ par le théorème des deux gendarmes.

3. En appliquant le résultat sur le produit de séries absolument convergentes on trouve

$$c_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

4. D'abord notons que $\exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\exp(x) > 1$ pour tout $x > 0$. Soit $x_1 < x_2$. Alors,

$$\exp(x_2) - \exp(x_1) = \exp(x_1)(\exp(x_2 - x_1) - 1) > 0.$$

Cette identité implique également qu'il suffit de montrer la continuité de $\exp(x)$ en $x = 0$. Soit (x_n) une suite qui converge vers 0. Nous pouvons supposer $|x_n| < 1$. En utilisant

$$\exp(x_n) - 1 = x_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{x_n^{k-1}}{(k-1)!}$$

nous obtenons l'estimation

$$|\exp(x_n) - 1| \leq |x_n| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_n|^{k-1}}{(k-1)!} \leq |x_n|\, e$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp(x_n) = 1 = \exp(0)$

□

Calcul pratique. Pour calculer $\exp(x)$ avec une précision donnée on note que pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x = n + h$ et $|h| \leq \frac{1}{2}$. Donc $\exp(x) = e^n \exp(h)$. Donc on calcule $\exp(x)$ à l'aide de la série seulement pour des arguments $|h| \leq 1$. Le nombre $\exp(h)$ est approché par une somme partielle $S_N = \sum\limits_{k=0}^{N} \frac{h^k}{k!}$. On écrit

$$\exp(h) = \sum_{k=0}^{N} \frac{h^k}{k!} + r_{N+1}(h) \quad \text{et} \quad r_{N+1}(h) = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{h^k}{k!}$$

Soient $N \in \mathbb{N}$ et $0 < h \leq 1$. Pour contrôler l'erreur on écrit

$$r_{N+1}(h) = \frac{h^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{h^{k-N-1}(N+1)!}{k!} = \frac{h^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{h^j (N+1)!}{(N+1+j)!}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} |r_{N+1}(h)| &\leq \frac{h^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(N+1)h^j}{(N+1)(N+2)\cdot \ldots \cdot (N+1+j)} \\ &\leq \frac{h^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{h^j}{(N+2)^j} = \frac{h^{N+1}}{(N+1)!} \frac{N+2}{N+2-h} \\ &\leq \frac{h^{N+1}}{(N+1)!} \frac{N+2}{N+1} \leq \frac{N+2}{(N+1)!(N+1)}. \end{aligned}$$

Pour calculer le nombre d'Euler e le choix $N = 14$ (noter que $h = 1$) donne une erreur $\leq 1.23 \cdot 10^{-11}$.

Fonction logarithmique. Il suit du théorème 3.5 que $\exp : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ est bijective : l'injectivité est une conséquence de la monotonie stricte. Pour démontrer la surjectivité noter d'abord que $e^n = \exp(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ (démonstration par récurrence) et

$$\lim_{n\to-\infty} \exp(n) = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \exp(n) = +\infty.$$

Par conséquent, pour tout $y > 0$ il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\exp(n) \leq y \exp(n+1)$ et on conclut par le théorème de la valeur intermédiaire. Donc $\exp : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ admet une fonction réciproque strictement croissante et continue.

Cette fonction réciproque est appelée le logarithme naturel ou le logarithme népérien et notée par $\ln(x)$.

$$\ln : \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad \ln(\exp(x)) = \exp(\ln(x)) = x$$

et $\ln(\exp(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\exp(\ln(y)) = y$ pour tout $y > 0$. Le logarithme satisfait la propriété

$$\ln(st) = \ln(s) + \ln(t), \quad s, t > 0.$$

De plus, $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$. Nous allons voir au chapitre 5 que le logarithme naturel admet un développement en séries mais cette série ne converge pas sur tout $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$.

Série exponentielle généralisée. Le logarithme naturel permet d'écrire la fonction exponentielle de base $a > 0$ et $a \neq 1$:

$$\exp_a(x) = \exp(x \ln a)$$

et sa fonction réciproque donnée par $\ln x / \ln a$ pour $x > 0$. Par récurrence on trouve d'abord $a^n = \exp_a(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et ensuite $a^r = \exp_a(r)$ pour tout $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. C'est pourquoi on pose :

$$a^x := \exp_a(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, a > 0. \tag{3.3}$$

Cette notation est justifiée par le fait que $\exp_a(x)$ est l'unique prolongement par continuité de $a^x : \mathbb{Q} \to]0, \infty[$ grâce au résultat suivant :

Proposition. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui satisfait l'équation fonctionelle

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}$$

Alors, soit $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit $f(1) =: a > 0$ et $f(x) = a^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration. On a $f(1) \geq 0$ car $f(1) = f(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2})^2$. Si $f(1) = 0$, alors

$$f(x) = f(x-1+1) = f(x-1)f(1) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Si $f(1) > 0$ posons $a := f(1)$. On a $f(0) = 1$ et $f(-1) = a^{-1}$ car

$$a = f(1+0) = f(1)f(0) = af(0) \quad \text{et} \quad 1 = f(0) = f(1)f(-1) = af(-1)$$

Par récurrence on a $f(n) = a^n = \exp_a(n)$ pour tout entier n et ensuite $f(\frac{p}{q}) = a^{\frac{p}{q}} = \exp_a(\frac{p}{q})$ pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, en utilisant $a^p = f(p) = f(q \cdot \frac{p}{q}) = f(\frac{p}{q})^q$. Donc, $f(x) = a^x = \exp_a(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe une suite d'éléments $x_n \in \mathbb{Q}$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$ (car $\mathbb{Q}$ est dense dans $x \in \mathbb{R}$). Par la continuité de f et de $a^x = \exp_a(x)$ on a

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} a^{x_n} = \lim_{n \to +\infty} \exp_a(x_n) = \exp_a(x) = a^x.$$

Définition - exponentielle d'un nombre complexe. On peut étendre la définition de l'exponentielle aux nombres complexes. Pour $z \in \mathbb{C}$ soit

$$e^z = \exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \tag{3.4}$$

Cette série est absolument convergente (le module d'un nombre complexe remplace la valeur absolue). Notons que $\exp(z)$ est continu sur $\mathbb{C}$ et vérifie également la propriété $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$ pour tout couple z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$. En particulier pour tout $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}. \tag{3.5}$$

Exponentielle d'un nombre imaginaire pur. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\exp(i\theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!}\end{aligned}$$

car $i^{2k} = (-1)^k$ et $i^{2k+1} = i(-1)^k$. On en déduit les

Séries pour cosinus et sinus. Les séries

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} \\ \sin(\theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!}\end{aligned}$$

sont absolument convergentes pour tout $\theta\mathbb{R}$. Les méthodes du calcul différentiel nous permettent de démontrer que ces séries correspondent en fait aux fonctions sin et cos définies sur le cercle trigonométrique :

$$\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1], \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{3.6}$$

$$\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1], \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \tag{3.7}$$

Pour $z \in \mathbb{C}$ on définit $\sin z$ et $\cos z$ par ces séries. Les fonctions sin et cos sont des fonctions périodiques de période $T = 2\pi$, c'est-à-dire

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Evidemment elles sont aussi périodiques de période $T = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}_+$. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ sin et cos satisfont

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{théorème de Pythagore}$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

et

$$\sin x \pm \sin y = 2\sin\big(\frac{x \pm y}{2}\big)\cos\big(\frac{x \mp y}{2}\big)$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\big(\frac{x+y}{2}\big)\cos\big(\frac{x-y}{2}\big)$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\big(\frac{x+y}{2}\big)\sin\big(\frac{x-y}{2}\big)$$

Quelques valeurs spéciales :

$$\begin{array}{lllll} \sin 0 = 0 & \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} & \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} & \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3} & \sin\frac{\pi}{2} = 1 \\ \cos 0 = 1 & \cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3} & \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} & \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} & \cos\frac{\pi}{2} = 0 \end{array}$$

Les fonctions sin et cos sont inversibles sur le domaine $D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ respectivement $D = [0, \pi]$. Les fonctions réciproques correspondantes sont notées arcsin et arccos. On définit les fonctions trigonométriques tan et cot par

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \{(k+\frac{1}{2})\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$\cot : \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Les fonctions tan et cot sont inversibles sur le domaine $D =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ respectivement $D =]0, \pi[$. Les fonctions réciproques correspondantes sont notées arctan et arccot.

Fonctions hyperboliques. On définit les fonctions hyperboliques

$$\begin{array}{ll} \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} & \sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} & \cosh : \mathbb{R} \to [1, \infty[\\ \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} & \tanh : \mathbb{R} \to]-1, 1[\\ \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} & \coth : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to]-\infty, -1[\cup]1, \infty[\end{array}$$

d'où les séries pour sinh et cosh :

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \tag{3.8}$$

Pour $z \in \mathbb{C}$ on définit $\sinh z$ et $\cosh z$ par ces séries.

Les fonctions réciproques sont notées

$$\begin{array}{ll} \operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) & \operatorname{arcsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) & \operatorname{arccosh} : [1, \infty[\to [0, \infty[\\ \operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} & \operatorname{arctanh} :]-1, 1[\to \mathbb{R} \\ \operatorname{arccoth} x = \operatorname{arctanh}\frac{1}{x} & \operatorname{arccoth} :]-\infty, -1[\cup]1, \infty[\to \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{array}$$

3.7 Plus de Maths - démonstrations

Nous démontrons les résultats sur les séries absolument convergentes.

Critère de d'Alembert - cas convergent. Si $\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \rho < 1$, choisir $\varepsilon > 0$ tel que $\rho+\varepsilon < 1$ (par exemple $\varepsilon = \frac{1-\rho}{2}$). Il existe un entier naturel N tel que $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < \rho+\varepsilon$ pour tout $k \geq N$. Par conséquent, pour tout $k \geq N$,

$$|a_k| \leq b_k := |a_N|(\rho+\varepsilon)^{k-N}$$

ce qui implique la convergence de $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|$. La démonstration de la généralisation du critère de d'Alembert suivra les mêmes lignes. Le cas divergent est laissé comme exercice.

Critère de Cauchy - cas convergent. Si $\limsup_{k\to+\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = \rho < 1$, choisir $\varepsilon > 0$ tel que $\rho+\varepsilon < 1$ (par exemple $\varepsilon = \frac{1-\rho}{2}$). Il existe un entier naturel N tel que $\sqrt[k]{|a_k|} < \rho+\varepsilon$ pour tout $k \geq N$. Par conséquent, pour tout $k \geq N$,

$$|a_k| \leq b_k := (\rho+\varepsilon)^k$$

ce qui implique la convergence de $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|$. Le cas divergent est laissé comme exercice.

Proposition - resommation d'une série. Dans une série absolument convergente on peut changer l'ordre des sommands.

Plus précisément,

1. pour toute application bijective σ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$, on a
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k,$$
2. pour toute paire des sous-suites disjointes $(m_k), (n_k)$ de $\mathbb{N}$ telles que $\{m_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{n_k : k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$ on a
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{m_k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{n_k}.$$
En choisissant $m_k = 2k$, $n_k = 2k+1$ on obtient en particulier
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}.$$

Démonstration. 1. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k| < \varepsilon$ et donc $|\sum_{k=0}^{\infty} a_k - S_n| < \varepsilon$. On choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\{0, 1, \ldots, n\} \subset \{\sigma(0), \ldots, \sigma(N)\}.$$

Alors, pour tout $m \geq N$, on a

$$\left|\sum_{k=0}^{m} a_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| < \left|\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k\right| + \left|\sum_{k=0}^{m} a_{\sigma(k)} - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right| < 2\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < 2\varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire il en suit $\lim_{m\to+\infty} \sum_{k=0}^{m} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

2. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$. On peut choisir k_0 et k_1 tels que $\{m_0, \ldots, m_{k_0}\} \cup \{n_0, \ldots, n_{k_1}\} = \{0, \ldots, n\}$. Grâce à l'inégalité triangulaire nous avons pour tout $M > k_0, N > k_1$

$$\begin{aligned}
&|\sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{M} a_{m_k} - \sum_{k=0}^{N} a_{n_k}| \\
&\leq |\sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{k_0} a_{m_k} - \sum_{k=0}^{k_1} a_{n_k}| + |\sum_{k=k_0+1}^{M} a_{m_k}| + |\sum_{k=k_1+1}^{N} a_{n_k}| \\
&= |\sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k| + |\sum_{k=k_0+1}^{M} a_{m_k}| + |\sum_{k=k_1+1}^{N} a_{n_k}| \\
&\leq 3\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < 3\varepsilon
\end{aligned}$$

Produit de séries absolument convergentes. On considère l'expression

$$D_n = \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{k=0}^{n} b_k - \sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{k=0}^{n} b_k - \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} = \sum_{j+k>n}\sum a_j b_k.$$

Il suffit de montrer $\lim_{n\to+\infty} D_n = 0$. Grâce à la convergence absolue des séries $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ la suite $(P_n)_n$ définie par

$$P_n = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n} |a_k b_j|$$

est convergente et donc de Cauchy. L'inégalité

$$|D_n| \leq P_n - P_{[n/2]}$$

implique alors la convergence désirée. Pour montrer la convergence absolue notons que les inégalités ci-dessus restent vraies si on remplace a_j par $|a_j|$, b_k par $|b_k|$ et $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$ par $\sum_{j=0}^{k} |a_j b_{k-j}|$. Grâce à l'inégalité triangulaire

$$|c_k| \leq \sum_{j=0}^{k} |a_j b_{k-j}|$$

on en déduit la convergence absolue de $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ par le critère de majoration.

3.8 Plus de Maths - approfondissements

Critère de d'Alembert généralisé. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^*$. Si

1. $$\limsup_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|<1$$
   alors la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge absolument.
2. $$\liminf_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|>1$$
   alors la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge.

Remarque. Si
$$\liminf_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\leq 1\leq \limsup_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$$
le critère ne permet pas une conclusion sur la convergence ou la divergence de la série.

Remarque. On a toujours les inégalités suivantes
$$\liminf_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\leq \liminf_{k\to+\infty}\sqrt[k]{|a_k|}\leq \limsup_{k\to+\infty}\sqrt[k]{|a_k|}\leq \limsup_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|.$$
Donc le critère de Cauchy est plus fort que le critère de d'Alembert.

Pour juger la convergence des séries à décroissance polynomiale le critère de Raabe qui est une variante du critère de d'Alembert, est utile :

Critère de Raabe. Soient $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^*$ pour laquelle
$$\lim_{k\to+\infty} k\left(1-\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\right)=\frac{1}{\rho}.$$
Alors, si $\rho<1$ la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge absolument et diverge si $\rho>1$.

On peut également formuler des généralisation en utilisant $\liminf$ et $\limsup$.

Exemple. Soit $a_k=k^{-\alpha}$ et $\alpha>0$. Alors,
$$\lim_{k\to+\infty} k\left(1-\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\right)=\alpha.$$

Démonstration (Critère de Raabe - cas convergent). Pour tout $\varepsilon>0$ tel que $\frac{1}{\rho}-\varepsilon>1$ il existe un entier positif N tel que pour tout $k\geq N$:
$$k\left(1-\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\right)>\frac{1}{\rho}-\varepsilon.$$
Cette inégalité est équivalente à
$$(\frac{1}{\rho}-\varepsilon-1)|a_k|<(k-1)|a_k|-k|a_{k+1}|.$$

Pour tout $n > N$ on considère les sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$. Il suffit de montrer que les S_n sont bornés. Alors, par l'inégalité précédente nous avons pour tout $n > N$

$$(\frac{1}{\rho} - \varepsilon - 1)S_n < (\frac{1}{\rho} - \varepsilon - 1)\sum_{k=0}^{N} |a_k| + \sum_{k=N+1}^{n} (k-1)|a_k| - k|a_{k+1}|.$$

En exploitant la somme téléscopique nous trouvons pour tout $n > N$

$$(\frac{1}{\rho}-\varepsilon-1)S_n < (\frac{1}{\rho}-\varepsilon-1)\sum_{k=0}^{N} |a_k|+N|a_{N+1}|-n|a_{n+1}| < (\frac{1}{\rho}-\varepsilon-1)\sum_{k=0}^{N} |a_k|+N|a_{N+1}|.$$

□

Chapitre 4

Fonctions réelles et Processus de limite

Nous étendons le concept de processus de limite aux fonctions pour étudier le comportement local et asymptotique. Une notion plus géométrique du processus de limite permet d'introduire les fonctions uniformément continues et la convergence uniforme de suites des fonctions continues.

Notions à apprendre. Limite d'une fonction, limite épointée d'une fonction, limite à gauche, limite à droite, limite à l'infini, comportement asymptotique d'une fonction, fonction continue et fonction uniformement continue, suites de fonctions, convergence ponctuelle et convergence uniforme, théorème de Dini

Compétences à acquérir. Savoir calculer la limite d'une fonction et appliquer les techniques du chapitre 2 aux fonctions, savoir vérifier la continuité et la continuité uniforme d'une fonction, connaître les propriétés des fonctions uniformement continues, comprendre et savoir appliquer le concept de convergence uniforme, savoir vérifier le type de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions, savoir donner le comportement asymptotique des fonctions

4.1 Limite d'une fonction

4.1.1 Définitions

Introduction. La notion de la limite d'une fonction connaît plusieurs approches différentes que nous allons discuter dans cette section. Soit f une fonction réelle définie sur son domaine D_f. Soit $a \in \mathbb{R}$ un *point adhérent* à D_f. Par la proposition 2.4.2 le point a est adhérent à un ensemble E si et seulement s'il existe une suite d'éléments $a_n \in E$ qui converge vers a. Rappelons que si $a \in D_f$, alors a est un point adhérent de D_f. Le point a peut être un point isolé dans D_f. On note souvent $V_r(a) =]a - r, a + r[$ (voisinage) ou $B_r(a) =]a - r, a + r[= \{x : |x - a| < r\}$ (boule ouverte) au vu de leurs généralisations dans $\mathbb{R}^n$. Pour étudier le comportement de f autour de a on peut considérer les suites (x_n) avec $x_n \in D_f$ qui convergent vers a et les suites $f(x_n)$ des valeurs de f. Une autre approche utilise les voisinages de a et leurs images sous f. Pour cette raison on considère seulement des fonctions définies dans un voisinage du point a, c'est-à-dire des fonctions pour lesquelles il existe $r > 0$ tel que $]a-r, a+r[\subset D_f \cup \{a\}$.

Limite d'une fonction - Définition 1. Soit $a \in \mathbb{R}$ un point adhérent de D_f. On dit que f admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers a si pour toute suite d'élément $x_n \in D_f$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ la suite $f(x_n)$ converges vers l, i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = l$. On écrit alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = l.$$

Limite d'une fonction - Définition 2. Soit $a \in \mathbb{R}$ un point adhérent à D_f. On dit que f admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers a si à tout $\epsilon > 0$, on peut associer $\delta > 0$ tel que $|f(x) - l| < \epsilon$ si $x \in D_f$ et $|x - a| < \delta$, i.e. $x \in B_\delta(a) \cap D_f$. On écrit alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = l.$$

Proposition. Les définitions 1 et 2 sont équivalentes.

Démonstration.

1. $2 \Rightarrow 1$. Soit (x_n) une suite dans D_f qui converge vers a. Nous allons démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = l$ c'est-à-dire pour tout $\epsilon > 0$ il existe un entier naturel N tel que $|f(x_n) - l| < \epsilon$ pour tout $n \geq N$. Par la définition 2 il existe un $\delta > 0$ tel que $|x - a| < \delta$ implique $|f(x) - l| < \epsilon$. Pour ce δ il existe un N tel que $n \geq N$ implique $|x_n - a| < \delta$. Donc $|f(x_n) - l| < \epsilon$ pour tout $n \geq N$.
2. $1 \Rightarrow 2$. Soit $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = l$ pour toute suite (x_n) dans D_f qui converge vers a. Si l n'est pas la limite d'après la définition 2 il existe un $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$ il existe un $y_\delta \in D_f$ tel que $|y_\delta - a| < \delta$ et $|f(y_\delta) - l| \geq \epsilon$. Pour $\delta = \frac{1}{n}$ on a construit une suite d'éléments (y_n) avec cette propriété. La suite $(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$ converge alors vers a mais la suite $(f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2), \ldots)$ ne converge pas.

Remarque. Dans la pratique on utilise souvent la définition 1 pour démontrer que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ n'existe pas et la définition 2 pour démontrer l'existence de la valeur limite d'une fonction.

Remarque. Au lieu de $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ on peut écrire $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = l$ pour $a + h \in D_f$.

Fonction continue en *a*. Une fonction f est dite continue en $a \in D_f$ si

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Rappel sur les fonctions continues. Les fonctions continues commutent avec le processus limite, c'est-à-dire que pour toute suite (x_n) d'éléments dans D_f telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a) = f\big(\lim_{n\to+\infty} x_n\big)$$

Fonction continue. Une fonction $f : D_f \to T$ est dite continue sur D_f ou plus brievement continue si elle est continue en tout $a \in D_f$.

Discussion. En appliquant notre définition de la limite d'une fonction aux exemples "exotiques" nous arrivons aux conclusions surprenantes. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ donné par $f(x) = 1 - x^2$. La fonction f n'est pas définie en $a = 0$ et nous avons

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1.$$

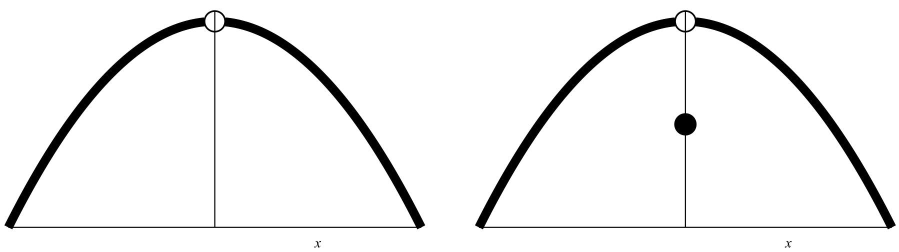
En revanche, si on considère $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donné par

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{si } x \neq 0\,; \\ 0.5, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

alors $\lim_{x\to 0} g(x)$ n'existe pas. On peut prendre, par exemple, la suite constante $x_n = 0$ et la suite $y_n = \dfrac{1}{n+1}$ pour voir que

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = 0.5 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} g(y_n)$$

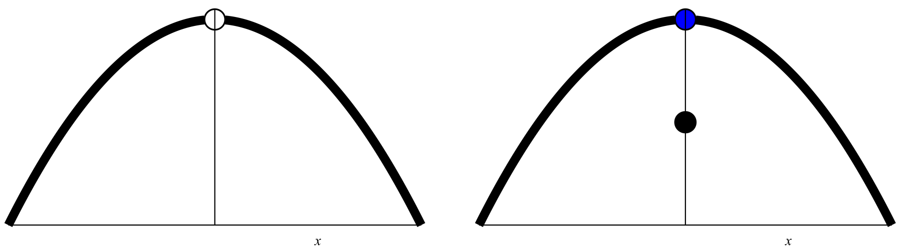
ou bien la suite $z_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{n+1}$ pour constater que $\lim_{n\to\infty} g(z_n)$ n'existe pas.



