1 Intégrales curvilignes

But : Soit C une courbe dans $\mathbb{R}^N$. On veut définir et calculer l'intégrale d'une fonction f sur C. Il y a deux cas importants,

(i) une fonction $f : C \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

(ii) un champ vectoriel $f : C \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$.

Motivation: (i) Un fil métallique a la forme de C. Sa densité de masse par unité de longueur est donnée par la fonction $f : C \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Calculer la masse totale du fil.

(iii) Le champ vectoriel $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est tel que $f(x)$ est la force agissant sur une particule qui se trouve au point x. Calculer le travail fait en déplacant la particule de A à B sur la courbe C

1.1 Courbes dans $\mathbb{R}^N$

La notion intuitive de courbe doit être précisée et on doit avoir une terminologie qui permet de distinguer toute sorte de cas différents. On commence par introduire une notion de base appelée "arc régulier", ensuite d'autres cas seront abordés.

Définition 1.1 *Un sous-ensemble C de $\mathbb{R}^N$ est appelé **arc régulier** lorsqu'il existe une fonction $\alpha : J \to C$ ayant les propriétés suivantes.*

(i) J est un intervalle ouvert

(ii) $\alpha : J \to C$ est un homéomorphisme

(iii) $\alpha \in C^1(J, \mathbb{R}^N)$ et $\alpha'(t) \neq 0$ pour tout $t \in J$.

*Une telle fonction α est appelée **représentation paramétrique régulière** de C.*

Interprétation On peut considérer que $\alpha(t)$ est la position d'une particule à l'instant $t \in J$. Alors C est le chemin parcouru (ou la trajectoire) de la particule. Comme α est injective, la particule ne passe jamais deux fois par le même point pendant l'intervalle J. Sa vitesse α' est continue et ne s'annule jamais. Pour $t, s \in J$ avec $t \neq s$, la droite unique passant par $\alpha(t)$ et $\alpha(s)$ est

$$\alpha(t)+ev\{\alpha(s)-\alpha(t)\} = \{\alpha(t)+\lambda[\alpha(s)-\alpha(t)] : \lambda \in \mathbb{R}\} = \alpha(s)+ev\{\alpha(t)-\alpha(s)\}.$$

La **direction** de cette droite est déterminée par les vecteurs unitaires $\pm\{\alpha(s)-\alpha(t)\}/\left\|\alpha(s)-\alpha(t)\right\|$. Notant que

$$\lim_{s\to t\pm}\frac{\alpha(s)-\alpha(t)}{\|\alpha(s)-\alpha(t)\|}=\pm\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

car $\alpha'(t)\neq 0$, la droite passant par le point $\alpha(t)$ dans la direction de $\pm\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$ est

$$\alpha(t)+ev\{\alpha'(t)\}=\{\alpha(t)+\lambda\alpha'(t):\lambda\in\mathbb{R}\}$$

et elle est appelée **droite tangente à C au point** $\alpha(t)$.

Définition 1.2 *Soient C un arc régulier dans $\mathbb{R}^N$ et $f:C\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur C.* ***L'intégrale curviligne de*** *f sur C est*

$$\int_C f\ ds=\int_J f(\alpha(t))\left\|\alpha'(t)\right\|\ dt$$

où $\alpha:J\to C$ est une représentation paramétrique régulière de C.

Remarques (1) Posant $g(t)=f(\alpha(t))\left\|\alpha'(t)\right\|$, on voit que la fonction $g:J\to\mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle ouvert J. Ainsi, g est intégrable sur tout intervalle compact $[a,b]\subset J$. Or, J n'est pas forcément borné et la fonction g n'est pas forcément bornée sur J. Donc,

$$\int_J g(t)dt)=\int_J f(\alpha(t))\left\|\alpha'(t)\right\|\ dt$$

peut être une intégrale généralisée. L'intégrale curviligne $\int_C f\ \ ds$ existe lorsque cette intégrale généralisée converge.

(2) Cette définition ne dépend pas du choix de représentation paramétrique de C.

(3) Posant $f\equiv 1$ sur C, on retrouve la longueur de C,

$$|C|=\int_J\left\|\alpha'(t)\right\|\ dt.$$

Justification de la définition: Fixons $a,b\in J$ avec $a<b$. Commencons par calculer la longueur de la partie D de l'arc C qui se trouve entre les

points $p=\alpha(a)$ et $q=\alpha(b)$. Soit $P=\{t_i : i=0,1,...,n\}$ une partition de l'intervalle $[a,b]$ avec

$$d(P)=\max\{t_{i+1}-t_i : i=0,...,n-1\}.$$

Posons $D_i=\alpha\left([t_i,t_{i+1}]\right)$ pour $i=0,1,...n-1$. Alors,

$$D=\cup_{i=0}^{n-1}D_i \text{ et } |D|=\sum_{i=0}^{n-1}|D_i|\,.$$

Remplacons D_i par le segement de droite $A_i=[\alpha(t_i),\alpha(t_{i+1})]$ entre ses extrémités $\alpha(t_i)$ et $\alpha(t_{i+1})$ et posons $A_P=\cup_{i=0}^{n-1}A_i$. La longueur de A_P est $\sum_{i=0}^{n-1}|A_i|$ et $|A_i|=\|\alpha(t_{i+1})-\alpha(t_i)\|$. Or,

