EPFL - IMB
Prof. J.H. Maddocks

Section: **PHYSIQUE**

ANALYSE III

EXAMEN

15 janvier 2010

Nom: **Prénom:**

INFORMATIONS:

- Durée de l'examen: de **12h15 à 14h15**.
- Aucun document n'est autorisé.
- Aucune machine n'est autorisée.
- Les réponses aux questions seront données sur le cahier agrafé.
- Les réponses qui ne seront pas rédigées de manière satisfaisante ne seront pas corrigées.

Question	**Points**
1	
2	
3	
TOTAL	

Question 1. (20 Points)

(a) Soit Ω un domaine régulier dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'aire de Ω est donnée par

$$|\Omega| = \frac{1}{2} \int_{\overrightarrow{\partial\Omega}} x\,dy - y\,dx.$$

(b) Une ellipse dans $\mathbb{R}^2$ est paramétrisée par

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & a\cos\theta \\ y & = & b\sin\theta \end{array}\right\} \qquad a, b \in \mathbb{R},\ \theta \in [0, 2\pi).$$

Attention, ici θ n'est pas un angle en coordonnées polaires! Soient c et d deux réels positifs, non nuls, tels que $c > d$. On se donne l'ellipse e_1 avec les paramètres

$$a_1 = c, \quad b_1 = d$$

et l'ellipse e_2 (une réflexion de e_1) avec

$$a_2 = d, \quad b_2 = c.$$

Calculer l'aire de la surface à l'extérieur de l'ellipse e_1 et à l'intérieur de l'ellipse e_2 avec $y > 0$.

Question 2. (40 points)

(a) Enoncer les théorèmes de Stokes et de la divergence.

(b) Soit V un domaine régulier avec bord ∂V dans $\mathbb{R}^3$ pour lequel il est possible d'appliquer les théorèmes de la divergence et Stokes. Montrer que

  (i) $\int_{\partial V} yN_1\, d\sigma = \int_{\partial V} zN_1\, d\sigma = 0$,

  (ii) le volume de V est $|V| = \int_{\partial V} xN_1\, d\sigma$.

(c) Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface définie par

$$z = 4 - (x^2 + y^2), \quad z \geq 0$$

et le champ vectoriel $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donné par

$$f(x, y, z) = \big(x^2 + y - 4, 3xy, 2xz + z^2\big).$$

Vérifier le théorème de Stokes pour la fonction f et la surface S.

Question 3. (40 points)

On se donne le problème suivant

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 \text{ pour } \ 0 < x < 1 \quad \text{et} \ \ 0 < y < 1, \\ u(x,0) = 0, \quad \partial_y u(x,1) = 0 \\ u(0,y) = 1, \quad \partial_x u(1,y) = 0. \end{cases}$$

(a) Trouver une solution $u(x,y)$ – en tant que série infinie – du problème donné.

(b) Soit $u_N(x,y)$ les sommes partielles – les premiers N termes – de la série infinie obtenue dans (a). Lorsque $N \to \infty$, vers quelle valeur convergent

(i) $(x,y) = (0,0)$,

(ii) $(x,y) = (0,0.1)$,

(iii) $(x,y) = (0,0.9)$,

(iv) $(x,y) = (0,1)$.

Aucun calcul n'est nécessaire.