Pour la fonction à gauche la limite existe, pour la fonction à droite la limite n'existe pas.

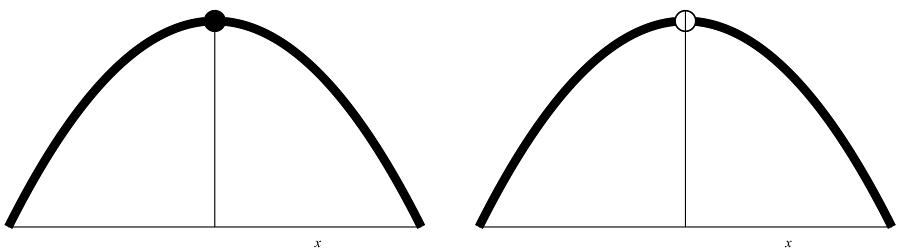
Notre définition de la limite permet de découvrir les points de discontinuité d'une fonction mais elle ne permet pas de voir la valeur du prolongement par continuité en ces points.

Limite épointée. C'est pourquoi on peut définir la limite d'une fonction dans un point a adhérent à son domaine de définition en considérant seulement les $x \neq a$ même si a appartient au domaine de définition (pour les suites qui convergent vers a les éléments sont toujours différents de a) : $x_n \neq a$. On appelle cette limite *la limite épointée.*



La limite épointée existe dans les deux cas et donne la même valeur.

Si $f(x) = 1 - x^2$ pour tout x réel (c'est-à-dire f continue en $x = 0$ on a bien évidemment $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ comme pour la limite épointée.



Pour une fonction continue la limite et la limite épointée coincident. De même pour des points adhérents qui n'appartiennent pas au domaine.

Limite épointée d'une fonction - Définition 1. Soient $a \in \mathbb{R}$ un point adhérent de D_f et $D_f \cap]a-r, a+r[\neq \emptyset$. On dit que f admet pour limite épointée $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers a si pour toute suite d'élément $x_n \in D_f \setminus \{a\}$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$ la suite $f(x_n)$ converges vers l, i.e. $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = l$. On écrit alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = l.$$

Limite d'une fonction épointée - Définition 2. Soit a un point adhérent à D_f et $D_f \cap]a-r, a+r[\neq \emptyset$. On dit que f admet pour limite épointée $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers a si à tout $\epsilon > 0$, on peut associer $\delta > 0$ tel que $|f(x)-l| < \epsilon$ si $x \in D_f$ et $0 < |x-a| < \delta$, i.e. $x \in B_\delta(a) \cap D_f \setminus \{a\}$. On écrit alors

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = l.$$

Limite à droite. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une suite d'éléments $a_n \in D_f$, $a_n > a$ avec $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$. On dit que f admet pour limite à droite $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers a si pour toute suite d'élément $x_n \in D_f$ telle que $x_n > a$ et $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ la suite $f(x_n)$ converge vers l, i.e. $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$. On écrit alors

$$\lim_{x\to a_+} f(x) = l.$$

f est dite continue à droite en $a \in D_f$ si $\lim_{x\to a_+} f(x) = f(a)$.

Limite à gauche. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une suite d'élément $a_n \in D_f$, $a_n < a$ avec $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$. On dit que f admet pour limite à gauche $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers a si pour toute suite d'élément $x_n \in D_f$ telle que $x_n < a$ et $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ la suite $f(x_n)$ converge vers l, i.e. $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$. On écrit alors

$$\lim_{x\to a_-} f(x) = l.$$

f est dit continue à gauche en $a \in D_f$ si $\lim_{x\to a_-} f(x) = f(a)$.

Proposition. $\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = l$ si et seulement si

$$\lim_{x\to a_-} f(x) = \lim_{x\to a_+} f(x) = l.$$

Une fonction f est continue en $a \in D_f$ si et seulement si elle est continue à gauche et continue à droite en a.

Fonction continue sur $[a, b]$. Soit $a < b$. On dit que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$ si f est continue en $]a, b[$, continue à droite en a est continue à gauche en b.

4.1.2 Propriétés des valeurs limites

Les règles de calcul pour les valeurs limites des suites s'étendent aux limites des fonctions.

Théorème 4.1. *Supposons que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = l_1 \qquad \textit{et} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = l_2.$$

Alors, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a

$$\lim_{x\to a}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha l_1 + \beta l_2. \tag{4.1}$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = l_1 l_2. \tag{4.2}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2} \qquad si \quad l_2 \neq 0. \tag{4.3}$$

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = |l_1| (= |\lim_{x\to a} f(x)|). \tag{4.4}$$

Pour les fonctions continues nous avons déjà énoncé les résultats correspondants au chapitre 2 :

Corollaire 4.2. *Si f et g sont continues en a, alors*

1. *pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la fonction $(\alpha f + \beta g)$ est continue en a,*
2. *fg est continue en a,*
3. *$\frac{f}{g}$ est continue en a si $g(a) \neq 0$,*
4. *$|f|$ est continue en a.*

Théorème 4.3. *Soient $f : D_f \to T$ et $g : A \to B$ deux fonctions telles que $f[D_f] \subset A$ et*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \qquad et \qquad \lim_{y\to b} g(x) = l.$$

Alors, $\lim_{x\to a} g(f(x)) = l$.

De même pour des fonctions continues :

Corollaire 4.4. *Si f est continu en a et g est continu en $f(a)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est continu en a.*

Remarque. On pouvait aussi énoncer le corollaire comme suit :

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g\big(\lim_{x\to a} f(x)\big);$$

c'est-à-dire les fonctions continues conservent les limites.

L'espace vectoriel des fonctions continues $C^0(I)$. Soit I un intervalle. L'ensemble des fonctions continues $f : I \to \mathbb{R}$, noté $C^0(I)$, est un espace vectoriel (voir le corollaire 4.2 : toute combinaison linéaire de fonctions continues sur I est continue sur I).

Fonction bornée. Une fonction $f : D_f \to T$ est dite bornée, s'il existe une constante $C > 0$ telle que $|f(x)| \leq C$ pour tout $x \in D_f$.

Proposition. Soient f une fonction bornée et $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ et $a \in D_f \cap D_g$. Alors, $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

Proposition. Soient $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$ et $\lim_{x\to a} g(x) = l_2$ et supposons qu'il existe un $r > 0$ tel que $f(x) \leq g(x)$ dans $B_r(a) \cap D_f \cap D_g \setminus \{a\}$. Alors, $l_1 \leq l_2$.

Comme pour les suites cette proposition implique un théorème des deux gendarmes.

Proposition(théorème des deux gendarmes). Soient $f, g, h : D \to T$ trois fonctions telles que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to a} h(x) = l$ et supposons qu'il existe un $r > 0$ tel que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ dans $B_r(a) \cap D_f \cap D_g \cap D_h \setminus \{a\}$. Alors, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

Remarque. Les résultats sont aussi valables pour les limites unilatérales.

4.1.3 Exemples

1. Calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x}.$$

Pour $x > 0$ on a les inégalités suivantes : $x < \sinh x < x \cosh x$. De plus $\frac{\sinh -x}{-x} = \frac{\sinh x}{x}$. Alors, en utilisant la continuité de cosh et $\cosh 0 = 1$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x} = 1.$$

Etudions maintenant la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\sinh x}{x}$. La fonction $f(x)$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Prolongement par continuité. Grâce aux résultats précédents il est possible de définir un prolongement de $f(x) = \frac{\sinh x}{x}$ qui est continue en tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sinh x}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On appelle $\widetilde{f}(x)$ le prolongement par continuité.

2. Montrer que

$$\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$$

n'existe pas. Pour le démontrer considérons la suite (x_n) définie par $x_n = \frac{1}{\pi(n+\frac{1}{2})}$ pour $n \geq 0$. La suite (x_n) converge vers 0 et

$$\sin \frac{1}{x_n} = \sin \pi(n + \frac{1}{2}) = (-1)^n$$

ne converge pas.

Une fonction nulle part continue. La fonction indicatrice des nombres rationnels $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ est nulle part continue.

4.2 Limites infinies et limites à l'infini

Introduction. Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$. Soit $a \notin D_f$ un point adhérent à D_f. D'abord on décrit le comportement des fonctions fortement divergentes au point a. Si $D_f = \mathbb{R}$ on peut décrire le comportement asymptotique de f lorsque x tend vers l'infini. On donne les définitions dans la terminologie de la définition 1 de la limite d'une fonction.

4.2.1 Définitions

Limites infinies. On écrit $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ si pour tout suite (x_n) d'éléments dans D_f qui converge vers a on a $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \pm\infty$.

Limites à l'infini. On écrit $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = l$ si pour tout suite (x_n) d'éléments dans $\mathbb{R}$ qui diverge fortement vers $\pm\infty$ on a $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$.

Limites infinies à l'infini. On écrit $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ si pour tout suite (x_n) d'éléments dans $\mathbb{R}$ qui diverge fortement vers $+\infty$ on a $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \pm\infty$. On écrit $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$ si pour tout suite (x_n) d'éléments dans $\mathbb{R}$ qui diverge fortement vers $-\infty$ on a $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \pm\infty$.

Exemples.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale définie par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad a_k \in \mathbb{R} \quad a_n > 0$$

   On a

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \quad \text{si } n \text{ est impair}$$

   et

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty \quad \text{si } n \text{ est pair}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$ on a $e^x \geq x^{n+1}/(n+1)!$. Alors

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$$

   c'est-à-dire la croissance exponentielle à l'infini est plus rapide que celle d'une fonction polynomiale.

3. $$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to 0_+} \left(1 + y\right)^{\frac{1}{y}} = e$$

Démonstration. Soit $x > 0$. On pose $n = [x]$. L'inégalité $n \leq x < n+1$ implique

$$1 + \frac{1}{n+1} \leq 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

La fonction a^x est croissante si $a > 1$ et satisfait $a^0 = 1$. Alors

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

et le théorème des deux gendarmes implique le résultat desiré. De plus, pour tout $a \in \mathbb{R}$

4.
$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{y\to 0}\left(1 + y\right)^{\frac{a}{y}} = e^a$$

grâce à la continutité de x^p. En utilisant le fait que $\ln x$ est continue pour $x > 0$ on obtient aussi

$$\lim_{y\to 0_+}\frac{\ln(1+y)}{y} = 1$$

5.
$$\lim_{x\to\infty}\tanh x = 1$$

car

$$\lim_{x\to\infty}\tanh x = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1 - e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

6.
$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$$

Démonstration. Soit $x > 0$. Posons $n = [x]$, alors $n \leq x < n+1$ et $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$. Par conséquent

$$n^{\frac{1}{n+1}} < x^{\frac{1}{x}} < (n+1)^{\frac{1}{n}}.$$

et le résultat est une conséquence de $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$.

7.
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^p} = 0 \quad \text{pour tout } p > 0.$$

Démonstration. Par l'exemple précédent

$$\ln\left(\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}\right) = \ln 1$$

La fonction ln est continue et satisfait $\ln a^b = b \ln a$ et $\ln 1 = 0$. Donc

$$\ln\left(\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to\infty}\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \ln 1 = 0$$

Posons $x = y^p$ nous avons que $\frac{\ln x}{x} = p\frac{\ln y}{y^p}$ tend vers 0 lorsque y tend vers l'infini.

4.2.2 Comportement asymptotique et asymptotes

Asymptote horizontale. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$. La droite d'équation $y = L$ est une asymptote horizontale de la fonction f en $+\infty$.

Comportement asymptotique. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. On veut décrire le comportement asymptotique de f plus précisément par une fonction h plus simple. Si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est telle que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - h(x) = 0,$$

alors f et h ont le même comportement asymptotique.

Asymptote oblique. Si h est une fonction affine, i.e. $h(x) = ax + b$, alors la droite définie par h est une asymptote oblique de la fonction f en $+\infty$. En particulier,

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Similairement on décrit le comportement asymptotique d'une fonction f en $-\infty$. Une manière plus systématique de l'étude du comportement asymptotique à l'aide du développement limité sera donnée au chapitre suivant.

Exemples.

1. Donner les asymptotes obliques de $f(x) = \sqrt{3x^2 + 2x + 1}$ en $-\infty$ et $+\infty$. Pour l'asymptote en $+\infty$ on cherche alors a, b tels que

   $$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - (ax + b)\big) = 0.$$

   On trouve $a = \sqrt{3}$. Ensuite noter que

   $$f(x) - \sqrt{3}x = \frac{3x^2 + 2x + 1 - 3x^2}{\sqrt{3x^2 + 2x + 1} + \sqrt{3}x} = \frac{2x + 1}{\sqrt{3}x(\sqrt{1 + \frac{2}{3x} + \frac{1}{3x^2}} + 1)}$$

   d'où $b = \sqrt{3}/3$ puisque $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - \sqrt{3}x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. En $-\infty$ l'asymptote oblique est la droite d'équation $y = -\sqrt{3}x - \sqrt{3}/3$.

2. Soit $f(x) = \sqrt{x^4 + 4x^3 + 1}$. Donner le polynôme quadratique $h(x) = ax^2 + bx + c$ tel que

   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) - h(x) = 0.$$

   On calcule le coefficient d'une manière récurrente. Evidemment

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 1.$$

   Donc $a = 1$. Ensuite nous avons

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3 + 1}{x(\sqrt{x^4 + 4x^3 + 1} + x^2)} = 2,$$

d'où $b = 2$, et finalement

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x^2 - 2x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4x^2+1}{\sqrt{x^4+4x^3+1}+x^2+2x} = -2,$$

d'où $c = -2$.

4.3 Fonctions uniformément continues

Continuité uniforme. Soit I un intervalle. Une fonction f définie sur I est dite uniformément continue si à tout $\epsilon > 0$, on peut associer $\delta > 0$ tel que $x, y \in I$ et $|x - y| < \delta$ implique $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Proposition. Une fonction uniformément continue sur un intervalle I est continue.

Proposition. Soit f une fonction continue définie sur l'intervalle borné et fermé $[a, b]$. Alors f est uniformement continue sur $[a, b]$.

Démonstration. Supposons que l'affirmation est fausse pour une fonction f. Alors pour tout $\epsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ il existe x_n, y_n tels que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - f(y_n)| > \epsilon.$$

Par le théorème de Bolzano-Weierstrass ils existent x_{n_k}, y_{n_k} qui convergent vers x respectivement y. Par la première inégalité $x = y$. Donc $f(x) = f(y)$ d'où la contradiction.

Approximation d'une fonction continue par une fonction en escalier. La continuité uniforme joue un rôle important dans la construction de l'intégral. On va montrer plus loin que une fonction uniformément continue peut être approchée par des fonctions en escalier avec une précision arbitraire.

4.4 Suites de fonctions

Soit $E \subset \mathbb{R}$. On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : E \to \mathbb{R}$.

Convergence simple. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ si pour tout $x \in E$:

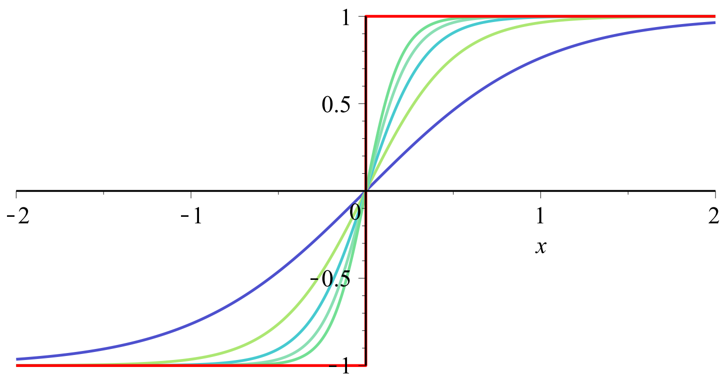
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x). \tag{4.5}$$

On dit aussi : Les f_n convergent ponctuellement vers f. Evidemment les limites simples respectent les règles de calcul du théorème 2.1 pour les suites.

Exemple. Soient $f_n(x) = \tanh nx$, $x \in \mathbb{R}$. Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \text{sign}(x)$ (voir section 1.6.2). Les fonctions f_n sont continues en tout $x \in \mathbb{R}$ mais la limite ponctuelle $f(x)$ admet ici un point de discontinuité. En général nous ne pouvons pas commuter la limite simple d'une suite de fonctions avec la limite $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ puisque pour cet exemple

$$\lim_{n\to+\infty}\big(\lim_{x\to 0} f_n(x)\big) \neq \lim_{x\to 0}\big(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\big)$$

car la dernière limit n'existe pas.

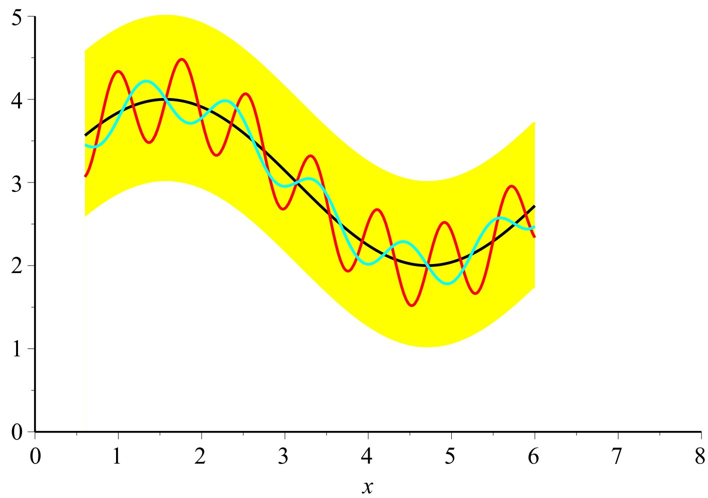


La limite simple (ou ponctuelle) de la suite de fonctions continues $\tanh nx$ n'est pas continue.

Convergence uniforme. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$:

$$\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{4.6}$$

Cette unique fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est appelée la limite uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Evidemment les limites uniformes respectent les règles de calcul du théorème 2.1 pour les suites.



Convergence uniforme : Pour tout $\varepsilon > 0$ les fonctions f_n pour n suffisamment grand sont dans une bande de hauteur 2ε autour de la fonction limite.

Exemple. Soient $f_n(x) = \tanh nx$, $x \in [a,b]$, $0 < a < b$. Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$ uniformement. En fait, soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Grâce à la monotonie de la fonction tanh :

$$\sup_{x\in[a,b]} |\tanh nx - 1| = 1 - \tanh na = \frac{2}{e^{2na}+1}$$

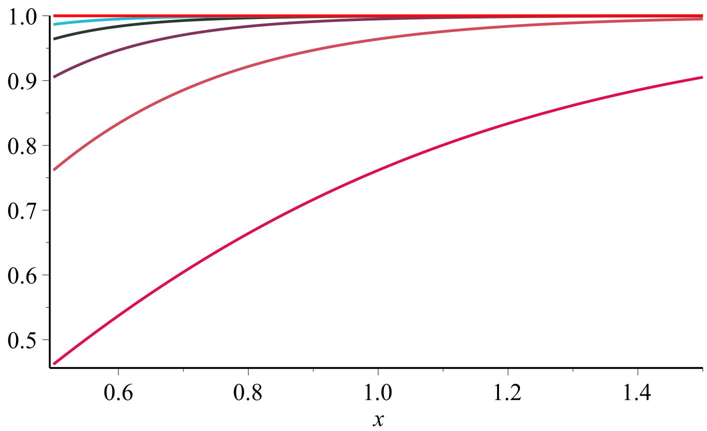
Pour tout $2 > \varepsilon > 0$ on choisit $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{2}{e^{2N_\varepsilon a}+1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad N_\varepsilon > \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{2}{\varepsilon}-1\right).$$

La monotonie de la fonction tanh (ou de la fonction exponentielle) implique alors pour tout $n \geq N_\varepsilon$:

$$\frac{2}{e^{2na}+1} < \varepsilon.$$

Les fonctions $f_n(x) = \tanh nx$ convergent uniformément vers $f(x) \equiv 1$ sur tout l'intervalle $x \in [a,b]$, $0 < a < b$. En revanche si l'intervalle contient 0 alors les f_n ne converge plus uniformément.



La suite de fonctions continues $\tanh nx$ converge uniformément vers la fonction 1 sur $[a, b]$, $0 < a < b$. .

Proposition - Convergence uniforme implique convergence simple. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $f : E \to \mathbb{R}$, alors pour tout $x \in E$: $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.

Démonstration. C'est une conséquence du fait que pour tout $x \in E$:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|.$$

L'importance de la notion de la convergence uniforme devient claire quand on l'applique aux fonctions continues. Nous allons montrer que la limite uniforme de fonctions continue est une fonction continue. La convergence uniforme est alors la convergence naturelle pour les fonctions continues.

Théorème 4.5. ***La limite uniforme de fonctions continues.*** *Supposons que $f_n \in C^0(I)$ convergent uniformément vers f. Alors $f \in C^0(I)$. En particulier pour tout $x_0 \in I$:*

$$\lim_{n\to+\infty} \big(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\big) = \lim_{x\to x_0} \big(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\big) \tag{4.7}$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et $x_0 \in I$. Nous devons démontrer l'existence d'un $\delta > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta$ implique $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. On procède par un argument standard en analyse appelé "l'argument de ε sur 3".

1. Toute f_n est continue en x_0 : $\Rightarrow$ il existe $\delta > 0$ tel que $|x-x_0| < \delta$ implique $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

2. f_n converge uniformément vers f : $\Rightarrow$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$: $\sup\limits_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\
&\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\
&\leq \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

La commutativité des limites (4.7) est laissée comme exercice. □

Le théorème 4.5 démontre que l'espace $C^0(I)$ est complet par rapport à la convergence uniforme. Si $I = [a, b]$ on définit la norme (dite la norme du maximum)

$$||f||_0 := \max_{x\in I} |f(x)| \tag{4.8}$$

Noter que $f \in C^0([a, b])$, alors $||f||_0 < \infty$. Il est facile à démontrer que $||\cdot||_0$ vérifie en fait les propriétés de positivité, homogénéité et l'inégalité triangulaire. Si f_n est une suite de Cauchy par rapport à la norme $||\cdot||_0$ elle définit une suite de Cauchy $(f_n(x))$ en tout $x \in I$. L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ est complet. Donc (f_n) converge simplement vers une fonction f sur I. En appliquant un argument de ε sur 3 on démontre la continuité de f. Un espace vectoriel normé complet est appelé un espace de Banach.

Convergence simple versus convergence uniforme. Nous avons vu que la convergence uniforme implique la convergence simple (ou ponctuelle) mais pas vice versa. De plus, la convergence uniforme préserve la continuité (voir le théorème 4.5) contrairement à la convergence simple qui ne préserve pas la continuité (voir l'exemple $f_n(x) = \tanh nx$ sur $\mathbb{R}$). Il y a cependant des conditions sous lesquelles la convergence simple des fonctions continues entraîne la convergence uniforme. Si la convergence simple est monotone et sachant que la limite ponctuelle est une fonction continue on peut en déduire la convergence uniforme. C'est le théorème de Dini [1].

Théorème 4.6. ***Théorème de Dini.*** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^0([a, b])$ une suite croissante, c'est-à-dire $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [a, b]$, qui converge ponctuellement vers $f \in C^0([a, b])$. Alors, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f \in C^0([a, b])$.*

Démonstration. Par l'absurde. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers $f \in C^0([a, b])$ il existe $x_n \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$, et $\epsilon > 0$ tels que $f(x_n) - f_n(x_n) \geq \epsilon$. Par le théorème de Bolzano Weierstrass il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = x \in [a, b]$. La continuité de f et de f_N pour tout $N \in \mathbb{N}$ implique

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = f(x), \quad \lim_{k\to+\infty} f_N(x_{n_k}) = f_N(x)$$

1. Ulisse Dini, 1845 -1918, mathématicien italien

La convergence ponctuelle de f_N vers f implique $\lim\limits_{N\to+\infty} f_N(x) = f(x)$. Par conséquent pour notre $\epsilon > 0$ il existe un $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $N \geq N_\epsilon$: $|f_N(x) - f(x)| < \epsilon$. En utilisant la monotonie de la suite des f_N, $f_N(x) \leq f(x)$, on trouve $0 \leq f(x) - f_N(x) < \epsilon$ pour tout $N \geq N_\epsilon$. Fixons un tel N. Par la monotonie de la suite de f_n on a pour tout $n_k > N$:

$$\epsilon \leq f(x_{n_k}) - f_{n_k}(x_{n_k}) \leq f(x_{n_k}) - f_N(x_{n_k})$$

d'où en prenant la limite

$$\epsilon \leq \lim_{k\to+\infty} (f(x_{n_k}) - f_N(x_{n_k})) = f(x) - f_N(x) < \epsilon$$

donc la contradiction désirée. □

Séries de fonctions. Les séries de fonctions sont définies comme des séries numériques. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : E \to \mathbb{R}$, une suite de fonctions. La suite (S_n) des *sommes partielles* est définie par

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \ .$$

La série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ est dite *ponctuellement convergente* ou *simplement convergente* si la suite $(S_n(x))$ des *sommes partielles* converge ponctuellement. La série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ est dite *absolument convergente* si les sommes partielles $\tilde{S}_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} |f_k(x)|$ convergent absolument. La série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ est dite *uniformément convergente* si la suite $(S_n(x))_n$ des *sommes partielles* converge uniformément. Si les $f_k(x)$ sont bornées, alors la série converge absolument uniformément si la série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} ||f_k||_0$.

Exemples - types de séries. Si $f_k(x) = a_k x^k$, $k \in \mathbb{N}$, on obtient les séries entières (voir Chapitre 5). Nous avons déjà vu la série exponentielle et les séries pour $\sin, \cos, \sinh, \cosh$. Il y a des séries qui ne convergent pas en tout $x \in \mathbb{R}$. On définit le rayon de convergence R par $\dfrac{1}{R} = \limsup\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \in [0, \infty[\cup \{\infty\}$. Par le critère de Cauchy la série converge absolument en tout $x \in]-R, R[$ et elle diverge si $|x| \geq R$. Elle converge uniformément sur tout intervalle $[-r, r]$ et $0 < r < R$. Par exemple, la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k$$

converge absolument pour tout $|x| < 1$. Si $f_k(x) = a_k e^{ikx}$, $f_k(x) = a_k \sin kx$ ou $f_k(x) = a_k \cos kx$ on appelle la série une série de Fourier. Si $f_k(x) = a_k x^k$, $k \in \mathbb{Z}$, on obtient les séries de Laurent avec les applications dans la théorie des fonctions complexes (c'est-à-dire $x \in \mathbb{C}$).

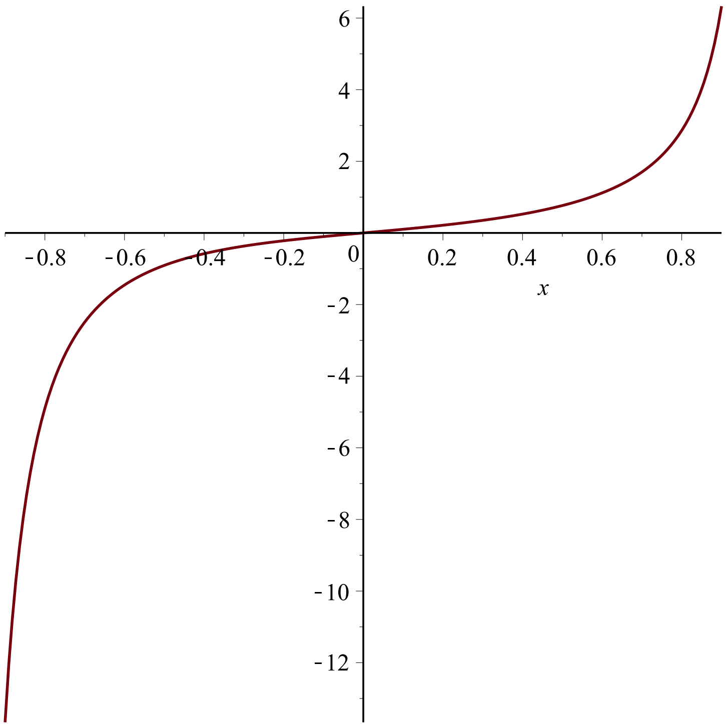
Exemple. La série

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1+x^k}$$

converge absolument sur $]-1,1[$ (c'est-à-dire pour tout $|x|<1$) et diverge en dehors. En fait, par le critère de Cauchy $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\frac{|x|^k}{|1+x^k|}} = |x|$ si $|x|<1$ d'où la convergence absolue. Si $|x| \geq 1$ les $f_k(x)$ ne convergent pas vers zéro. La série converge uniformément sur tout intervalle $[-r,r]$ et $0<r<1$ puisque

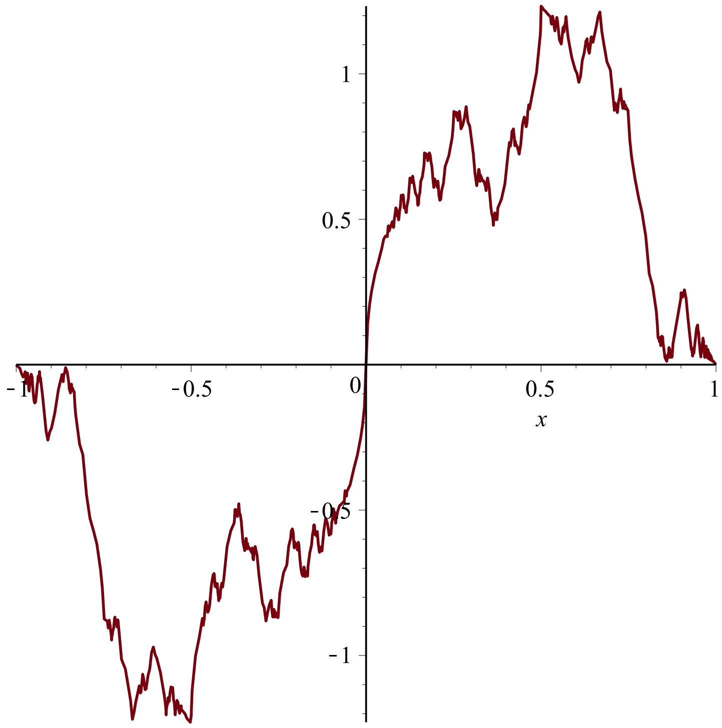
$$\sum_{k=1}^{\infty} ||f_k||_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \max_{x\in[-r,r]} |\frac{x^k}{1+x^k}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \max_{x\in[-r,r]} \frac{|x|^k}{1-|x|^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{1-r^k} < \infty.$$

La série ne converge pas uniformement sur $]-1,1[$.



La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1+x^k}$ converge uniformément sur $[-r,r]$, $0<r<1$.

Exemple. La série
$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi k^2 x)}{k^2}$$
converge absolument et uniformément sur $\mathbb{R}$.



La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi k^2 x)}{k^2}$ est de période 2 et converge uniformement sur $\mathbb{R}$.

Chapitre 5

Calcul différentiel

Nous présentons les techniques de base du calcul différentiel.

Notions à apprendre. Dérivée et fonction dérivable, fonction dérivée, règle de composition, théorèmes des accroissements finis, la classe C^n, développement limité, série entière, extremum, point d'inflexion, asymptote, fonction convexe, règle de l'Hospital.

Compétences à acquérir. Connaître les fonctions dérivées des fonctions élémentaires, connaître et savoir appliquer les propriétés de la dérivée au calcul des dérivées, savoir faire le développement limité d'une fonction, savoir appliquer la règle de l'Hospital aux calculs des limites, savoir faire l'étude d'une fonction, savoir calculer la série entière des fonctions élémentaires et déterminer son rayon de convergence

5.1 La dérivée

Définition. Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est dite *dérivable* en $a \in D$ si la limite

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in D \setminus \{a\}}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe. Cette limite, lorsqu'elle existe, est appelée la *dérivée* de la fonction f au point a et on la note $f'(a)$.

Proposition. En posant $h = x - a$ avec $a + h \in D$ nous avons

$$f'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in D \setminus \{a\}}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Remarque. Souvent on ne mentionne plus explicitement le fait que $h \neq 0$.

Interprétation géométrique - problème de la tangente. Soit $f : D \to T$ une fonction. On veut construire la tangente en un point $(a, f(a))$ d'une courbe $(x, f(x))$ donnée. Ce problème débouche sur le calcul différentiel car on cherche à savoir si la pente de la sécante donnée par la droite de $(a, f(a))$ à $(x, f(x))$ pour $x \in D \setminus \{a\}$ a une valeur limite, la pente de la tangente en $(a, f(a))$. Donc la pente de la sécante est donnée par

$$m_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{si } x \in D \setminus \{a\}$$

et si la limite existe lorsque x tend vers a la dérivée $f'(a)$ équivaut à un prolongement par continuité de $m_a(x)$ en a, i.e. :

$$\widetilde{m}_a(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \in D \setminus \{a\}, \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases}$$

est une fonction continue en $a \in D$. L'équation de la tangente en a est donnée par

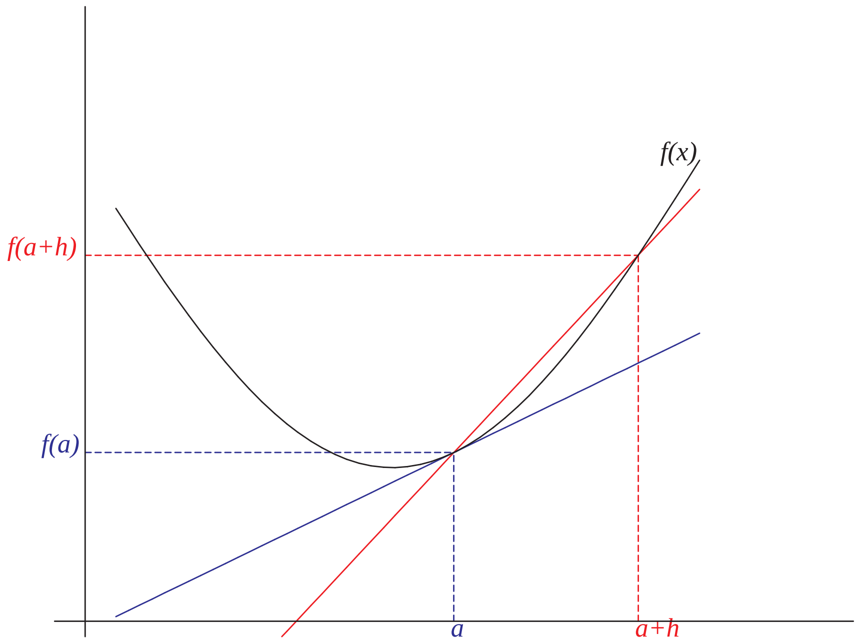
$$t_a(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \quad \text{ou} \quad t_a(a + h) = f(a) + f'(a)h.$$

Notons d'abord que pour tout $x \in D$ on peut écrire

$$f(x) = f(a) + (x - a)\widetilde{m}_a(x)$$

Ceci implique la

Proposition. Si une fonction $f : D \to T$ est dérivable en $a \in D$, alors f est continue en a.



les graphes de $f(x)$, du segment $f(a) + \frac{f(a+h)-f(a)}{h}(x - a)$ et de la tangente $t_a(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$

Approximation d'une fonction dans une voisinage. On s'attend à avoir $f(x) \approx f(a)+f'(a)(x-a)$ pour x suffisament proche de a. Ou, plus précisement, la propriété d'être dérivable est équivalente à la propriété que f peut être approchée par une fonction affine-linéaire. Ce résultat et la qualité de l'approximation sont donnés dans la proposition suivante. Introduisons d'abord une nouvelle notation :

Notation $O(h)$ et $o(h)$. Nous disons qu'une expression $f(h)$ est $O(h)$ (lire : grand O de h) et on le note $f(h) = O(h)$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que $|f(h)| \leq C|h|$ pour tout h suffisamment petit. En particulier, il en suit $\lim\limits_{h\to 0} f(h) = 0$. Nous disons qu'une expression $f(h)$ est $o(h)$ (lire : petit o de h) et on le note $f(h) = o(h)$ si $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 0$. Les notions représentent une convention pour décrire le comportement qualitatif lorsque l'argument tend vers zéro. En général, dans les calculs seul le terme dominant est préservé, par exemple :

$$\begin{aligned}
o(h) + o(h) &= o(h) \\
o(h) + O(h) &= O(h) \\
O(h) + O(h^2) &= O(h) \\
o(h) + O(h^2) &= o(h) \\
h^p \cdot O(h) &= O(h^{p+1}), \quad p > 0 \\
h^p \cdot o(h) &= o(h^{p+1}), \quad p > 0 \\
O(h^2) + O(h^3) + h \cdot o(h) &= O(h^2) \\
o(h) \cdot o(h) &= o(h^2) \\
O(h) \cdot o(h) &= o(h^2)
\end{aligned}$$

Ces "identités" signifient : "la somme de deux fonctions qui sont $o(h)$ est $o(h)$", la somme d'une fonction qui $o(h)$ et d'une qui est $O(h)$ est $o(h)$" etc. Si f est dérivable en a nous pouvons caractériser l'écart entre f et sa tangente en a par le résultat suivant :

Proposition - Développement limité du premier ordre. $f : D \to T$ est dérivable en $a \in D$ si et seulement si

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$$

pour tout $a + h \in D$.

Définition. Soit $D = I$ un intervalle ouvert. On dit que la fonction $f : D \to T$ est dérivable sur I si elle est dérivable en tout $a \in D$. La fonction f' définie sur I est appelée la fonction dérivée de f.

Corollaire. Une fonction dérivable sur I est continue sur I.

Notation. On note aussi la dérivée $f'(x)$ par $\frac{d\,f(x)}{d\,x}$ ou encore par $\frac{d}{d\,x}f(x)$. En particulier, la dernière notation symbolise que dériver une fonction f est une opération sur f dont le résultat est une fonction f', la dérivée de f. On peut comparer l'action de $\frac{d}{d\,x}$ sur une fonction avec celle d'une matrice sur un vecteur. La dérivée en un point $a \in D$ est notée par $f'(a)$ ou par $\frac{d\,f(x)}{d\,x}\Big|_{x=a}$ ou encore par $\frac{d}{d\,x}\Big|_{x=a} f(x)$.

Exemples - calculer la dérivée à l'aide de la définition.

1. Les fonctions constantes, i.e. $f(x) = c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ont pour dérivée $f'(x) = 0$.
2. La fonction identité $f(x) = x$ est dérivable en tout $x \in \mathbb{R}$ et $f'(x) = 1$.
3. Soit $f(x) = x^2$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{2xh + h^2}{h} = 2x, \end{aligned}$$

c.-à.-d. $f'(x) = 2x$. Notons que $(x+h)^2 - x^2 - 2xh = h^2$, donc $o(h) = h^2$.

4. Soit $f(x) = \sqrt{x}$. Pour tout $x > 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

car $x \mapsto \sqrt{x}$ est une fonction continue. Soit $x = 1$. On peut écrire

$$\sqrt{1+h} = \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}} h + o(h) \approx 1 + \frac{h}{2}$$

En première approximation $\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2}$. Son erreur est plus petite que 10^{-3} si $|h| < 0.087$ et $\frac{\sqrt{1+h}}{1+h/2} < 10^{-3}$ si $|h| < 0.093$.

5. Soit $f(x) = e^x$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction e^x est dérivable et $f'(x) = e^x$ car

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{1 + h + r_2(h) - 1}{h} = e^x$$

puisque $r_2(h)/h$ converge vers 0 lorsque h tend vers 0.

6. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{d\,\sin x}{d\,x} = \cos x, \quad \frac{d\,\cos x}{d\,x} = -\sin x.$$

En utilisant $\sin y - \sin x = 2\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$ on a

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h\to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \\ &= \cos x \end{aligned}$$

car $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ et $\cos x$ est continue. Pour calculer la dérivée du cosinus on utilise l'identité $\cos y - \cos x = -2\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$ et la continuité de la fonction sin.

5.1.1 Propriétés de la dérivée

Théorème 5.1. - *Règles du calcul différentiel.* *Soient $f, g : D \to T$ deux fonctions dérivables en $a \in D$. Alors,*

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a) \quad \textit{pour } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \textit{(linéarité)} \tag{5.1}$$

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \quad \textit{(règle du produit)} \tag{5.2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)} \quad \textit{si } g(a) \neq 0 \quad \textit{(règle du quotient)} \tag{5.3}$$

Exemples.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$
$$\frac{d\,x^n}{d\,x} = nx^{n-1}$$
Par récurrence et règle du produit
$$\frac{d\,x^n}{d\,x} = \frac{d\,x \cdot x^{n-1}}{d\,x} = x\frac{d\,x^{n-1}}{d\,x} + x^{n-1}\frac{d\,x}{d\,x} = (n-1)x \cdot x^{n-2} + x^{n-1} = nx^{n-1}.$$
2. Par règle du quotient on a
$$(e^{-x})' = \left(\frac{1}{e^x}\right)' = -\frac{e^x}{e^{2x}} = -e^{-x}.$$
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$\frac{d \sinh x}{d\,x} = \cosh x, \quad \frac{d \cosh x}{d\,x} = \sinh x.$$
Par la linéarité de la dérivée on a
$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{(e^x)' - (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \cosh x.$$
et
$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{(e^x)' + (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x + (-e^{-x})}{2} = \sinh x$$
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$\frac{d \tanh x}{d\,x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$
Par la définition du tanh et la règle du quotient
$$\begin{aligned}(\tanh x)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' &= \frac{(\sinh x)' \cosh x - \sinh x (\cosh x)'}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{\cosh x \cosh x - \sinh x \sinh x}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x\end{aligned}$$

Théorème 5.2. - *Règle de composition.* *Si $f : D \to T$ et $g : A \to B$ sont dérivables respectivement en $a \in D$ et $b = f(a)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en a et*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a) \tag{5.4}$$

Remarque. On écrit aussi

$$\left.\frac{d\,g(f(x))}{d\,x}\right|_{x=a} = \left.\frac{d\,g(y)}{d\,y}\right|_{y=f(a)} \cdot \left.\frac{d\,f(x)}{d\,x}\right|_{x=a}$$

ou encore brièvement $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$.

Corollaire 5.3. ***- dérivée de la fonction reciproque.*** *Soit f inversible, continue et dérivable en a. Si $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et*

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} \tag{5.5}$$

ou en faisant la substitution $b = f(a)$

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}. \tag{5.6}$$

Remarque. On écrit aussi

$$\left.\frac{d\,f^{-1}(y)}{d\,y}\right|_{y=f(a)} = \frac{1}{\left.\frac{d\,f(x)}{d\,x}\right|_{x=a}}$$

ou

$$\left.\frac{d\,f^{-1}(y)}{d\,y}\right|_{y=b} = \frac{1}{\left.\frac{d\,f(x)}{d\,x}\right|_{x=f^{-1}(b)}}$$

Démonstration du Corollaire. On applique la règle de composition à l'identité $f^{-1}(f(x)) = x$.

Exemples.

1. Pour calculer la dérivée de $h(x) = (3x^2 + 5x + 2)^n$ on applique la règle de composition pour $f(x) = 3x^2 + 5x + 2$ et $g(y) = y^n$. Avec $f'(x) = 6x + 5$ et $g'(y) = ny^{n-1}$ on obtient

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left.\frac{d\,g(y)}{d\,y}\right|_{y=f(x)} \cdot \frac{d\,f(x)}{d\,x} \\ &= nf(x)^{n-1}f'(x) \\ &= n(6x+5)(3x^2+5x+2)^{n-1}. \end{aligned}$$

2. Montrer que $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$. En utilisant la formule pour la dérivée de la fonction réciproque nous avons

$$\frac{d\,\ln y}{d\,y} = \frac{1}{\left.\frac{d\,e^x}{d\,x}\right|_{x=\ln y}} = \frac{1}{\left.e^x\right|_{x=\ln y}} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}.$$

3. **La dérivée logarithmique d'une fonction**. Soit $f(x) > 0$ une fonction dérivable. La dérivée

$$\frac{d\,\ln(f(x))}{d\,x} = \left.\frac{d\,\ln y}{d\,y}\right|_{y=f(x)} \cdot \frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

est appelée la dérivée logarithmique de $f(x)$.

4. Soit g une fonction dérivable et $\lambda \neq 0$ une constante réelle. On considère la fonction g_λ définie par $g_\lambda(x) = g(\lambda x)$. La dérivée de g_λ est donnée par (appliquer la règle de composition avec $g = g$ et $f(x) = \lambda x$)

$$\frac{d\,g_\lambda(x)}{d\,x} = \frac{d\,g(\lambda x)}{d\,x} = \lambda g'(\lambda x)$$

En particulier, pour $\lambda = -1$, on a

$$\frac{d\,g(-x)}{d\,x} = -g'(-x).$$

Par exemple, $\frac{d\,e^{-x}}{d\,x} = -e^{-x}$.

5. On calcul la dérivée de la fonction $\arcsin :]-1, 1[\to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

$$\begin{aligned}\frac{d\ \arcsin y}{d\,y} &= \frac{1}{\frac{d\ \sin x}{d\,x}\Big|_{x=\arcsin y}} \\ &= \frac{1}{\cos(\arcsin y)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.\end{aligned}$$

5.1.2 Dérivée unilatérale

Dérivée à droite. Une fonction $f : D \to T$ est dite *dérivable à droite* en $a \in D$ si la limite

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe. Cette limite, lorsqu'elle existe, est appelée la *dérivée à droite* de la fonction f au point a.

Dérivée à gauche. Une fonction $f : D \to T$ est dite *dérivable à gauche* en $a \in D$ si la limite

$$\lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe. Cette limite, lorsqu'elle existe, est appelée la *dérivée à gauche* de la fonction f au point a.

Proposition. Une fonction $f : D \to T$ est dérivable en a si et seulement si sa dérivée à droite et sa dérivée à gauche existent et sont égales.

Exemple. La fonction $\text{abs}(x) = |x|$ est dérivable en tout $a \neq 0$ et $\text{abs}'(a) = \text{sign}(a)$. En $a = 0$ les dérivées unilatérales existent : sa dérivée à droite est $+1$ et sa dérivée à gauche est -1. Donc $\text{abs}(x)$ n'est pas dérivable en $a = 0$.

5.1.3 Une application de la Dérivée : La règle de l'Hospital

L'expression indéterminée 0/0. Soient g, f deux fonctions réelles telles que $f(x), g(x) \to 0$ lorsque x tend vers a. Alors la limite $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ est indéterminée. On peut évaluer cette limite si f, g sont dérivables en a et si $g'(a) \neq 0$:

Théorème 5.4. ***- Règle de l'Hospital I.*** *Soient $g, f : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en a telles que $f(a) = g(a) = 0$ et $g'(a) \neq 0$. Alors, il existe $\delta > 0$ tel que $g(a+h) \neq 0$ pour tout h tel que $|h| < \delta$ et*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Démonstration. Par la définition de la dérivée

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h) = f'(a)h + o(h)$$

$$g(a+h) = g(a) + g'(a)h + o(h) = g'(a)h + o(h)$$

pour tout $a+h \in D$. Pour $\epsilon = |g'(a)|$ il existe $\delta > 0$ tel que $|g(a+h) - g'(a)h| = |o(h)| < \epsilon|h|$ pour tout $|h| < \delta$. Donc $g(a+h) = g'(a)h + o(h) \neq 0$. Alors,

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f'(a)h + o(h)}{g'(a)h + o(h)} \to \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

lorsque h tend vers zéro. □

Exemples.

1.
$$\lim_{x\to 0} \frac{2x + \sin x}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{2 + \cos x}{e^x} = 3$$
car les dérivées des fonctions sont continues.

2.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{2 + 2\tan^2 2x}{1 + \tan^2 x} = 2.$$

5.1.4 La classe $C^1(I)$

Définition. Soit I un intervalle ouvert. On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $C^1(I)$ si f est dérivable sur I et sa dérivée f' est continue sur I.

Remarque. Par définition on pose $C^0(I)$ l'ensemble (ou la classe) des fonctions continues sur I. Donc une fonction f est de classe $C^1(I)$ si f est dérivable sur I avec f' de classe $C^0(I)$. Evidemment, $C^1(I) \subset C^0(I)$.

Remarque. Il existe des fonctions dérivables sur I avec dérivées non-continues sur I. Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec sa dérivée donnée par

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La dérivée f' n'est pas continue en $x = 0$.

5.2 Théorèmes des accroissements finis

5.2.1 Extremums locaux et théorème de Rolle

Fonction monotone et la dérivée I. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in D$. Si f est croissante dans un voisinage $V_\epsilon(a)$ alors $f'(a) \geq 0$. Si f est décroissante dans un voisinage $V_\epsilon(a)$ alors $f'(a) \leq 0$. C'est une conséquence du fait qu'une fonction f est croissante (respectivement décroissante) si est seulement si pour tout couple (x_1, x_2) on a $(f(x_2) - f(x_1))(x_2 - x_1) \geq 0$ (respectivement $(f(x_2) - f(x_1))(x_2 - x_1) \leq 0$).

Comportement si $f'(a) \neq 0$. Si $f'(a) > 0$, il existe un voisinage $V_\epsilon(a)$ tel que $x < a$ implique $f(x) < f(a)$ et $x > a$ implique $f(x) > f(a)$.

Fonction monotone et la dérivée II. Par contre si $f'(a) \neq 0$ on ne peut pas en déduire la monotonie dans un voisinage de a. Par exemple, considérons la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ x + x^2 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Elle est dérivable en $x = 0$ avec $f'(0) = 1$, mais elle n'est monotone sur aucun voisinage de 0.

Point stationnaire. On dit que $a \in D$ est un *point stationnaire* de la fonction $f : D \to T$ si $f'(a) = 0$.

Extremums locaux. On dit que la fonction $f : D \to T$ admet un *minimum local* en $a \in D$ s'il existe un voisinage $V_\delta(a)$ tel que $x \in V_\delta(a) \cap D$ implique $f(a) \leq f(x)$. On dit que la fonction $f : D \to T$ admet un *maximum local* en $a \in D$ s'il existe un voisinage $V_\delta(a)$ tel que $x \in V_\delta(a) \cap D$ implique $f(a) \geq f(x)$. Le minimum (respectivement le maximum) est appelé strict si l'inégalité est stricte dans $V_\delta(a) \setminus \{a\}$.

Théorème 5.5. - *Condition nécessaire pour extremums locaux.* *Soit $a \in D$ un maximum (ou minimum) local de $f : D \to \mathbb{R}$ et soit f dérivable en a. Alors $f'(a) = 0$.*

Remarque. Le théorème donne une condition nécessaire mais non suffisante pour un extremun local d'une fonction dérivable. Par exemple, la fonction $f(x) = x^3$ admet un point stationnaire en $x = 0$ qui n'est pas un extremum local.

Fonction continue et dérivable. Le fait qu'une fonction continue définie sur un intervalle borné et fermé $[a, b]$ admet son minimum (et son maximum) permet de distinguer les alternatives suivantes :

1. Le minimum se trouve en a ou en b.
2. Le minimum est un point stationnaire de f.
3. Le minimum est un point où f' n'existe pas.

En particulier, nous avons le résultat suivant :

Théorème (théorème de Rolle). Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Alors, la fonction f admet au moins un point stationnaire dans $]a, b[$.

5.2.2 Théorèmes des accroissements finis

Théorème 5.6. ***Théorème des accroissements finis de Lagrange.*** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe au moins un point $c \in]a, b[$ pour lequel on a*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Démonstration. La fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

satisfait les conditions du théorème de Rolle. Alors, il existe un point sationnaire $c \in]a, b[$ de g. Donc

$$0 = g'(c) = f'(c)) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Le théorème des accroissements finis nous permet de conclure sur la monotonie d'une fonction à partir de sa dérivée.

Corollaire 5.7. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a, b[$ et $f'(x) \geq 0$ (respectivement $f'(x) > 0$), alors f est croissante (respectivement strictement croissante) sur $[a, b]$. Si $f'(x) \leq 0$ (respectivement $f'(x) < 0$), alors f est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur $[a, b]$.*

Démonstration. Par le théorème des accroissements finis, pour tout $x, y \in [a, b]$ et $x < y$ il existe $c = c(x, y) \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$. □

Avec le résultat que pour une fonction monotone la dérivée a un signe ce corollaire implique le

Corollaire 5.8. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a, b[$. Alors,*

1. *$f'(x) \geq 0$ si et seulement si f est croissante.*
2. *$f'(x) \leq 0$ si et seulement si f est décroissante.*

Les corollaires suivants jouent un rôle important dans la théorie des équations différentielles.

Corollaire 5.9. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a, b[$ et $f'(x) = 0$. Alors f est constante sur $[a, b]$.*

Démonstration. Par le théorème des accroissements finis, pour tout $x \in [a, b]$ il existe $c = c(x) \in]a, x[$ tel que $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a) = 0$, i.e. $f(x) = f(a)$. □

Remarque. Par conséquent, une fonction continue et dérivable est constante si et seulement si $f'(x) = 0$.

Corollaire 5.10. *Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, dérivables sur $]a, b[$ et $f'(x) = g'(x)$. Alors, il existe une constante réelle c telle que $f(x) = g(x) + c$.*

Théorème 5.11. ***Théorème des accroissements finis de Cauchy.*** *Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, dérivables sur $]a, b[$ et $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$. Alors, il existe au moins un point $c \in]a, b[$ pour lequel on a*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Démonstration. La fonction $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

satisfait les conditions du théorème de Rolle. Alors, il existe un point sationnaire $c \in]a, b[$ de g. Donc

$$0 = h'(c) = f'(c)) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c).$$

Cet théorème permet de formuler une généralisation de la règle de l'Hospital. □

Théorème 5.12. **- *Règle de l'Hospital II.*** *Soient $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et $g(x), g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$. De plus, on suppose que*

1. $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = l$ *avec* $l = 0, -\infty$ *ou* $+\infty$,
2. $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = q$ *avec* $q \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Alors,

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = q.$$

Remarque. Cette règle reste valable si x tends vers $b-$, vers a, ou vers $\pm\infty$.

Exemples. Il est important de vérifier qu'en effet $\lim\limits_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe pour pouvoir appliquer la règle de l'Hospital. Cependant, souvent on applique formellement la règle de l'Hospital et si on arrive à calculer $\lim\limits_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ la validité de la règle de l'Hospital est justifiée a posteriori.

1. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

3. Pour calculer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+} \frac{\tan(3x)}{\tan(x)}$ noter d'abord que par la règle de l'Hospital
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \frac{\cos(x)}{\cos(3x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \frac{\sin(x)}{3\sin(3x)} = -\frac{1}{3}$$
car $\sin\frac{\pi}{2} = -\sin\frac{3\pi}{2} = 1$ et le sinus est une fonction continue. Par conséquent,
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \frac{\tan(3x)}{\tan(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \frac{\sin(3x)}{\sin(x)} \frac{\cos(x)}{\cos(3x)} = (-1)\cdot(-\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}.$$
Si on applique directement la règle de l'Hospital on a
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \frac{\tan(3x)}{\tan(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \frac{3\cos^{-2}(3x)}{\cos^{-2}(x)} = 3\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \frac{\cos(x)}{\cos(3x)}\right)^2 = 3\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{3}.$$
en utilisant le résultat sur $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+} \frac{\cos(x)}{\cos(3x)}$.

Autres expressions indéterminées. Pour calculer d'autres expressions indéterminées avec la règle de l'Hospital on les transforme selon les méthodes suivantes :

1. Expression "$0\cdot\infty$" : calculer $\lim\limits_{x\to a+} f(x)g(x)$ si $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to a+} g(x) = \infty$. On écrit soit $f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ ("$0/0$") soit $f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ ("∞/∞").
Par exemple,
$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} (-x) = 0.$$

2. Expression "$\infty - \infty$" : calculer $\lim\limits_{x\to a+} f(x) - g(x)$ si $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x\to a+} g(x) = \infty$. On écrit
$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}} \quad (\text{"}0/0\text{"}).$$
Par exemple, pour tout $a \geq 0$
$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x+ax^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{x+ax^2-\sin x}{(x+ax^2)\sin x} = \lim_{x\to 0+} \frac{1+2ax-\cos x}{(1+2ax)\sin x + (x+ax^2)\cos x}$$
$$= \lim_{x\to 0+} \frac{2a + \frac{1-\cos x}{x}}{\frac{\sin x}{x} + 2a\sin x + (1+ax)\cos x} = \frac{2a}{2} = a.$$

5.3 Dérivées d'ordre supérieur

Définition. Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Si sa fonction dérivée $f' : I \to \mathbb{R}$ est elle-même dérivable sur I, sa fonction dérivée est appelée *dérivée seconde* de f et on la note f''. Plus généralement, les dérivées successives de f, si elles existent, sont notées, en exposant, par des traits obliques ou par un entier naturel placé entre parenthèses :

$$\begin{gathered} f(x) = f^{(0)}(x), \\ f'(x) = f^{(1)}(x), \\ f''(x) = f^{(2)}(x), \\ \cdots \\ (f^{(n-1)}(x))' = f^{(n)}(x). \end{gathered}$$

La fonction $f^{(n)}$ est appelée la $n^{\text{ième}}$ dérivée de f. On note aussi

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n\, f(x)}{d\,x^n} = \frac{d^n}{d\,x^n} f(x).$$

Exemples.

1. Soit m un entier naturel et $f(x) = x^m$. Pour tout entier naturel n on a
$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{d^n}{d\,x^n} x^m = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} & \text{si } n \leq m, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$
2. Soit $f(x) = e^{\lambda x}$. Pour tout entier naturel n on a
$$\frac{d^n}{d\,x^n} e^{\lambda x} = \lambda^n e^{\lambda x}.$$
3. Soit $f(x) = \sin x$. On a
$$\tfrac{d\ \sin x}{d\,x} = \cos x\ , \qquad \tfrac{d^2\ \sin x}{d\,x^2} = -\sin x$$
$$\tfrac{d^3\ \sin x}{d\,x^3} = -\cos x\ , \qquad \tfrac{d^4\ \sin x}{d\,x^4} = \sin x.$$
et par conséquent, pour tout entier naturel n :
$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^m \cos x & \text{si } n = 2m+1, \\ (-1)^m \sin x & \text{si } n = 2m. \end{cases}$$

5.3.1 La classe $C^n(I)$

Définition. Soit I un intervalle ouvert. On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $C^n(I)$ si f est n fois dérivable sur I et sa $n^{\text{ième}}$ dérivée $f^{(n)}$ est continue sur I. On désigne $C^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions dont toutes les dérivées successives sont continues.

Remarque. L'ensemble $C^n(I)$ est un espace vectoriel car si $f, g \in C^n(I)$ alors $\alpha f + \beta g \in C^n(I)$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a les inclusions suivantes :

$$C^\infty(I) \subset C^{n+1}(I) \subset C^n(I) \subset \cdots \subset C^1(I) \subset C^0(I).$$

5.3.2 La formule de Leibniz

Proposition. Soient $f, g \in C^n(I)$. Alors, $fg \in C^n(I)$ et

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

pour tout $x \in I$.

Démonstration. On démontre la formule de Leibniz par récurrence. Pour $n = 1$ on a la règle du produit (5.2). On peut supposer que la formule est vraie pour un n. Alors,

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx}(fg)^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x)\right) \quad \text{par 5.1 et 5.2} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)}(x) g^{(n+1-k-1)}(x) + f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} f^{(j)}(x) g^{(n+1-j)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x)
\end{aligned}$$

où pour la dernière ligne on utilise le triangle de Pascal pour les coefficients binominaux :

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

5.3.3 Fonction convexe et dérivée seconde

Définition. Soit I un intervalle. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe sur I si pour tout couple x_1, x_2 dans I et tout $t \in [0, 1]$:

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

La fonction f est dite strictement convexe si pour tout couple $x_1 \neq x_2$ dans I et tout $t \in]0, 1[$:

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) < tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Une fonction f est dite (strictement) concave si $-f$ est (strictement) convexe.

Inégalité de Jensen. Soit I un intervalle. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe sur I si pour tout n-tuple $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de I et tout n-tuple $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0, 1]$ vérifiant $\sum_{k=1}^{n} t_k = 1$, on a

$$f(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k) \leq \sum_{k=1}^{n} t_k f(x_k)$$

On peut démontrer l'inégalité de Jensen par une simple récurrence. Ci-dessous nous présentons une démonstration sous l'hypothèse que f est dérivable sur I.

Proposition. Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Alors, f est convexe si et seulement si $f'(x)$ est une fonction croissante sur I.

Démonstration. On peut supposer que $x_1 \leq x_2$. Alors, pour tout $t \in]0,1[$ on a $x_1 \leq tx_1 + (1-t)x_2 \leq x_2$.

1. Soit f est convexe et dérivable. Alors

$$f'(x_1) = \lim_{\substack{t \to 1 \\ t \neq 1}} \frac{f(tx_1 + (1-t)x_2) - f(x_1)}{(1-t)(x_2 - x_1)} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

et

$$f'(x_2) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(tx_1 + (1-t)x_2) - f(x_2)}{-t(x_2 - x_1)} \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Donc

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2).$$

2. Soit f' croissante et $x_1 < x_2$. Par le théorème des accroissements finis de Lagrange pour tout $t \in]0,1[$ il existent c_1, c_2 tels que $x_1 \leq c_1 \leq tx_1 + (1-t)x_2 \leq c_2 \leq x_2$ et

$$\frac{f(tx_1 + (1-t)x_2) - f(x_1)}{(1-t)(x_2 - x_1)} = f'(c_1) \leq f'(c_2) = \frac{f(x_2) - f(tx_1 + (1-t)x_2)}{t(x_2 - x_1)}.$$

Donc

$$t(f(tx_1 + (1-t)x_2) - f(x_1)) \leq (1-t)(f(x_2) - f(tx_1 + (1-t)x_2)),$$

c'est-à-dire f est convexe.

Corollaire. Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et dérivable sur I. Alors, pour tout $x, y \in I$ on a

$$f'(x)(y - x) \leq f(y) - f(x) \leq f'(y)(y - x).$$

Si f est strictement convexe les inégalités sont strictes si $x \neq y$.

Application - inégalité de Jensen. Nous utilisons la seconde inégalité pour démontrer l'inégalité de Jensen si f est une fonction convexe dérivable : On pose $y = \sum_{k=1}^{n} t_k x_k$. Evidemment $y \in I$. Pour tout $x_k \in I$ on a

$$f(y) - f(x_k) \leq f'(y)(y - x_k).$$

Donc
$$\sum_{k=1}^{n} t_k(f(y) - f(x_k)) \leq \sum_{k=1}^{n} t_k f'(y)(y - x_k).$$
En utilisant $1 = \sum_{k=1}^{n} t_k$ et $y = \sum_{k=1}^{n} t_k x_k$ cette inégalité s'écrit
$$f(y) - \sum_{k=1}^{n} t_k f(x_k) \leq 0.$$

Corollaire. Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I. Alors, f est convexe si et seulement si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

Démonstration. $f'(x)$ est croissante si et seulement si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

Corollaire. Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I. Si $f''(x) > 0$ tout $x \in I$, alors f est strictement convexe sur I.

Exemple. La fonction $f(x) = x^2$ satisfait $f'(x) = 2x$ et $f''(x) = 2$. Par conséquent, $f(x) = x^2$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}$. L'inégalité de Jensen s'écrit pour $x_k \in \mathbb{R}$ comme suit :
$$\Big(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\Big)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} t_k x_k^2.$$
En posant $t_k = \frac{1}{n}$ on obtient
$$\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\Big)^2 \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

Exemple. La fonction $f(x) = \ln x$ est de classe $C^\infty(\mathbb{R}_+)$. On a $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$. Par conséquent, $f(x) = \ln x$ est strictement concave sur $\mathbb{R}_+$. L'inégalité de Jensen s'écrit pour $x_k > 0$ comme suit :
$$\ln\big(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\big) \geq \sum_{k=1}^{n} t_k \ln(x_k).$$
En posant $t_k = \frac{1}{n}$ on obtient
$$\ln\big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\big) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k).$$
En prenant l'exponentielle des deux membres de cette inégalité on trouve l'inégalité entre la moyennne géométrique et la moyenne arithmétique :
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \geq \prod_{k=1}^{n} x_k^{\frac{1}{n}}.$$

5.3.4 Extremums locaux et dérivée seconde

Introduction. Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Supposons que $x_0 \in I$ soit un point stationnaire de f, i.e. $f'(x_0) = 0$. Le point stationnaire x_0 est un minimum local de f si dans un voisinage de x_0 la fonction f est strictement décroissante pour $x < x_0$ et strictement croissante pour $x > x_0$. Par conséquent, si dans un voisinage de x_0 la fonction dérivée f' satisfait

$$\begin{array}{ll} f'(x) < 0 & \text{si } x < x_0 \\ f'(x) > 0 & \text{si } x > x_0 \end{array}$$

alors, la fonction f admet un minimum local en x_0.

Comportement si $f''(x_0) > 0$. Soit $f'(x_0) = 0$. Si $f''(x_0) > 0$, il existe un voisinage $V_\epsilon(x_0)$ tel que $x < x_0$ implique $f'(x) < 0$ et $x > x_0$ implique $f'(x) > 0$. Par conséquent, nous avons le résultat suivant :

Théorème 5.13. ***Critère de la dérivée seconde.*** *Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Soit x_0 un point stationnaire de f et supposons que la dérivée seconde de f existe en x_0. Si $f''(x_0) > 0(< 0)$, alors la fonction f admet un minimum (maximum) local strict en x_0.*

Corollaire 5.14. *Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction (strictement) convexe/concave et dérivable sur I. Soit x_0 un point stationnaire de f. Alors, la fonction f atteint son mininum /maximum (strict) en x_0.*

Remarque. En particulier, si la dérivée seconde de f existe sur I et $f''(x) \geq 0/\leq 0$ pour tout $x \in I$ la fonction f satisfait les hypothèses du corollaire.

5.3.5 Applications

1. **Inégalité de Bernoulli.** Soit $p > 1$. Montrer que pour tout $x > -1$ on a l'inégalité
$$(1 + x)^p \geq 1 + px$$
avec l'inégalité stricte si $x \neq 0$.
2. **Inégalité de Young.** Soit $p > 1$ et q défini par la relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que pour tout couple $x, y \geq 0$ on a l'inégalité
$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$
avec l'inégalité stricte si $x^{p-1} \neq y$.
3. **Méthode des moindres carrés.** Soient $a_k \in \mathbb{R}$ pour $k = 1, \ldots, n$. Quelle valeur de x minimise la fonction
$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2 \quad ?$$
Par exemple, les a_k représentent les résultats de n mesures d'une quantité. La tâche est d'approcher au mieux la valeur a de cette quantité.

5.3.6 Points d'inflexion et dérivée seconde

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in I$. On dit que f admet un point d'inflexion en a, si le graphe de f traverse sa tangente au point $(a, f(a))$.

Proposition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in I$. Alors, f admet un point d'inflexion en a si et seulement s'il existe un voisinage $V_\delta(a)$ tel que pour tout $x \in V_\delta(a) \setminus \{a\}$:

$$f'(a) < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{ou bien} \quad f'(a) > \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Proposition (condition nécessaire). Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2(I)$. Si f admet un point d'inflexion en a, alors $f''(a) = 0$.

Proposition (condition suffisante). Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2(I)$. S'il existe un voisinage $V_\delta(a)$ tel que pour tout $x \in V_\delta(a) \setminus \{a\}$:

$$(x - a)f''(x) < 0 \quad \text{ou bien} \quad (x - a)f''(x) > 0$$

alors f admet un point d'inflexion en a. En particulier, si f est trois fois dérivable en a et $f'''(a) \neq 0$, alors f admet un point d'inflexion en a.

Exemple. La fonction $\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet un point d'inflexion en $a = 0$:

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x\ ,$$

$$(\tanh x)'' = \frac{-2\sinh x}{\cosh^3 x} = -2\tanh x(1 - \tanh^2 x).$$

Donc $(\tanh x)'' = 0$ si $x = 0$ (condition nécessaire) et

$$\frac{d^3\ \tanh x}{d\,x^3}\Big|_{x=0} = -2 \neq 0$$

implique que ce point satisfait aussi la condition suffisante.

5.4 Dérivées d'ordre supérieur et développements en séries

Introduction. Nous avons démontré en 5.1 qu'une fonction $f : I \to T$ dérivable en $a \in I$ peut être approchée par un polynôme de degré 1 dans un voisinage de a. Plus précisement, soit $P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$, alors

$$f(x) = P_1(x) + R_1(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} \frac{R_1(x)}{x - a} = 0$$

que nous avons aussi noté comme $f(x) = P_1(x) + o(x - a)$. Ces expressions sont appelées le développement limité du premier ordre de la fonction f autour du point a. Nous allons étendre ce concept aux fonctions n-fois dérivables et démontrer que, sous des hypothèses convennables pour tout $m \leq n$, nous pouvons écrire

$$f(x) = P_m(x) + R_m(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} \frac{R_m(x)}{(x-a)^m} = 0$$

où $P_m(x)$ est un polynôme de degré m. Cette expression $P_m(x) + R_m(x)$ avec $R_m(x) = o((x-a))^m$ (ou mieux) est appelée développement limité d'ordre m.

5.4.1 Fonctions polynomiales

Fonction polynomiale générale. Soit f le polynôme de degré n donné par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k, \quad c_n \neq 0$$

On démontre facilement par récurrence que

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

et plus généralement

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Toute fonction polynomiale est entièrement déterminée par les valeurs de ses dérivées en un seul point a. Si f est une fonction générale dont les dérivées sont connues jusqu'à l'ordre n, nous allons montrer que cette somme est une approximation convenable de f dans un voisinage de a.

Représentation des restes $\boldsymbol{R_m(x)}$. Pour un développement limité d'ordre $m < n$ on veut estimer l'erreur $R_m(x)$ dans un voisinage de a. Pour une fonction polynomiale on peut utiliser la $(m+1)^{\text{ème}}$ dérivée de f. Si $m = 0$ il existe par le théorème des accroissements finis un $c = c_x$ entre x et a tel que

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x-a)$$

i.e. $R_0(x) = f'(c_x)(x-a)$. Pour $m \geq 1$ il nous faut une généralisation du théorème des accroissements finis pour montrer qu'il existe un $c = c_x$ entre x et a tel que

$$R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(c_x)}{(m+1)!}(x-a)^{m+1}$$

Dans le cas d'une fonction générale f le but est d'exprimer le reste $R_m(x)$ uniquement par la $m^{\text{ème}}$ dérivée ou, si f est même $(m+1)$-fois dérivable par la $(m+1)^{\text{ème}}$ dérivée de f pour pouvoir estimer l'erreur du développement limité.

5.4.2 Développement limité

Polynômes de Taylor et restes de Taylor. Soit $f : I \to T$ une fonction n-fois dérivable en $a \in I$. Alors, pour tout $m \leq n$, la fonction polynomiale $P_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de degré m définie par

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

est appelée le polynôme de Taylor d'ordre m de la fonction f au point a. La fonction

$$R_m(x) = f(x) - P_m(x)$$

est appelée le $m^{\text{ème}}$ reste de Taylor de f développée au point a.

Développement limité. L'expression

$$f(x) = P_m(x) + R_m(x)$$

est appelée le développement limité d'ordre m de la fonction f autour de a. On peut démontrer que le polynôme de Taylor d'ordre m est l'unique polynôme de degré m approchant la fonction f à un ordre $\geq m$.

Théorème 5.15. ***- Formule de Taylor pour le développement limité.*** *Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^n(I)$. Soit $a \in I$ et m un entier naturel tel que $0 \leq m \leq n$. Alors, pour tout $x \in I$, il existe $c_{x,m}$ entre a et x tel que*

$$R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(c_{x,m})}{(m+1)!}(x-a)^{m+1} \quad \text{si } m < n$$

et

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c_{x,n}) - f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad \text{si } m = n$$

Corollaire 5.16. *Pour tout m entier naturel tel que $0 \leq m \leq n$ on a*

$$\lim_{x \to a} \frac{R_m(x)}{(x-a)^m} = 0.$$

On écrit souvent $f(x) = P_m(x) + O((x-a)^{m+1})$ si $m < n$ respectivement $f(x) = P_n(x) + o((x-a)^n)$ si $m = n$. Rappel : $O(x^k)$ repésente une fonction avec la propriété $|O(x^k)| \leq C|x^k|$ dasn un voisinage de $x = 0$ et $o(x^k)$ repésente une fonction avec la propriété $\lim\limits_{x \to 0} \frac{o(x^k)}{x^k} = 0$.

Démonstration du théorème. Le théorème est une conséquence du résultat suivant :

Théorème (théorème de Cauchy généralisé). Soit $I = [a, b]$ un intervalle et $g, h : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $C^{m+1}(I)$ telles que $g^{(k)}(a) = h^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, \ldots, m$ et $h^{(m+1)}(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. Alors, pour tout $k = 0, 1, \ldots, m$, $h^{(k)}(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b]$ et il existe un $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{g(b)}{h(b)} = \frac{g^{(m+1)}(c)}{h^{(m+1)}(c)}.$$

Démonstration du théorème de Cauchy généralisé. Nous montrons d'abord que $h^{(k)}(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a,b]$: Supposons qu'il existe $x \in]a,b]$ tel que $h^{(m)}(x) = 0$. La $m^{\text{ième}}$ dérivée $h^{(m)}(x)$ satisfait donc les conditions du théorème de Rolle sur $[a,x]$, i.e. $h^{(m)}(x)$ est dérivable et $h^{(m)}(a) = h^{(m)}(x) = 0$. Il existe donc un $c_x \in [a,x]$ tel que

$$(h^{(m)}(c_x))' = h^{(m+1)}(c_x) = 0$$

en contradiction avec l'hypotèse $h^{(m+1)}(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. Par récurrence, $h^{(k)}(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a,b]$ et tout $k = 0,1,\ldots,m$. Par le théorème de Cauchy il existe $c_1 \in]a,b[$ tel que

$$\frac{g(b)}{h(b)} = \frac{g(b)-g(a)}{h(b)-h(a)} = \frac{g^{(1)}(c_1)}{h^{(1)}(c_1)}.$$

Ensuite, avec $g^{(1)}(a) = h^{(1)}(a) = 0$, il existe $c_2 \in]c_1,b[$ tel que

$$\frac{g^{(1)}(c_1)}{h^{(1)}(c_1)} = \frac{g^{(2)}(c_2)}{h^{(2)}(c_2)},$$

donc

$$\frac{g(b)}{h(b)} = \frac{g^{(2)}(c_2)}{h^{(2)}(c_2)}.$$

et on obtient le théorème par récurrence.

Démonstration du théorème sur le développement limité. Soit $m < n$. Les fonctions

$$R_m(x) = f(x) - P_m(x) \quad \text{et} \quad h_m(x) = (x-a)^{m+1}$$

satisfont les conditions du théorème de Cauchy généralisé sur $I = [a,x]$. Ces fonctions sont $(m+1)$-fois dérivables avec

$$R_m^{(m+1)}(x) = f^{(m+1)}(x) \quad \text{et} \quad h_m^{(m+1)}(x) = (m+1)!$$

Alors, il existe $c_{x,m}$ entre a et x tel que

$$\frac{R_m(x)}{h_m(x)} = \frac{f^{(m+1)}(c_{x,m})}{(m+1)!}.$$

Si $m = n$ notons que

$$\begin{aligned} R_n(x) &= f(x) - P_n(x) \\ &= f(x) - P_{n-1}(x) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= R_{n-1}(x) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \end{aligned}$$

Ensuite on applique le résultat précédent au reste $R_{n-1}(x)$.

Exemples.

1. On cherche le développement limité d'ordre 4 de la fonction $f(x) = \ln(1+x)$ autour de $a = 0$. Notons que pour tout $n \geq 1$
$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$$
donc $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$. Le polynôme de Taylor d'ordre 4 est donné par
$$P_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}.$$
Il existe un c entre 0 et x tel que
$$R_4(x) = \frac{1}{5(1+c)^5}x^5$$
Donc, pour $x \geq 0$, nous avons $R_4(x) \leq \frac{x^5}{5}$ et, pour $-1 < x \leq 0$ nous obtenons l'estimation $R_4(x) \leq \frac{x^5}{5(1-x)^5}$.
2. On cherche le développement limité d'ordre 4 de la fonction $f(x) = \sin(x)$ autour de $a = 0$. Le polynôme de Taylor d'ordre 4 est donné par
$$P_4(x) = P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}.$$
Il existe un c entre 0 et x tel que
$$R_4(x) = \frac{\cos c}{5!}x^5.$$

Application au calcul des limites. Soient $f, g \in C^n(I)$ deux fonctions telles que $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a) = 0$ pour $0 \leq k < n$ et $g^{(n)}(a) \neq 0$. Alors,
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$
En fait, f et g admettent les développements limités
$$f(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,f}(x), \quad g(x) = \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,g}(x)$$
On peut calculer la limite des expressions indéterminées par le développement limité. Par exemple, pour tout $a \geq 0$
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+}\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x+ax^2} &= \lim_{x\to 0+}\frac{x+ax^2-\sin x}{(x+ax^2)\sin x} = \lim_{x\to 0+}\frac{ax^2+O(x^3)}{(x+ax^2)(x+O(x^3))}\\ &= \lim_{x\to 0+}\frac{ax^2+O(x^3)}{x^2+O(x^3)} = a\end{aligned}$$
en utilisant seulement $\sin x = x + O(x^3)$.

Application aux extremums. Soit $f \in C^n(I)$ une fonction telle que $f^{(k)}(a) = 0$ pour $1 \leq k < n$ et $f^{(n)}(a) \neq 0$. Alors,

1. Si n est pair et $f^{(n)}(a) > 0$, la fonction f admet un minimum relatif strict en a.
2. Si n est pair et $f^{(n)}(a) < 0$, la fonction f admet un maximum relatif strict en a.
3. Si n est impair et $f^{(n)}(a) \neq 0$, la fonction f admet un point d'inflexion en a.

5.4.3 Calcul des polynômes de Taylor

Introduction. Soient $f, g \in C^n(I)$. Leurs polynômes de Taylor d'ordre $m \leq n$ sont donnés par

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

respectivement

$$Q_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Le but est de calculer les polynômes de Taylor d'ordre $m \leq n$ pour les fonctions $\alpha f + \beta g$, fg, f/g et $g \circ f$ à partir de P_m et Q_m.

Linéarité. Le polynôme de Taylor d'ordre $m \leq n$ pour $\alpha f + \beta g$ est donné par $\alpha P_m + \beta Q_m$.

Produit de deux fonctions. Le polynôme de Taylor d'ordre $m \leq n$ pour fg est obtenu par le produit $P_m Q_m$ en ne conservant que les termes de degré $\leq m$.

Quotient de deux fonctions. Le polynôme de Taylor d'ordre $m \leq n$ pour f/g est obtenu par le développement du quotient P_m/Q_m en ne conservant que les termes de degré $\leq m$. On peut également trouver ce polynôme de Taylor par divison polynomiale de $P_m(x)/Q_m(x)$ jusqu'à l'ordre m en commençant par l'ordre 0 (voir exemple 2 ci-dessous).

Fonction composée. Soit $f(a) = 0$. Le polynôme de Taylor d'ordre $m \leq n$ pour $g \circ f$ autour de 0 est donné par $Q_m(P_m(x))$ et en ne conservant que les termes de degré $\leq m$:

$$Q_m(P_m(x)) = \sum_{k=0}^{m} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} P_m(x)^k$$

Exemples.

1. Trouver le polynôme de Taylor d'ordre 4 pour $\ln(1 + \sin x)$ autour de $x = 0$. Le polynôme de Taylor d'ordre 4 de la fonction $\ln(1 + x)$ est

$Q_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$ et le polynôme de Taylor d'ordre 4 de la fonction $\sin x$ est $P_4(x) = x - \frac{x^3}{3!}$. Alors,

$$Q_4(P_4(x)) = P_4(x) - \frac{P_4(x)^2}{2} + \frac{P_4(x)^3}{3} - \frac{P_4(x)^4}{4}$$

en ne conservant que les termes de degré ≤ 4. Donc, jusqu'à l'ordre 4, nous avons

$$\begin{aligned} Q_4(P_4(x)) &\sim P_4(x) - \frac{x^2 - 2x\frac{x^3}{6}}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \\ &= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} \end{aligned}$$

2. Trouver le polynôme de Taylor d'ordre 4 pour $\frac{\ln(1+x)}{1+\sin x}$ autour de $x = 0$. Autrement dit, on doit trouver le polynôme de Taylor d'ordre 4 noté $T_4(x)$ pour

$$\frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}}{1 + x - \frac{x^3}{3!}}$$

On divise les polynômes en commençant par l'ordre 0 :

$$\begin{aligned} T_4(x) &= \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}}{1 + x - \frac{x^3}{3!}} + O(x^5) \\ &= x + \frac{-\frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12}}{1 + x - \frac{x^3}{3!}} + O(x^5) \\ &= x - \frac{3x^2}{2} + \frac{\frac{11x^3}{6} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{4}}{1 + x - \frac{x^3}{3!}} + O(x^5) \\ &= x - \frac{3x^2}{2} + \frac{11x^3}{6} - \frac{23x^4}{12} + O(x^5) \end{aligned}$$

Fonction réciproque. Soit $P_m(x)$ le polynôme de Taylor d'ordre n autour de $x = 0$ de la fonction $f(x)$. Soit $Q_m(y)$ le polynôme de Taylor d'ordre n autour de $y = f(0)$ de sa fonction réciproque $f^{-1}(y)$. On trouve $Q_m(y) = \sum_{k=0}^{m} \frac{a_k}{k!}(y - f(0))^k$ à partir de $P_n(x)$ en calculant itérativement les coefficients a_k dans la relation

$$x = Q_m(P_m(x)) = a_0 + a_1(P_m(x) - f(0)) + \frac{a_2}{2}(P_m(x) - f(0))^2 + ...$$

Les premiers coefficients sont donnés par

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{f'(0)}$$

$$a_2 = -\frac{f''(0)}{f'(0)^3}$$

$$a_3 = -\frac{f'''(0)f'(0) - 3f''(0)^2}{f'(0)^5}$$

Exemples.

1. Calculer le polynôme de Taylor d'ordre 3 autour de $x = 0$ de la fonction $\arcsin x$. Avec $f(x) = \sin x$ on a $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$ et $f'''(0) = -1$. Alors
$$Q_3(x) = x + \frac{x^3}{3!}$$

   Calcul explicite. Avec $P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$ les coefficients de $Q_3(x)$ satisfont la relation
$$x = a_1(x - \frac{x^3}{3!}) + \frac{a_2}{2}(x - \frac{x^3}{3!})^2 + \frac{a_3}{6}(x - \frac{x^3}{3!})^3$$
   en ne conservant que les termes de degré ≤ 3, i.e.
$$x = a_0 + a_1 x + \frac{a_2}{2}x^2 + \frac{a_3 - a_1}{6}x^3 + O(x^4)$$
   Par conséquent $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ et $a_3 = 1$.
2. Calculer le polynôme de Taylor d'ordre 3 autour de $x = 0$ de $f(x) = xe^x$ et de sa fonction réciproque autour de 0. On a $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$ et $f'''(0) = 3$. Donc
$$P_3(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{2}$$
   et
$$Q_3(y) = y - y^2 + \frac{3}{2}y^3$$

5.4.4 Application du développement limité au comportement asymptotique*

Dans certains cas on peut appliquer le développement limité pour étudier le comportement d'une fonction f lorsque $x \to \pm\infty$, par exemple pour trouver ses asymptotes. Plus précisement, on cherche un développement de la forme
$$f(x) \sim g(x)(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots)$$
lorsque $x \to \infty$ (ou $x \to -\infty$) où $g(x)$ représente une fonction "simple" telle que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = a_0$$
.

Méthode générale. Pour calculer un tel développement lorsque $x \to +\infty$ (s'il existe!) on peut poser $y = \frac{1}{x}$ et définir une fonction $h(y)$ par
$$h(y) = \begin{cases} \frac{f(1/y)}{g(1/y)} & \text{si } y > 0 \\ a_0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

Les hypothèses pour garantir le fonctionnement de la méthode : On suppose que h soit $m+1$ fois dérivable à droite en $y = 0$ et on prolonge h pour $y < 0$ tel que h

est de classe C^{m+1} dans un voisinage de 0. Alors $h(y)$ admet un développement limité autour de 0 de la forme $h(y) = P_m(y) + R_m(y)$ avec $R_m(y) = O(y^{m+1}$. On en déduit que

$$f(x) = g(x)(P_m(1/x) + O(x^{-m-1}))$$

lorsque $x \to \infty$.

Exemple. Soit $f(x) = \sqrt{x^4 + 4x^3 + 1}$. Donner a, b, c tels que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax^2 - bx - c = 0.$$

On écrit $f(x) = x^2\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}$. Donc $h(y) = \sqrt{1 + 4y + y^4}$ est de classe C^∞ dans un voisinage de 0 et admet pour développement limité

$$h(y) = 1 + 2y - 2y^2 + O(y^3).$$

Par conséquent, lorsque $x \to \infty$,

$$f(x) = x^2(1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + O(x^{-3})) = x^2 + 2x - 2 + O(x^{-1})$$

i.e. $a = 1$,$b = 2$ et $c = -2$.

5.4.5 Séries entières

Définition. Soit f une fonction de classe $C^\infty(I)$. On appelle

$$P_\infty(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

la série de Taylor (ou série entière) de la fonction f développée au point a. Le polynôme de Taylor $P_m(x)$ représente pour tout $m \in \mathbb{N}$ une somme partielle de cette série.

Remarque. La série de Taylor est convergente pour $x = a$ et $P_\infty(a) = f(a)$ mais elle n'est pas nécessairement convergente pour $x \neq a$. D'autre part, si $P_\infty(x) < \infty$, on n'a pas toujours $f(x) = P_\infty(x)$. Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

est de classe $C^\infty(I)$ et $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $P_\infty(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La classe des fonctions pour lesquelles $f(x) = P_\infty(x)$ est appelée la classe des séries entières.

Série entière et son rayon de convergence. Soit (a_n) une suite numérique et $a \in \mathbb{R}$. La série

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$$

est appelée une série entière. De plus, soit R défini par

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

en utilisant la convention que

$$R = 0 \quad \text{si} \quad \limsup_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = +\infty$$

et

$$R = +\infty \quad \text{si} \quad \limsup_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$$

R est appelé le rayon de convergence de la série. Par conséquent, pour $|x-a| < R$ la série est absolument convergente et pour $|x-a| > R$ la série diverge.

Pour $|x-a| < R$ on définit la fonction f par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$$

Théorème 5.17. ***Série entière.*** *La fonction $f(x)$ est de classe $C^\infty(]a-R, a+R[)$. En particulier,*

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k (x-a)^{k-1}$$

et

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

i.e. $f(x) = P_\infty(x)$ pour $|x-a| < R$.

Exemples.

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!,} & x \in \mathbb{R} \\
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, & x \in \mathbb{R} \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, & x \in \mathbb{R} \\
\ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}, & x \in]-1, 1[\\
\frac{1}{1+x} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k, & x \in]-1, 1[\\
\arctan x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, & x \in]-1, 1[
\end{aligned}$$

5.5 Étude d'une fonction

L'étude d'une fonction réelle f consiste en général à déterminer ses propriétés selon la liste suivante :

1. Domaine de définition et son image (si c'est déjà possible sans passer par les points ci-dessous), appartenance à une classe C^k.
2. Parité, autres symétries, périodicité
3. Continuité et les points de discontinuité avec calcul des limites en ces points.
4. Valeurs ou limites aux points frontières du domaine de définition, calcul des asymptotes ou du comportement asymptotique.
5. Dérivabilité avec calcul de la fonction dérivée f'.
6. Points stationnaires et leur nature, extremums locaux.
7. Points d'inflexion.
8. Éventuellement donner un tableau de variation et dessiner le graphe de f.

Souvent ses propriétés ne peuvent pas être déterminêes dans l'ordre de cette liste. Par exemple, souvent on détermine l'image de f à la fin après le calcul des extremums ou on calcule les limites aux points frontières du domaine les asymptotes à l'aide de f'.

Chapitre 6

Calcul intégral

Nous présontons les techniques de base du calcul intégral.

Notions à apprendre. intégrale définie, intégrale indéfinie, fonction primitive, théorème fondamental du calcul intégral, intégration par partie, changement de variable, intégrale généralisée, la fonction Gamma, formule de Stirling, intégrale de Gauss

Compétences à acquérir. Connaître les fonctions primitives des fonctions élémentaires, connaître et savoir appliquer l'intégration par partie et le changement de variable au calcul des intégrales définies, indéfinies et généralisées

6.1 L'intégrale de Riemann

Introduction. Le problème de calculer l'aire de figures géometriques dont la frontière n'est pas partout rectiligne est à l'origine du calcul intégral. La résolution des équations de Newton en mécanique classique nous amènent à des problèmes similaires. Considérons, par exemple, le mouvement sur une droite. Si la vitesse $v(t)$ d'un objet, en fonction du temps t, est connue, quelle est la distance parcourue, notée s, dans l'intervalle de temps $[a, b]$? Si la vitesse est constante, $v(t) = v$, la réponse est évidemment $s = v(b - a)$ ce qui correspond à l'aire de la région délimitée par le graphe de $v(t)$ et l'axe horizontal. Si $v(t)$ est constante par morceaux, c'est-à-dire $v(t)$ est une fonction en escalier, alors la distance parcourue s est toujours égale à l'aire de la région délimitée par le graphe de $v(t)$ et l'axe horizontal. Pour une fonction générale $v(t)$ on considère une approximation de $v(t)$ par des fonctions en escalier. Le résultat s de ce processus limite est appelé intégrale et on note

$$s = \int_a^b v(t)dt.$$

L'équation du mouvement

$$\dot{s}(t) \equiv \frac{d\,s(t)}{d\,t} = v(t), \quad s(a) = 0$$

où $s(t)$ signifie la distance parcourue dans l'intervalle $[a, t]$, nous donne une autre interprétation plus importante de l'intégrale. L'intégrale $s(t)$

$$s(t) = \int_a^t v(\tau) d\tau.$$

est l'opération réciproque de la différentiation. On appelle la fonction $s(t)$ primitive de $v(t)$. Pour étudier le comportement du mouvement pour t grand on s'interésse à la limite

$$\lim_{t\to\infty} s(t) = \int_a^\infty v(\tau) d\tau$$

appelée intégrale généralisée.

Subdivision d'un intervalle fermé. Soit $a < b$. Le sous-ensemble ordonné et fini

$$\sigma = \{a_0, \ldots, a_n : a_0 = a < a_1 < \ldots < a_n = b\}$$

est appelé une *subdivision* ou encore une *partition* de l'intervalle $[a, b]$. Le nombre $P(\sigma) = \max\{a_i - a_{i-1} : i = 1, \ldots, n\}$ est appelé le pas de la subdivision. En particulier, la subdivision

$$\sigma = \{a_0, \ldots, a_n : a_k = a + k\frac{b-a}{n}\}$$

est appelé la *subdivision régulière d'ordre* n de $[a, b]$.

Fonction en escalier. Soit σ une subdivision de $[a, b]$ et $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Soient, pour $i = 1, \ldots, n$, $g_i :]a_{i-1}, a_i[\to \mathbb{R}$ tels que $g_i(x) = y_i$ pour $x \in [a_{i-1}, a_i[$. La fonction $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = g_i(x)$ est appelée *fonction en escalier.*

Remarque. Toute combinaison linéaire des fonctions en escalier est une fonction en escalier.

Intégrale d'une fonction en escalier. Soit f une fonction en escalier. On définit l'intégrale $I_f(a, b)$ de f par

$$I_f := \int_a^b f(x) dx := \sum_{k=1}^n y_k(a_k - a_{k-1}).$$

Cette définition ne dépend pas de la subdivison σ. La deuxième étape consiste à étendre cette construction aux fonctions plus générales.

Sommes de Riemann. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et σ une subdivision de $[a, b]$. On pose

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in]a_{k-1}, a_i[\}$$

$$M_k = \sup\{f(x) : x \in]a_{k-1}, a_i[\}$$

On appelle

$$\underline{S}_f^\sigma = \textstyle\sum_{k=1}^n m_k(a_k - a_{k-1})$$

$$\overline{S}_f^\sigma = \textstyle\sum_{k=1}^n M_k(a_k - a_{k-1})$$

la somme de Riemann inférieure, respectivement la somme de Riemann supérieure, de la fonction f relativement à la subdivision σ. Evidemment, on a $\underline{S}_f^\sigma \leq \overline{S}_f^\sigma$.

Fonction intégrable et l'intégrale. On pose

$$\underline{S}_f = \sup_\sigma \underline{S}_f^\sigma, \quad \overline{S}_f = \inf_\sigma \underline{S}_f^\sigma$$

On a $\underline{S}_f \leq \overline{S}_f$. Une fonction bornée sur $[a, b]$ est dite intégrable sur $[a, b]$ si $\underline{S}_f = \overline{S}_f$. Dans ce cas on écrit

$$\underline{S}_f = \overline{S}_f = I_f = \int_a^b f(x)dx.$$

Par convention :

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Théorème. Une fonction bornée $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ il existe une subdivision σ de $[a, b]$ telle que

$$\overline{S}_f^\sigma \leq \underline{S}_f^\sigma + \epsilon.$$

Théorème. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est intégrable.

Démonstration. Soit σ une subdivision régulière d'ordre n. Alors,

$$\overline{S}_f^\sigma - \underline{S}_f^\sigma = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(\frac{b-a}{n})$$

Par la continuité de f, f est uniformément continue sur l'intervalle fermé et borné $[a, b]$. Donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout k compris entre 1 et n, on a $M_k - m_k \leq \epsilon$. Alors

$$\sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(\frac{b-a}{n}) \leq \epsilon(b - a).$$

Théorème. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction monotone croissante (ou décroissante). Alors f est intégrable.

Démonstration. Soit σ une subdivision régulière d'ordre n. Si f est croissante on a $m_k = f(a_{k-1})$ et $M_k = f(a_k)$. Par conséquent

$$\begin{aligned}\overline{S}_f^\sigma - \underline{S}_f^\sigma &= \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(a_k - a_{k-1}) \\ &= \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=1}^n (f(a_k) - f(a_{k-1})) \\ &= \left(\frac{b-a}{n}\right)(f(b) - f(a))\end{aligned}$$

Une fonction non-intégrable. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Alors, pour toute subdivision σ de $[0,1]$ on a $\underline{S}_f^\sigma = 0$ et $\overline{S}_f^\sigma = 1$.

Calcul de l'intégrale à l'aide de la définition.

1. Soit $f(x) = x^2$. On va montrer que pour tout $b > 0$

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}.$$

Soit σ une subdivision régulière d'ordre n. Alors, comme f est croissante sur $[0, b]$

$$\begin{aligned}\overline{S}_f^\sigma &= \left(\frac{b-0}{n}\right)\sum_{k=1}^n \left(0 + k\frac{b-0}{n}\right)^2 \\ &= \left(\frac{b}{n}\right)^3 \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \frac{b^3}{n^3}\frac{(n+1)(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3} \longrightarrow \frac{b^3}{3} \text{ lorsque } n \to \infty.\end{aligned}$$

Décomposition d'une fonction en partie positive et partie négative. On définit la partie positive respectivement la partie négative d'une fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$ par

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} = \tfrac{f(x)+|f(x)|}{2} \qquad f^+ : D_f \to \mathbb{R}_+$$

$$f^-(x) = -\min\{f(x), 0\} = \tfrac{|f(x)|-f(x)}{2} \qquad f^- : D_f \to \mathbb{R}_+$$

Evidemment $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ et $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$.

6.2 Propriétés de l'intégrale de Riemann

Théorème 6.1. - *Propriétés de l'intégrale de Riemann* *Soient* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions intégrables. Alors,*

$$\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx+\beta \int_a^b g(x)dx \quad \text{pour tout } \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{6.1}$$

Si $f(x) \leq g(x)$ *pour tout* $x \in [a, b]$*, alors*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx. \tag{6.2}$$

En particulier,

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx. \tag{6.3}$$

Pour tout $c \in]a, b[$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{6.4}$$

Théorème 6.2. - *Théorème de la valeur moyenne.* *Soient* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues et* $g \geq 0$*. Alors, il existe (au moins) un* $c \in]a, b[$ *tel que*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$$

En particulier, si $g = 1$ *:*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

6.3 La dérivée et l'intégrale

Primitives. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Une fonction continue $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ est appelée une primitive de f si pour tout $x \in]a, b[: F'(x) = f(x)$. Si G est une autre primitive de f, alors $F - G$ est constante.

Existence des primitives pour des fonctions continues et l'intégrale indéfinie. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors la fonction $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par l'intégrale indéfinie

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est une primitive de f.

Théorème 6.3. - *Théorème fondamental du calcul intégral.* *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue. Alors, si* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *est une primitive de* f*, on peut écrire*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Remarque. On écrit souvent $F(x)\big|_a^b$ à la place de $F(b)-F(a)$.

Remarque. Pour l'intégrale indéfinie on trouve dans les tableaux la notation

$$\int f(x)dx = F(x) \quad \text{ou} \quad \int f(x)dx = F(x)+C \quad \text{ou encore} \quad \int^x f(t)dt = F(x).$$

Exemples. Par le théorème fondamental du calcul intégral une méthode simple pour déterminer les primitives consiste à calculer les dérivées des fonctions connues. Par exemple,

1. $$\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} \quad \text{si } p \neq -1 \text{ et } x > 0.$$

2. $$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| \quad x \neq 0$$

3. $$\int \sin x\, dx = -\cos x, \quad \int \cos x\, dx = \sin x$$

4. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $f > 0$. Alors,

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln f(x)$$

et

$$\int f'(x) f(x)^p dx = \frac{f(x)^{p+1}}{p+1} \quad \text{si } p \neq -1.$$

6.4 Techniques d'intégration

Introduction. Les règles essentielles du calcul intégral sont une conséquence du théorème fondamental du calcul intégral et des règles établies pour le calcul différentiel.

6.4.1 Intégration par partie

L'intégration par partie est une conséquence de la règle de dérivation d'un produit de deux fonctions.

Intégration par partie. Soit I un intervalle ouvert, $a, b \in I$ et $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1. Alors,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Application - développement limité et formule de Taylor. Soit I un intervalle ouvert, $a \in I$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1}. Alors, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

c'est-à-dire le reste de Taylor est explicitement donné par

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

6.4.2 Changement de variable

La règle du changement de variable (aussi dite règle de substitution) est une conséquence de la dérivée d'une fonction composée.

Proposition. Soient $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit I un intervalle ouvert, et $g, h : I \to [a, b]$ deux fonctions de classe C^1. Alors, la fonction $K : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$K(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$$

est de classe C^1 et pour tout $x \in I$:

$$K'(x) = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x).$$

Changement de variable. Soient $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit I un intervalle ouvert, $\alpha, \beta \in I$, $\alpha < \beta$ et $\phi : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $\phi([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$ et $\phi'(t) \neq 0\, \forall t \in [\alpha, \beta]$. Alors,

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

La transformation $x = \phi(t)$ est appelée changement de variable.

Remarque. Intuitivement, on écrit

$$dx = \frac{dx}{dt}dt.$$

6.4.3 Exemples - techniques et intégrales fréquentes

1. **Polynômes et fonction exponentielle :** $\int^{\mathbf{x}} \mathbf{P_n(t)e^{\lambda t}\, dt}$. On utilise que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$

$$\int^x e^{\lambda t}\, dt = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda}, \quad \text{i.e.} \quad e^{\lambda t} = \left(\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\right)'$$

   et l'intégration par partie.

Exemple.

$$\begin{aligned}\int^x te^{-t}\,dt &= \int^x t(-e^{-t})'\,dt\\ &= -te^{-t}\Big|^x - \int^x (t)'(-e^{-t})\,dt\\ &= -xe^{-x} - \int^x 1\cdot(-e^{-t})\,dt\\ &= -xe^{-x} - e^{-x}\end{aligned}$$

On vérifie ce résultat en calculant la dérivée :

$$(-xe^{-x} - e^{-x})' = xe^{-x} - e^{-x} + e^{-x} = xe^{-x}.$$

Polynôme général. Soit $P_n(t)$ un polynôme de degré n. Il faut n intégrations par partie pour "éliminer" $P_n(t)$:

$$\begin{aligned}\int^x P_n(t)e^{\lambda t}\,dt &= \int^x P_n(t)\left(\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\right)'\,dt\\ &= P_n(t)\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\Big|^x - \int^x P_n'(t)\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\,dt\\ &= \lambda^{-1}P_n(x)e^{\lambda x} - \lambda^{-1}\int^x P_n'(t)e^{\lambda t}\,dt\end{aligned}$$

et $P_n'(t)$ est un polynôme de degré $n-1$. On peut démontrer par récurrence que

$$\int^x P_n(t)e^{\lambda t}\,dt = e^{\lambda x}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\lambda^{-k-1}P_n^{(k)}(x)$$

2. **Polynômes et fonctions sin et cos** : $\int^{\mathbf{x}} \mathbf{P_n(t)}\sin \mathbf{t}\,\mathbf{dt}$ **et** $\int^{\mathbf{x}} \mathbf{P_n(t)}\cos \mathbf{t}\,\mathbf{dt}$.
On utilise les dérivées

$$\sin t = (-\cos t)', \quad (\sin t)' = \cos t$$

et n intégrations par partie pour "éliminer" $P_n(t)$:

$$\begin{aligned}\int^x P_n(t)\cos t\,dt &= \int^x P_n(t)(\sin t)'\,dt\\ &= P_n(t)\sin t\Big|^x - \int^x P_n'(t)\sin t\,dt\\ &= P_n(t)\sin t\Big|^x - \int^x P_n'(t)(-\cos t)'\,dt\\ &= P_n(t)\sin t + P_n'(t)\cos t\Big|^x - \int^x P_n''(t)\cos t\,dt \quad \text{etc.}\end{aligned}$$

Par exemple,

$$\begin{aligned}\int^x t\cos t\,dt &= \int^x t(\sin t)'\,dt\\ &= t\sin t\Big|^x - \int^x \sin t\,dt\\ &= t\sin t + \cos t\Big|^x\end{aligned}$$

Cette technique s'applique également aux fonctions hyperboliques sinh, cosh. De la même manière, on calcule les intégrales $\int^x \cos t\, e^{\lambda t} dt$ et $\int^x \sin t\, e^{\lambda t} dt$ par deux intégrations par partie.

3. **Une suite récurrente pour $I_n := \int^x \sin^n t dt$.** On utilise $\sin^2 + \cos^2 = 1$, les intégrales

$$I_0 = \int^x \sin^0 t\, dt = x, \quad I_1 = \int^x \sin t\, dt = -\cos x$$

et les dérivées

$$\sin t = (-\cos t)', \quad (\sin t)' = \cos t$$

Exemple.

$$\begin{aligned} I_2 = \int^x \sin^2 t\, dt &= \int^x \sin t(-\cos t)'\, dt \\ &= -\sin t \cos t\Big|^x - \int^x (\sin t)'(-\cos t)\, dt \\ &= -\sin x \cos x + \int^x \cos^2 t\, dt \\ &= -\sin x \cos x + \int^x 1 - \sin^2 t\, dt \\ &= -\sin x \cos x + x - I_2 \end{aligned}$$

Donc $2I_2 = -\sin x \cos x + x$.

Calcul de I_n.

$$\begin{aligned} I_n = \int^x \sin^n t\, dt = \int^x \sin^{n-1} t(-\cos t)'\, dt& \\ &= -\sin^{n-1} t \cos t\Big|^x - (n-1)\int^x (\sin t)' \sin^{n-2} t(-\cos t)\, dt \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int^x \cos^2 t \sin^{n-2} t\, dt \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int^x (1-\sin^2 t) \sin^{n-2} t\, dt \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \end{aligned}$$

Donc

$$I_n = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Application - produit de Wallis. Nous utilisons la récurrence pour I_n pour calculer l'intégrale définie par

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt$$

Notons que $A_0 = \frac{\pi}{2}$, $A_1 = 1$ et

$$A_n = \frac{n-1}{n} A_{n-2} \quad \text{si } n \geq 2.$$

Nous obtenons

$$A_{2n} = \tfrac{\pi}{2}\tfrac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}{2n\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2}$$

$$A_{2n+1} = \tfrac{2n\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2}{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdot\ldots\cdot 3}$$

Dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ on a

$$\sin^{2n+2} t \leq \sin^{2n+1} t \leq \sin^{2n} t$$

donc

$$A_{2n+2} \leq A_{2n+1} \leq A_{2n}.$$

Par conséquent, la limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_{2n+2}}{A_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1$$

implique que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_{2n+1}}{A_{2n}} = 1.$$

i.e.

$$\frac{2}{\pi} \lim_{n\to\infty} \frac{2n\cdot 2n\cdot\ldots\cdot 4\cdot 4\cdot 2\cdot 2}{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdot\ldots\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 1} = 1$$

ou

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} \quad \text{(produit de Wallis)}$$

Ce produit sera utile pour démontrer la formule de Stirling.

4. **Intégrale de $\sqrt{\mathbf{1-x^2}}$.** L'intégrand est défini entre ses deux zéros -1 et 1. On applique un changement de variable $x = \sin t$. Soit $-1 < a < b < 1$. Notons que pour $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ la fonction $\sin t$ est croissante et $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} \geq 0$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_{\arcsin a}^{\arcsin b} \sqrt{1-\sin^2 t}\,(\sin t)'\,dt \\
&= \int_{\arcsin a}^{\arcsin b} \cos^2 t\,dt \\
&= \int_{\arcsin a}^{\arcsin b} 1-\sin^2 t\,dt \\
&= t - \frac{-\sin t\cos t + t}{2}\Bigg|_{\arcsin a}^{\arcsin b} \\
&= \frac{\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}+t}{2}\Bigg|_{\arcsin a}^{\arcsin b} \\
&= \frac{x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x}{2}\Bigg|_a^b
\end{aligned}$$

Ce résultat est aussi valable pour $a=-1$ et $b=1$ et

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Noter que, avec le changement de variable $x = \cos t$, $t \in [0, \pi]$, on obtient

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{1-x^2} - \arccos x}{2}\Big|_a^b.$$

(Noter que $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$). Par une intégration par partie on peut utiliser l'intégrale

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x\Big|_a^b.$$

En effet

$$\begin{aligned}
I = \int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_a^b (x)'\sqrt{1-x^2}\,dx \\
&= x\sqrt{1-x^2}\Big|_a^b - \int_a^b x(\sqrt{1-x^2})'\,dx \\
&= x\sqrt{1-x^2}\Big|_a^b - \int_a^b x\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= x\sqrt{1-x^2}\Big|_a^b - \int_a^b \frac{1+1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= x\sqrt{1-x^2}\Big|_a^b - \int_a^b \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\Big|_a^b - I
\end{aligned}$$

Aire d'un disque. Le disque de rayon r centré dans l'origine $(0,0)$ est donné par l'équation

$$B_r = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

L'aire de B_r peut être calculé en utilisant l'intégrale ci-dessus :

$$\begin{aligned}
\text{Aire}(B_r) = 2\int_{-r}^{+r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = 2\int_{-1}^{+1} \sqrt{r^2 - r^2t^2}\,r dt \\
&= 2r^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt = \pi r^2
\end{aligned}$$

par le changement de variable $x = rt$.

Aire d'une ellipse. Soit E l'ellipse donnée par

$$E_{a,b} = \{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}, \quad a, b > 0$$

Comme avant par le changement de variable $x = at$ on obtient

$$\text{Aire}(E_{a,b}) = 2\int_{-a}^{+a} \sqrt{b^2 - b^2\frac{x^2}{a^2}}\,dx = 2ab\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-t^2}\,dt = \pi ab$$

5. **Intégrale des fonctions contenant $\sqrt{\mathbf{1+x^2}}$.** L'intégrand est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par le changement de variable $x = \sinh t$ nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \int_{\operatorname{arcsinh} a}^{\operatorname{arcsinh} b} \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 t}}\,(\sinh t)'\,dt \\
&= \int_{\operatorname{arcsinh} a}^{\operatorname{arcsinh} b} \frac{\cosh t}{\cosh t}\,dt \quad \text{avec } \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \\
&= \int_{\operatorname{arcsinh} a}^{\operatorname{arcsinh} b} 1\,dt \\
&= t\Big|_{\operatorname{arcsinh} a}^{\operatorname{arcsinh} b} \\
&= \operatorname{arcsinh} x\Big|_a^b \\
&= \ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_a^b \quad \text{avec } \operatorname{arcsinh} x = \ln(x+\sqrt{1+x^2})
\end{aligned}$$

Une autre solution consiste à transformer l'intégrand :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \\
&= (\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+1)\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{\frac{d}{dx}(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{d}{dx}\ln(x+\sqrt{1+x^2})
\end{aligned}$$

Calculons $\int_a^b \sqrt{1+x^2}\,dx$. Le changement de variable $x = \sinh t$ nous donne

$$I = \int_a^b \sqrt{1+x^2}\,dx = \int_{\operatorname{arcsinh} a}^{\operatorname{arcsinh} b} \cosh^2 t\,dt$$

Par une récurrence comme dans l'exemple 2 nous obtenons

$$I = \int_{\operatorname{arcsinh} a}^{\operatorname{arcsinh} b} \cosh^2 t dt = \frac{t+\sinh t\cosh t}{2}\Big|_{\operatorname{arcsinh} a}^{\operatorname{arcsinh} b} = \frac{\operatorname{arcsinh} x + x\sqrt{1+x^2}}{2}\Big|_a^b$$

On peut obtenir ce résultat aussi par une intégration par partie :

$$\begin{aligned}
I = \int_a^b \sqrt{1+x^2}\,dx &= \int_a^b (x)'\sqrt{1+x^2}\,dx \\
&= x\sqrt{1+x^2}\Big|_a^b - \int_a^b x(\sqrt{1+x^2})'\,dx \\
&= x\sqrt{1+x^2}\Big|_a^b - \int_a^b x\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \\
&= x\sqrt{1+x^2}\Big|_a^b - \int_a^b \frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \\
&= x\sqrt{1+x^2}\Big|_a^b - \int_a^b \sqrt{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \\
&= x\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arcsinh} x\Big|_a^b - I
\end{aligned}$$

6. **Calcul de $\int_a^b 1/\sqrt{x^2-1}\,dx$ et de $\int_a^b \sqrt{x^2-1}\,dx$.** On applique le changement de variable $x = \cosh t$. Soit $a, b > 1$. Alors

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx &= \int_{\operatorname{arccosh} a}^{\operatorname{arccosh} b} \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 t - 1}}(\cosh t)'\,dt \\
&= \int_{\operatorname{arccosh} a}^{\operatorname{arccosh} b} \frac{\sinh t}{\sinh t}\,dt \quad \text{avec } \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \\
&= \int_{\operatorname{arccosh} a}^{\operatorname{arccosh} b} 1\,dt \\
&= t\Big|_{\operatorname{arccosh} a}^{\operatorname{arccosh} b} \\
&= \operatorname{arccosh} x\Big|_a^b \\
&= \ln(x+\sqrt{x^2-1})\Big|_a^b \quad \text{avec } \operatorname{arccosh} x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})
\end{aligned}$$

Comme dans l'exemple précédent on calcule

$$\int_a^b \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2-1} - \operatorname{arccosh} x}{2}\Big|_a^b$$

7. **Intégrales $\int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx$ et $\int_a^b \frac{1}{1-x^2}\,dx$.**

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan b - \arctan a$$

Pour calculer on utilise la décomposition en éléments simples.

$$\int_a^b \frac{1}{1-x^2}\,dx = \int_a^b \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\Big|_a^b = \operatorname{arctanh} x\Big|_a^b$$

Pour des fonctions rationnelles il faut factoriser le dénominateur et effectuer la décomposition en éléments simples.

8. **Intégrale des fonctions rationnelles $\frac{\mathbf{P(x)}}{\mathbf{Q(x)}}$ - Décomposition en éléments simples.** Tout polynôme sur $\mathbb{R}$ s'écrit comme produit de polynômes linéaires et quadratiques. Soit
$$Q(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)^{k_i} \prod_{j=1}^{m} (x^2 + 2b_j x + c_j)^{l_j}$$
où le ploynôme de degré 2 est positif ($c_j > b_j^2$). Si $P(x)$ est un autre polynôme n'ayant aucun diviseur commun avec $Q(x)$ on peut écrire
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{s_i=1}^{k_i} \frac{a_{i,s_i}}{(x - a_i)^{s_i}} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{t_j=1}^{l_j} \frac{b_{j,t_j} x + c_{j,t_j}}{(x^2 + 2b_j x + c_j)^{t_j}}$$
et $R(x)$ est un polynôme de degré $d_P - d_Q$ si $d_P - d_Q \geq 0$. Les primitives de $(x - a_i)^{-s_i}$ sont données par $(1 - s_i)^{-1}(x - a_i)^{1-s_i}$ si $s_i \neq 1$ et $\ln |x - a_i|$ si $s_i = 1$. Tout polynôme $x^2 + 2b_j x + c_j > 0$ se laisse transformer en le polynôme $1 + x^2$ par
$$x^2 + 2b_j x + c_j = (c_j - b_j^2)\Big((\frac{x + b_j}{\sqrt{c_j - b_j^2}})^2 + 1\Big).$$
Il suffit d'évaluer les intégrales de la forme suivante :
$$\begin{aligned} \int^x \frac{2t}{(1+t^2)^m}\, dt &= (1-m)^{-1}(1+t^2)^{1-m}, \quad m \neq 1 \\ \int^x \frac{2t}{(1+t^2)}\, dt &= \ln(1+t^2) \end{aligned}$$
et
$$\int^x \frac{1}{(1+t^2)^m}\, dt$$
par des intégrations par partie en écrivant $1 = t'$.

9. **Intégrale de la réciproque d'une fonction.** L'intégration par partie
$$\int^x f(t)\, dt = \int^x (t)' f(t)\, dt = x f(x) - \int^x t f'(t)\, dt$$
est souvent utilisée pour calculer les intégrales de fonctions réciproques :
$$\int^x \ln t\, dt = x \ln x - \int^x t \frac{1}{t}\, dt = x \ln x - x$$
$$\begin{aligned} \int^x \arcsin t\, dt &= x \arcsin x - \int^x t \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \\ &= x \arcsin x - \int^x (-\sqrt{1-t^2})'\, dt \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

Alternativement on peut effectuer le changement de variable $t = f(s)$ suivi d'une intégration par partie. Soit f inversible et F une primitive de f. Alors

$$\begin{aligned}\int^x f^{-1}(t)\,dt &= \int^{f^{-1}(x)} sf'(s)\,ds \\ &= xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x))\end{aligned}$$

10. **La règle du trapèze I.** Soit f une fonction de classe $C^2([a,b])$. Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) - \frac{1}{12}f''(c)(b-a)^3$$

Démonstration. On définit une fonction $h \in C^2([a,b])$ par

$$h(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2}.$$

La fonction h vérifie les propriétés $h(a) = h(b) = 0$, $h'(b) = -h'(a) = \frac{b-a}{2}$ et $h''(x) = 1$. En faisant deux intégrations par partie, on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b h''(x)f(x)\,dx \\ &= h'(x)f(x)\Big|_a^b - \int_a^b h'(x)f'(x)\,dx \\ &= h'(x)f(x) - h(x)f'(x)\Big|_a^b + \int_a^b h(x)f''(x)\,dx \\ &= \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) + \int_a^b h(x)f''(x)\,dx\end{aligned}$$

Par le théorème de la valeur moyenne, il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) + f''(c)\int_a^b h(x)\,dx \\ &= \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) - \frac{1}{12}f''(c)(b-a)^3.\end{aligned}$$

11. **La règle du trapèze II.** Soit f une fonction de classe $C^2([a,b])$. Alors, il existe $d \in]a,b[$ tel que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{1}{24}f''(d)(b-a)^3$$

Démonstration. Soit $\mu = \frac{a+b}{2}$. On divise l'intégrale en deux parties :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\mu f(x)\,dx + \int_\mu^b f(x)\,dx$$

On définit deux fonctions $h_1 \in C^2([a,\mu])$ et $h_2 \in C^2([\mu,b])$ par

$$h_1(x) = \frac{(x-a)^2}{2} \text{ si } x \in [a,\mu] \text{ et } h_2(x) = \frac{(x-b)^2}{2} \text{ si } x \in [\mu,b].$$

et la fonction $h \in C^0([a,b])$ par morceaux, i.e.

$$h(x) = \begin{cases} h_1(x) & \text{si } x \in [a,\mu], \\ h_2(x) & \text{si } x \in [\mu,b]. \end{cases}$$

Comme ci-dessus on a

$$\begin{aligned} \int_a^\mu f(x)\,dx &= h_1'(x)f(x) - h_1(x)f'(x)\big|_a^\mu + \int_a^\mu h_1(x)f''(x)\,dx \\ &= (\mu-a)f(\mu) - h_1(\mu)f'(\mu) + \int_a^\mu h_1(x)f''(x)\,dx \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_\mu^b f(x)\,dx &= h_2'(x)f(x) - h_2(x)f'(x)\big|_\mu^b + \int_\mu^b h_2(x)f''(x)\,dx \\ &= -(\mu-b)f(\mu) + h_2(\mu)f'(\mu) + \int_\mu^a h_2(x)f''(x)\,dx \end{aligned}$$

Donc

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\mu)(b-a) + \int_a^b h(x)f''(x)\,dx.$$

6.5 Intégrales généralisées

Introduction. Nous avons défini l'intégrale pour un sous-ensemble de fonctions $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornées dites intégrables. Peut-on étendre cette définition aux fonctions non-bornées sur un intervalle ouvert ou aux intervalles non-bornés ? Les exemples suivants vont illustrer le problème.

Exemples.

1. Existe-t-il $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$? La fonction $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,1[$ mais non-bornée. Pour tout $x \in]0,1]$ la fonction f est intégrable sur $[x,1]$ et

$$I(x) := \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = 2\sqrt{t}\big|_x^1 = 2 - 2\sqrt{x}$$

Notons que la limite $\lim\limits_{x\to 0+} I(x)$ existe. On appelle cette limite l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ et on pose

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \lim_{x\to 0+} I(x) = 2$$

Remarque. Le fait qu'il s'agit d'une limite uni-directionnelle (de droite) est souvent noté par la borne 0+.

2. Existe-t-il $\int_0^1 \frac{1}{t}\, dt$? Comme avant on calcule l'intégrale sur $[x, 1]$ pour un $x \in]0, 1]$:
$$I(x) := \int_x^1 \frac{1}{t}\, dt = \ln t\big|_x^1 = -\ln x$$
Dans ce cas, $\lim_{x\to 0+} I(x)$ n'existe pas et on dit que l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{1}{t}\, dt$ diverge ou encore n'existe pas.
3. Existe-t-il $\int_0^\infty e^{-t}\, dt$? On a
$$F(x) = \int_0^x e^{-t}\, dt = -e^{-t}\big|_0^x = 1 - e^{-x}$$
De nouveau on peut définir l'intégrale généralisée
$$\int_0^\infty e^{-t}\, dt = \lim_{x\to\infty} F(x) = 1.$$
4. Existe-t-il $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+t^2}\, dt$? Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit
$$I_1(x) = \int_x^a \frac{1}{1+t^2}\, dt = \arctan a - \arctan x$$
et
$$I_2(x) = \int_a^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \arctan x - \arctan a$$
Evidemment on a
$$\lim_{x\to-\infty} I_1(x) = \arctan a + \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to+\infty} I_2(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan a$$
et on définit l'intégrale généralisée
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+t^2}\, dt = \lim_{x\to-\infty} I_1(x) + \lim_{x\to+\infty} I_2(x) = \pi.$$
L'exemple suivant montre pourquoi en général on ne peut pas simplement définir l'intégrale généralisée
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+t^2}\, dt = \lim_{x\to-\infty} \int_{-x}^x \frac{1}{1+t^2}\, dt$$
mais qu'il faut étudier les deux limites séparément.
5. On considère $\int_{-\infty}^\infty \frac{2t}{1+t^2}\, dt$. L'intégrand est une fonction impaire, donc
$$\int_{-x}^x \frac{2t}{1+t^2}\, dt = 0 \quad \text{pour tout } x > 0$$
Par contre, pour tout $a > 0$ on a
$$\int_a^x \frac{2t}{1+t^2}\, dt = \ln(1+x^2) - \ln(1+a^2) \to +\infty \quad \text{lorsque } x \to +\infty.$$
Donc l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^\infty \frac{2t}{1+t^2}\, dt$ diverge.

Définition. Soit I un intervalle et $a = \inf I < b = \sup I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et intégrable sur tout intervalle $[c, d] \subset I$ où $a < c < d < b$. On dit que f est intégrable sur I si et seulement si pour un point $p \in]a, b[$ les limites

$$\lim_{x \to a+} \int_x^p f(t)\, dt \quad \text{et} \quad \lim_{x \to b-} \int_p^x f(t)\, dt$$

existent. Dans ce cas, on définit l'intégrale généralisée de f sur I par

$$\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{x \to a+} \int_x^p f(t)\, dt + \lim_{x \to b-} \int_p^x f(t)\, dt$$

On dit que l'intégrale généralisée de f sur I est absolument convergente si l'intégrale généralisée de $|f|$ sur I existe. Dans ce cas l'intégrale généralisée de f sur I est convergente (comme c'est le cas pour les séries). Comme pour les séries absolument convergentes on peut formuler un critère de comparaison pour des intégrales absolument convergentes.

Critère de comparaison. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ intégrables sur I telles que $0 \leq |f|(x) \leq |g|(x)$. Alors,

$$\int_I |g(t)|\, dt < +\infty \quad \Rightarrow \quad \int_I |f(t)|\, dt < +\infty \tag{6.5}$$

$$\int_I |f(t)|\, dt = +\infty \quad \Rightarrow \quad \int_I |g(t)|\, dt = +\infty. \tag{6.6}$$

Application : convergence absolue implique convergence. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ intégrables sur I telles que $0 \leq |f|(x) \leq g(x)$. Alors, l'intégrale généralisée de f sur I est absolument convergente et

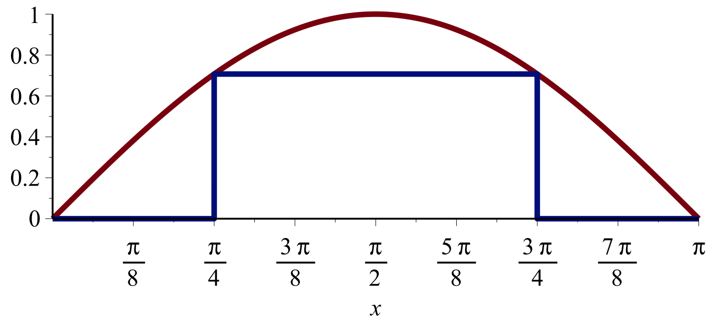
$$-\infty < -\int_I g(t)\, dt \leq -\int_I |f(t)|\, dt \leq \int_I f(t)\, dt \leq \int_I |f(t)|\, dt \leq \int_I g(t)\, dt < +\infty$$

Exemples.

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^{1+p}}\, dx$ est absolument convergente pour tout $0 < p < 1$ puisque $\displaystyle\int_0^b \frac{\sin x}{x^{1+p}}\, dx$ est absolument convergente pour tout $p < 1, b > 0$ et $\displaystyle\int_b^\infty \frac{\sin x}{x^{1+p}}\, dx$ est absolument convergente pour tout $0 < p$, $b > 0$.
   Preuve : pour tout $s, t \in]0, b[$, $s < t$ et $p < 1$:
   $$\int_s^t \left|\frac{\sin x}{x^{1+p}}\right| dx \leq \int_s^t \left|\frac{1}{x^p}\right| dx = \left|\frac{t^{1-p} - s^{1-p}}{1 - p}\right|$$
   De plus,
   $$\int_b^\infty \left|\frac{\sin x}{x^{1+p}}\right| dx \leq \int_b^\infty \left|\frac{1}{x^{1+p}}\right| dx = \frac{1}{pb^p}.$$

2. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt$ est convergente mais pas absolument convergente. La fonction $\dfrac{\sin t}{t}$ est continue et bornée sur tout intervalle $]0, b[$ donc il suffit de

considérer
$$\int_b^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt, \quad b>0.$$
Par une intégration par partie
$$\int_b^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \left.\frac{-\cos t}{t}\right|_b^\infty - \int_b^\infty \frac{\cos t}{t^2}\,dt$$
d'où la convergence selon l'exemple (1). Pour démontrer que l'intégrale ne converge pas absolument on minore $|\sin x|$ comme suit : pour $x \in [0,\pi]$:
$$\sin x \geq g(x) := \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x < \pi/4\,; \\ \sin \pi/4, & \text{si } \pi/4 \leq x < 3\pi/4\,; \\ 0, & \text{si } 3\pi/4 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$



La fonction $|\sin x|$ est périodique de période π et on applique la même borne sur chaque période. Il en suit pour tout entier positif n
$$\begin{aligned}\int_0^n \frac{\sin t}{t}\,dt &\geq \sin\frac{\pi}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{\pi}{4}+k}^{\frac{3\pi}{4}+k}\frac{1}{t}\,dt \\ &\geq \sin\frac{\pi}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{\pi}{4}+k}^{\frac{3\pi}{4}+k}\frac{1}{\frac{3\pi}{4}+k}\,dt \\ &= \sin\frac{\pi}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\pi}{2}\frac{1}{\frac{3\pi}{4}+k}.\end{aligned}$$
Cette expression diverge lorsque $n \to \infty$.

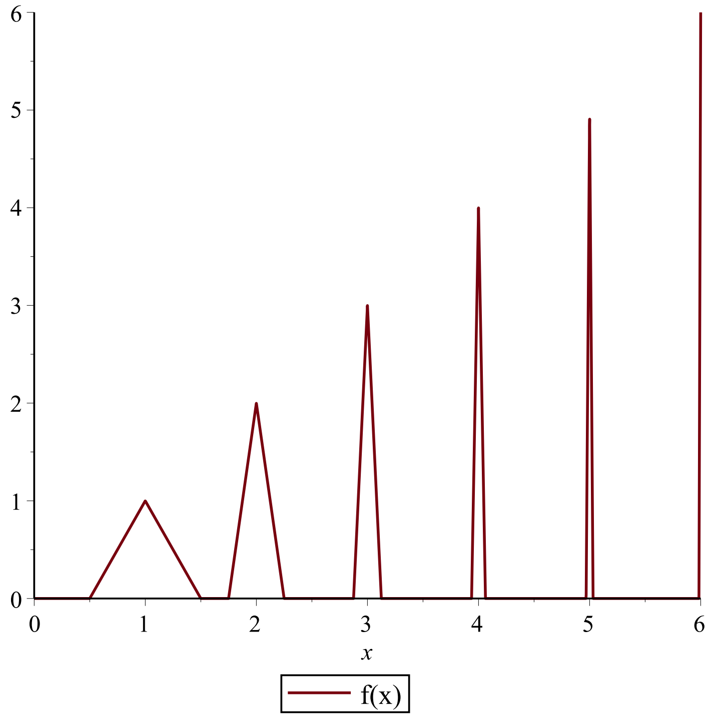
3. On considère les fonctions $f_n[0,\infty[\to\mathbb{R}$, n un entier positif, définies par

$$f_n(x) = n(1-2^n|x-n|)\chi_{[n-2^{-n},n+2^{-n}]}(x).$$

On définit

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

La fonction f est non-négative, continue, non-bornée et intégrable sur $[0,\infty[$.



L'aire des triangles est $n2^{-n}$.

Remarque : Alternativement, on peut écrire les f_n comme suit :

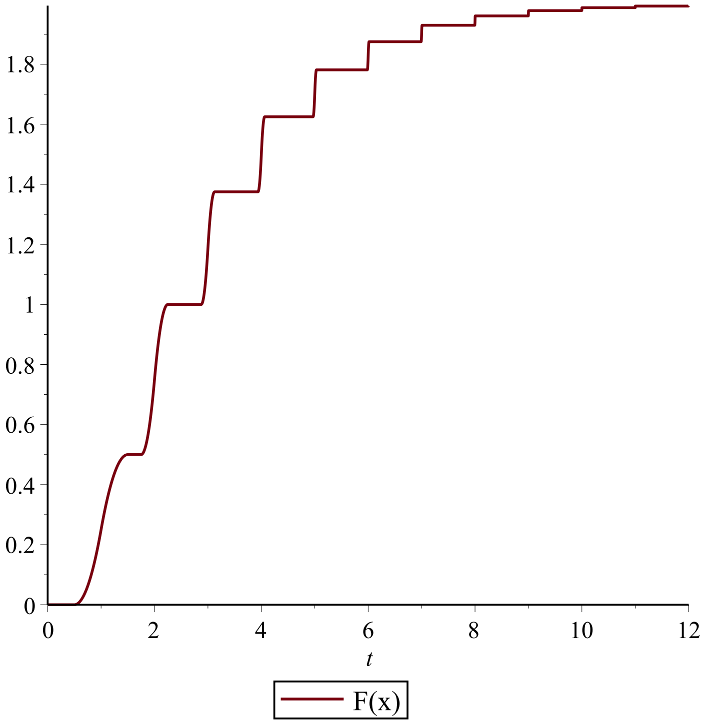
$$f_n(x) = n2^{n-1}(|x-n-2^{-n}|+|x-n+2^{-n}|-2|x-n|).$$

La primitive $F(x)$ tel que $F(0)=0$ existe et F est une fonction nonnégative, croissante, bornée et dérivable. En particulier,

$$F(x) \le \sum_{n=0}^{\infty} n2^{-n} = 2$$

et

$$\int_0^{\infty} f(t)\,dt = 2.$$



La primitive $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

Règles et techniques d'intégration pour intégrales généralisées. L'intégrale généralisée vérifie les propriétés (6.1) – (6.4). L'intégration par partie et le changement de variable s'étendent aussi aux intégrales généralisées. Pour l'intégration par partie des intégrales généralisées

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

le terme $f(x)g(x)\big|_a^b$ est donné par

$$f(x)g(x)\Big|_a^b = \lim_{x\to b-} f(x)g(x) - \lim_{x\to a+} f(x)g(x).$$

Exemples.

1. $$\int_0^\infty te^{-t}\,dt = -te^{-t}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}\,dt = -te^{-t} - e^{-t}\Big|_0^\infty = 1$$

2. Par le changement de variable $s = t^2$ (i.e. $t = \sqrt{s}$) on trouve

$$\int_0^\infty t^3 e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty se^{-s}\,ds = \frac{1}{2}$$

3. Par le changement de variable $s = e^{-t}$ (i.e. $t = -\ln s$) on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+2e^{-t}+e^{-2t}}\,dt &= \int_1^0 \frac{s}{1+2s+s^2}(-\frac{1}{s})\,ds\\ &= \int_0^1 \frac{1}{(1+s)^2}\,ds\\ &= -\frac{1}{1+s}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

4. Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x+a)\,dx = \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx \quad \text{(invariance sous translation)}$$

et

$$\int_{-\infty}^\infty af(ax)\,dx = \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx \quad \text{(invariance sous dilatation).}$$

La dernière propriété est vérifiée pour des intégrales généralisées $\int_0^\infty$ et $\int_{-\infty}^0$ si $a > 0$. Par exemple,

$$\int_0^\infty e^{-at}\,dt = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-s}\,ds = \frac{1}{a}.$$

6.6 La fonction Gamma

Définition. Pour $x > 0$ nous posons

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

Cette intégrale généralisée est bien définie car

$$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt \le \int_0^1 t^{x-1}\,dt = \frac{1}{x}$$

et en utilisant $t^{x-1} \le t^x$ pour $t \ge 1$ et $\max\limits_{t\ge 1} t^x e^{-t/2} = (2x)^x e^{-x}$

$$\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt \le (2x)^x e^{-x}\int_1^\infty e^{-t/2}\,dt \le 2(2x)^x e^{-x}$$

Théorème 6.4. - *Fonction Gamma.*

1. *Pour tout $n \in \mathbb{Z}_+$*

$$\Gamma(n+1) = n!$$

et pour tout $x > 0$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

2. *Pour tout $x > 0$ la fonction Gamma est donnée par*

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}$$

3.
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Démonstration. 1. Par une intégration par partie
$$\Gamma(x+1) := \int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt = -t^x e^{-t}\Big|_0^\infty + x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt = x\Gamma(x)$$
puisque $\lim_{t\to\infty} t^x e^{-t} = 0$ et $\lim_{t\to 0+} t^x e^{-t} = 0$. De plus, $\Gamma(1) = 1 = 0!$. Par récurrence on montre que
$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$$

2. D'abord montrons le lemme suivant :

Lemme. Pour tout $x, y > 0$ et tout $\lambda \in [0,1]$:
$$\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda}$$

Remarque. Le lemme signifie que la fonction $x \mapsto \ln(\Gamma(x))$ est convexe. On dit, que $\Gamma(x)$ est logarithmiquement convexe.

Démonstration du lemme. Si $x = y$ le résultat est évident. Soit alors $x \neq y$. Par l'inégalité de Young (voir 5.3.5) on a pour tout $s > 0$
$$s^{\lambda x + (1-\lambda)y} = s^{\lambda x} s^{(1-\lambda)y} \leq \lambda s^x + (1-\lambda)s^y.$$
En posant $s = at$ où $a > 0$ est un paramètre (à déterminer un peu plus loin) cette inégalité s'écrit comme suit :
$$t^{\lambda x+(1-\lambda)y} \leq \lambda a^{(1-\lambda)(x-y)} t^x + (1-\lambda)a^{-\lambda(x-y)} t^y$$
Par conséquent,
$$\begin{aligned}\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \int_0^\infty t^{\lambda x + (1-\lambda)y - 1} e^{-t}\,dt \\ &\leq \int_0^\infty \left(\lambda a^{(1-\lambda)(x-y)} t^x + (1-\lambda)a^{-\lambda(x-y)} t^y\right) t^{-1} e^{-t}\,dt \\ &= \lambda a^{(1-\lambda)(x-y)}\Gamma(x) + (1-\lambda)a^{-\lambda(x-y)}\Gamma(y)\end{aligned}$$
On minimise par rapport à a : Il existe un $a > 0$ tel que $a^{(x-y)} = \frac{\Gamma(y)}{\Gamma(x)}$. Ce choix donne le résultat désiré. □

On démontre maintenant 2. Grâce à l'équation fonctionnelle $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ il suffit de montrer le résultat pour $0 < x \leq 1$. En fait, supposons que la relation est vraie pour un $x > 0$. Alors, pour $y = x+1$ on a
$$\begin{aligned}\Gamma(y) = x\Gamma(x) &= x \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{y-1}}{y(y+1)\cdot\ldots\cdot(y+n-1)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{y-1}}{y(y+1)\cdot\ldots\cdot(y+n-1)} \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{n}{y+n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^y}{y(y+1)\cdot\ldots\cdot(y+n-1)(y+n)}\end{aligned}$$

Evidemment la relation est vérifiée pour $x = 1$. Pour $0 < x < 1$, nous posons

$$a_n(x) := \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\Gamma(x+n) = \Gamma(x)x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n-1)$$

Nous utilisons la convexité logarithmique de la fonction Gamma pour estimer $\Gamma(x+n)$. Avec $x+n = (1-x)n + x(n-1)$ nous obtenons l'inégalité

$$\Gamma(x+n) \leq \Gamma(n)^{(1-x)}\Gamma(n+1)^x = (n-1)!\, n^x = \frac{n!}{n^{1-x}}.$$

Deuxièmement, on peut écrire $n+1 = x(n+x) + (1-x)(n+1+x)$. Donc

$$n! = \Gamma(n+1) \leq \Gamma(n+1+x)^{(1-x)}\Gamma(n+x)^x = \Gamma(n+x)(n+x)^{1-x}.$$

On en déduit les bornes

$$\frac{n!}{(n+x)^{1-x}} \leq \Gamma(n+x) \leq \frac{n!}{n^{1-x}} \tag{6.7}$$

et par conséquent

$$\frac{n!}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n-1)(n+x)^{1-x}} \leq \Gamma(x) \leq \frac{n!}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n-1)\cdot n^{1-x}}$$

ou

$$a_n(x)\frac{(n+x)^x}{n^x} \leq \Gamma(x) \leq a_n(x)\frac{n+x}{n}.$$

La suite $a_n(x)$ vérifie les inégalités

$$\Gamma(x)\frac{n}{n+x} \leq a_n(x) \leq \Gamma(x)\frac{n^x}{(n+x)^x}.$$

Par le théorème des deux gendarmes on en déduit que $a_n(x)$ converge vers $\Gamma(x)$.

3. On représente $\Gamma(\frac{1}{2})$ comme suit :

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\sqrt{n}}{\frac{1}{2}\cdot(1+\frac{1}{2})\cdot\ldots\cdot(n-1+\frac{1}{2})\cdot(n+\frac{1}{2})}$$

et

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\sqrt{n}}{(1-\frac{1}{2})\cdot(2-\frac{1}{2})\cdot\ldots\cdot(n-\frac{1}{2})\cdot(n+1-\frac{1}{2})}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\Gamma(\frac{1}{2})^2 &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(1-\frac{1}{4})\cdot(4-\frac{1}{4})\cdot\ldots\cdot(n^2-\frac{1}{4})} \cdot \frac{n}{\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2-\frac{1}{4}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})} \\
&= 2\prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} \\
&= \pi
\end{aligned}$$

où on a utilisé le produit de Wallis.

□

Intégrale de Gauss. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

En probabilité la fonction ϕ est appelée densité normale centrée. La fonction ϕ vérifie la propriété

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \, dx = 1.$$

En fait, ϕ est une fonction paire et par le changement de variable $t = x^2/2$ on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \, dx = 2 \int_{0}^{\infty} \phi(x) \, dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{0}^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} \, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

Théorème 6.5. - ***Formule de Stirling.*** *On a*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi} \, n^{n+\frac{1}{2}} \, e^{-n}} = 1 \tag{6.8}$$

Remarque. Au lieu de la limite on écrit aussi

$$n! \sim \sqrt{2\pi} \, n^{n+\frac{1}{2}} \, e^{-n}.$$

Démonstration. L'idée est écrire

$$\ln n! = \sum_{k=1}^{n} \ln k = \int_{1}^{n} \ln x \, dx + \text{corrections}$$

Par la règle du trapèze et le fait que $(\ln x)'' = -\frac{1}{x}^2$ pour tout entier naturel $k = 1, \ldots, n-1$, il existe $c_k \in \,]k, k+1[$ tel que

$$\int_{k}^{k+1} \ln x \, dx = \frac{\ln(k) + \ln(k+1)}{2} + \frac{1}{12 c_k^2}$$

En prenant la somme sur $k = 1, \ldots, n-1$ on obtient

$$\int_{1}^{n} \ln x \, dx = \sum_{k=1}^{n} \ln k - \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{12} \sum_{k=1}^{n-1} c_k^{-2}$$

Avec

$$\int_{1}^{n} \ln x \, dx = n \ln n - n + 1$$

on a

$$\ln n! = \sum_{k=1}^{n} \ln k = (n + \frac{1}{2}) \ln n - n + b_n$$

où

$$b_n = 1 - \frac{1}{12} \sum_{k=1}^{n-1} c_k^{-2}$$

La suite (b_n) est décroissante et bornée car $c_k^{-2} \leq k^{-2}$. Donc (b_n) est convergente. On définit $a_n = e^{b_n}$. En prenant l'exponentielle on trouve

$$n! = n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n} a_n \quad \text{i.e.} \quad a_n = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}}$$

Par la continuité de la fonction exponentielle $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ existe et $a \neq 0$. On va montrer que $a = \sqrt{2\pi}$. On a

$$a = \frac{a^2}{a} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n^2}{\lim_{n\to\infty} a_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{a_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 (2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{n^{2n+1}(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 (2)^{2n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{n}(2n)!}$$

Pour calculer cette limite on utilise le résultat sur $\Gamma(\frac{1}{2})$ (ou de nouveau le produit de Wallis). On a

$$\begin{aligned}\sqrt{\pi} = \Gamma(\frac{1}{2}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,\sqrt{n}}{\frac{1}{2}\cdot(1+\frac{1}{2})\cdot\ldots\cdot(n-1+\frac{1}{2})\cdot(n+\frac{1}{2})} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,\sqrt{n}\,2^{n+1}}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}\end{aligned}$$

On note que

$$(2n)! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 2\cdot 4\ldots(2n) = 2^n\, n! 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\sqrt{\pi} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2\,\sqrt{n}\,2^{2n+1}}{(2n)!\,\cdot(2n+1)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2\sqrt{2}\,n}{a_{2n}(2n+1)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{a_{2n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}\,n}{2n+1} = a\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

donc $a = \sqrt{2\pi}$. □

Corollaire 6.6. *Pour n grand*

$$2^{-2n}\binom{2n}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

Démonstration. Noter que $2^{-2n}\binom{2n}{n} = \frac{a_{2n}\sqrt{2}}{a_n^2\sqrt{n}}$. □

Corollaire 6.7. - *Formule de Stirling pour la fonction Gamma.* *On a*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}}\, e^{-x}} = 1. \tag{6.9}$$

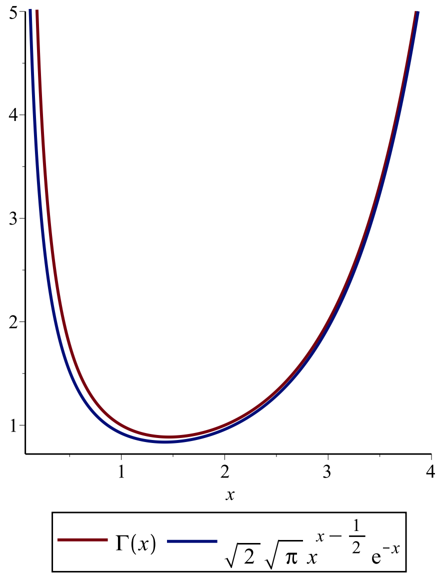
Démonstration. On pose $[x] = n$ et $y = x - n \in [0, 1[$ et on applique les inégalités eq. (6.7) (en remplacant x par y) :

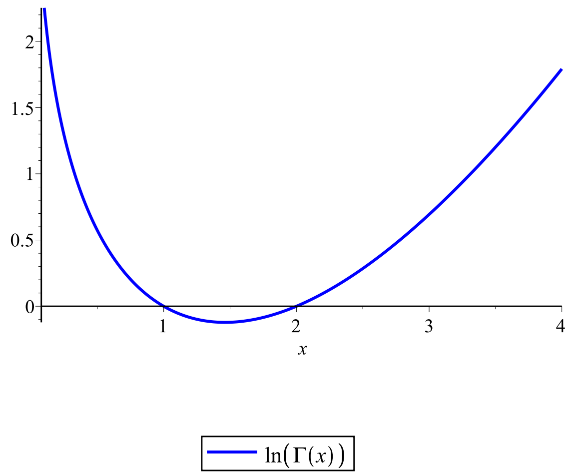
$$\frac{n!}{(n+y)^{1-y}} \leq \Gamma(x) \leq \frac{n!}{n^{1-y}}.$$

Ces inégalités sont équivalentes à

$$\frac{n!}{\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}} \frac{e^y}{(1+\frac{y}{n})^{n+\frac{1}{2}}} \leq \frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}}\, e^{-x}} \leq \frac{n!}{\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}} \frac{e^y}{(1+\frac{y}{n})^{n+y-\frac{1}{2}}}.$$

Pour tout $\epsilon > 0$ il existe N (indépendemment de $y \in [0, 1[$) tel que pour tout $n \geq N$ le membre de gauche est minoré par $1 - \epsilon$ et le membre de droite est majoré par $1 + \epsilon$. $\square$





6.7 L'intégrale et processus de limite

Soit I un intervalle et $(f_n)_n$ une suite de fonctions $f_n : I \to \mathbb{R}$ telle que $(f_n)_n$ converge ponctuellement vers $f : I \to \mathbb{R}$. En général on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\,dx \neq \int_I \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

comme le démontrent les exemples suivants.

Exemple 1. On considère les fonctions continues $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ données par

$$f_n(x) = \begin{cases} a_n \sin n\pi x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}\,; \\ 0, & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

où n est un entier positif et $(a_n)_n$ une suite des réels. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = 0$ en tout $x \in]0,1]$ et

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0_+} \int_\epsilon^1 0\,dx = 0.$$

D'autre part

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{n}} a_n \sin n\pi x\,dx = \frac{a_n}{n\pi} \int_0^\pi \sin t\,dt = \frac{a_n}{n\pi}.$$

Si $\frac{a_n}{n\pi}$ ne converge pas vers 0 on ne peut pas permuter la limite et l'intégrale.

Exemple 2. Soit $\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble de rationnels dans $[0,1]$. On considère la suite des fonctions continues $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ données par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \{r_0, r_1, \dots r_n\}\,; \\ 0, & \text{si } x \notin \{r_0, r_1, \dots r_n\}. \end{cases}$$

Alors, $\displaystyle\int_0^\pi f_n(x)\,dx = 0$ pour tout n d'où

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0.$$

En revanche, la limite simple $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)\chi_{[0,1]}(x)$ (la fonction indicatrice des rationnels dans $[0,1]$ n'est pas intégrable.

Convergence uniforme. Le dernier exemple indique que la limite simple n'est pas forcément intégrable. C'est pourquoi il faut souvent supposer que la fonction limite soit intégrable. Cet inconvenance n'existe pas si la convergence est uniforme et, de plus, on peut commuter la limite avec l'intégrale.

Théorème 6.8. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions dans $C^0([a,b])$ qui converge uniformément vers une fonction f. Alors, f est intégrable (car continue) et*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

Démonstration. C'est une conséquence des inégalités

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx \leq \int_a^b ||f(x) - f_n(x)||_0\,dx.$$

□

La démonstration indique que la convergence uniforme suffit en général si la limite uniforme est intégrable :

Théorème 6.9. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions (bornées) intégrables sur $[a,b]$ qui converge uniformément vers une fonction (bornée) intégrable f. Alors,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

Exemple 1 - bis. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, alors la convergence est uniforme (la limite est la fonction 0 sur $[0,1]$.

Dérivation et intégration des séries. Une conséquence du théorème 6.8 est le résultat suivant :

Théorème 6.10. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions dans $C^1([a,b])$ telle que la suite $(f_n')_n$ converge uniformement vers une fonction g. De plus, il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que la suite $(f_n(x_0))_n$ converge. Alors, la suite $(f_n)_n$ converge uniformement vers une fonction $f \in C^1([a,b])$ avec $f' = g$.*

Démonstration. Pour tout n il existe c_n tel que

$$f_n(x) = \int_a^x f_n'(x)\,dx + c_n$$

pour tout $x \in [a,b]$. La convergence ponctuelle de f_n en x_0 et la convergence uniforme de f_n' impliquent que la suite $(c_n)_n$ converge : $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$. Par conséquent, pour tout $x \in [a,b]$:

$$f(x) = \int_a^x g(x)\,dx + c$$

Cette convergence est même uniforme puisque pour tout $x \in [a,b]$:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \int_a^x f_n'(x) - c_n\,dx - \int_a^x f_n' g(x) - c\,dx \right| \\ &\leq \int_a^x |f_n'(x) - g(x)|\,dx + |c_n - c| \\ &\leq (b-a)||f_n' - g||_0 + |c_n - c| \end{aligned}$$

d'où

$$||f_n - f||_0 \leq (b-a)||f_n' - g||_0 + |c_n - c|.$$

□

Pour des séries uniformément convergentes ce résultat s'écrit comme suit :

Corollaire 6.11. *Soit* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *une série de fonctions dans* $C^1([a,b])$ *telle que la suite* $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n$ *converge uniformément sur* $[a,b]$ *. De plus, il existe* $x_0 \in [a,b]$ *tel que la suite* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$ *converge. Alors, la série* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *converge uniformément vers une fonction* $f \in C^1([a,b])$ *avec* $f' = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n$.

En particulier, pour les séries entières on en déduit :

Corollaire 6.12. *Soit* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$*. Alors, pour tout* x *tel que* $|x| < R$ *:*

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \tag{6.10}$$

et $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n+1}$ *est une primitive de* f*.*

6.7.1 Un théorème de convergence monotone pour l'intégrale de Riemann*

La convergence uniforme est suffisante pour la permutation de la limite et l'intégrale mais pas nécessaire. Le théorème de Dini (théorème 4.6) montre que la convergence ponctuelle monotone de fonctions continues vers une fonction continue implique la convergence uniforme. Un résultat plus général énonce que la convergence monotone des fonctions intégrables vers une fonction intégrable permet de permuter la limite et l'intégrale. C'est le théorème de convergence monotone pour l'intégrale de Riemann.

Théorème 6.13. *Soit* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions (bornées) intégrables sur* $[a,b]$ *telle que* $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ *qui converge uniformement vers une fonction (bornée) intégrable* f*. Alors,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

Démonstration. Par la monotonie de la suite $(f_n)_n$ on a $f_n \leq f$ donc

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \leq \int_a^b f_(x)\,dx, \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \leq \int_a^b f_(x)\,dx.$$

Il reste à démontrer l'inégalité inverse. Soit $\epsilon > 0$ arbitraire. Il existe un entier positif N tel que

$$\begin{aligned}\int_a^b f_n(x)\,dx &\geq \text{ une somme de Riemann supérieure pour } f_n \ - \epsilon \\ \int_a^b f(x)\,dx &\leq \text{ une somme de Riemann inférieure pour } f \ + \epsilon\end{aligned}$$

c'est-à-dire en choisissant une subdivison regulière :

$$\begin{aligned}\int_a^b f_n(x)\,dx &\geq \frac{b-a}{N}\sum_{k=1}^{N} \sup\{f_n(x) : x \in]a_{k-1}, a_k[\} \ - \epsilon \\ \int_a^b f(x)\,dx &\leq \frac{b-a}{N}\sum_{k=1}^{N} \inf\{f(x) : x \in]a_{k-1}, a_k[\} \ + \epsilon\end{aligned}$$

et $a_k = a + k\dfrac{b-a}{N}$. Les $\sup\{f_n(x) : x \in]a_{k-1}, a_k[\}$ sont minorés par une valeur dans l'intervalle, par exemple $f_n(a_k)$, les $\inf\{f(x) : x \in]a_{k-1}, a_k[\}$ sont majorés par une valeur dans l'intervalle, par exemple $f(a_k)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\int_a^b f_n(x)\,dx &\geq \frac{b-a}{N}\sum_{k=1}^{N} f_n(a_k) \ - \epsilon \\ \int_a^b f(x)\,dx &\leq \frac{b-a}{N}\sum_{k=1}^{N} f(a_k) \ + \epsilon\end{aligned}$$

La convergence simple des f_n vers f implique que pour n suffisamment grand

$$\max_{k=1\ldots N} |f_n(a_k) - f(a_k)| < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

En particulier, $f_n(a_k) > f(a_k) - \dfrac{\epsilon}{b-a}$ pour tout $k = 1\ldots N$ d'où par combinaison des deux inégalités

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx - 3\epsilon$$

Comme $\epsilon > 0$ est arbitraire il en suit que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx.$$

$\square$

Annexe A

Dérivées et primitives de fonctions usuelles

$f(x)$	Dérivée de f	Une primitive de f	Conditions
a	0	ax	
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$\alpha \neq -1$, $x > 0$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\ln\|x\|$	$x \neq 0$
$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{-2x}{(a^2+x^2)^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$	$a \neq 0$
$\frac{1}{a^2-x^2}$	$\frac{2x}{(a^2-x^2)^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\|$	$a \neq 0$, $x \neq \pm a$
$\frac{1}{x^2-a^2}$	$\frac{-2x}{(x^2-a^2)^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\|$	$a \neq 0$, $x \neq \pm a$
$\sqrt{x^2+a^2}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$	$a \neq 0$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\|x+\sqrt{x^2-a^2}\|$	$a \neq 0$, $\|x\| > \|a\|$
$\sqrt{a^2-x^2}$	$\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$	$a > 0$, $\|x\| < \|a\|$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\frac{-x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$	$\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$	$a \neq 0$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\frac{-x}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}$	$\ln\|x+\sqrt{x^2-a^2}\|$	$a \neq 0$, $\|x\| > \|a\|$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$	$\arcsin\frac{x}{a}$	$a > 0$, $\|x\| < \|a\|$
e^x	e^x	e^x	
a^x	$a^x \ln a$	$\frac{a^x}{\ln a}$	$a > 0$, $a \neq 1$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x\ln x - x$	$x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$	
$\tan x$	$1+\tan^2 x$	$-\ln\|\cos x\|$	$x \neq \pi/2 + k\pi$
$\mathrm{cotan} x$	$-(1+\mathrm{cotan}^2 x)$	$\ln\|\sin x\|$	$x \neq k\pi$
$\frac{1}{\sin x}$	$\frac{-\cos x}{\sin^2 x}$	$\ln\left\|\tan\frac{x}{2}\right\|$	$x \neq k\pi$
$\frac{1}{\cos x}$	$\frac{\sin x}{\cos^2 x}$	$\ln\left\|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\|$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$f(x)$	Dérivée de f	Une primitive de f	Conditions
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$	$\lvert x\rvert < 1$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$	$\lvert x\rvert < 1$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2}$	
$\text{arccotan} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$	$x \text{arccotan}\, x + \ln \sqrt{1+x^2}$	
$\sinh x$	$\cosh x$	$\cosh x$	
$\cosh x$	$\sinh x$	$\sinh x$	
$\tanh x$	$1 - \tanh^2 x$	$\ln \cosh x$	
$\text{cotanh} x$	$1 - \text{cotanh}^2 x$	$\ln \lvert \sinh x\rvert$	$x \neq 0$
$\text{arcsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$x \text{arcsinh} x - \sqrt{x^2+1}$	
$\text{arccosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \text{arccosh} x - \sqrt{x^2-1}$	$x > 1$
$\text{arctanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$x \text{arctanh} x + \ln \sqrt{1-x^2}$	$\lvert x\rvert < 1$
$\text{arccotanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$x \text{arccotanh} x + \ln \sqrt{x^2-1}$	$\lvert x\rvert > 1$

Annexe B

Intégrales généralisées

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \pi$$

$$\int_{0}^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt = \Gamma(x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(at^2+2bt+c)}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\frac{b^2-ac}{a}}, \qquad a > 0$$