$$\begin{aligned}\alpha(t_{i+1})-\alpha(t_i) &= \int_{t_i}^{t_{i+1}}\alpha'(t)dt=\int_{t_i}^{t_{i+1}}\alpha'(t_i)dt+\int_{t_i}^{t_{i+1}}\{\alpha'(t)-\alpha'(t_i)\}dt\\ &= \alpha'(t_i)(t_{i+1}-t_i)+\int_{t_i}^{t_{i+1}}\{\alpha'(t)-\alpha'(t_i)\}dt\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\left\|\int_{t_i}^{t_{i+1}}\{\alpha'(t)-\alpha'(t_i)\}dt\right\| &= \|\alpha(t_{i+1})-\alpha(t_i)-\alpha'(t_i)(t_{i+1}-t_i)\|\\ &\geq |\|\alpha(t_{i+1})-\alpha(t_i)\|-\|\alpha'(t_i)(t_{i+1}-t_i)\||\\ &= \left||A_i|-\|\alpha'(t_i)\|\,(t_{i+1}-t_i)\right|.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\left||A_P|-\sum_{i=0}^{n-1}\|\alpha'(t_i)\|\,(t_{i+1}-t_i)\right| &\leq \sum_{i=0}^{n-1}\left||A_i|-\|\alpha'(t_i)\|\,(t_{i+1}-t_i)\right|\\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1}\left\|\int_{t_i}^{t_{i+1}}\{\alpha'(t)-\alpha'(t_i)\}dt\right\|\\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\|\alpha'(t)-\alpha'(t_i)\|\,dt.\end{aligned}$$

La continuité de α' sur $[a,b]$ est uniforme et donc, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ tel que

$$\|\alpha'(t)-\alpha'(s)\|<\varepsilon \text{ lorsque } t,s\in[a,b] \text{ et } |t-s|<\delta.$$

Si $d(P) < \delta$, ceci implique que

$$\begin{aligned}\left| |A_P| - \sum_{i=0}^{n-1} \|\alpha'(t_i)\| (t_{i+1} - t_i) \right| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\alpha'(t) - \alpha'(t_i)\| \, dt \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varepsilon dt \\ &= \varepsilon(b-a),\end{aligned}$$

montrant que

$$|A_P| - \sum_{i=0}^{n-1} \|\alpha'(t_i)\| (t_{i+1} - t_i) \to 0 \text{ lorsque } d(P) \to 0.$$

Mais l'expression $\sum_{i=0}^{n-1} \|\alpha'(t_i)\| (t_{i+1} - t_i)$ est une somme de Riemann pour $\int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt$ et donc

$$\sum_{i=0}^{n-1} \|\alpha'(t_i)\| (t_{i+1} - t_i) \to \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt \text{ lorsque } d(P) \to 0.$$

Ainsi,

$$|A_P| \to \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt \text{ lorsque } d(P) \to 0$$

ce qui nous permet de considérer que $\int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt$ est la longueur de la partie D de C. En laissant $a \to \inf J$ et $b \to \sup J$, on obtient la longueur de C.

Considérons maintenant l'intégrale de f sur D. Ceci devrait être la limite lorsque $d(P) \to 0$ de

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(p_i) |D_i| \text{ où } p_i \in D_i.$$

Or,

$$\begin{aligned}f(p_i) |D_i| &= f(\alpha(\tau_i)) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\alpha'(t)\| \, dt \text{ où } \tau_i \in [t_i, t_{i+1}] \\ &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| \, dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \{f(\alpha(\tau_i)) - f(\alpha(t))\} \|\alpha'(t)\| \, dt\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \{f(\alpha(\tau_i)) - f(\alpha(t))\} \|\alpha'(t)\| \, dt \right| &\leq \max_{p,q \in D_i} |f(p) - f(q)| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\alpha'(t)\| \, dt \\ &= \max_{p,q \in D_i} |f(p) - f(q)| \, |D_i| \,.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=0}^{n-1} f(p_i)\,|D_i| - \int_a^b f(\alpha(t))\,\|\alpha'(t)\|\,dt\right| \\
= &\left|\sum_{i=0}^{n-1} f(p_i)\,|D_i| - \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\alpha(t))\,\|\alpha'(t)\|\,dt\right| \\
= &\left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \{f(\alpha(\tau_i)) - f(\alpha(t))\}\,\|\alpha'(t)\|\,dt\right| \\
\leq &\sum_{i=0}^{n-1} \max_{p,q\in D_i} |f(p)-f(q)|\,|D_i| \\
\leq &\max_{0\leq i\leq n-1}\max_{p,q\in D_i} |f(p)-f(q)| \sum_{i=0}^{n-1} |D_i| \\
= &\max_{0\leq i\leq n-1}\max_{p,q\in D_i} |f(p)-f(q)|\,|D|\,.
\end{aligned}$$

Par la continuité uniforme de f sur D,

$$\max_{0\leq i\leq n-1}\max_{p,q\in D_i} |f(p)-f(q)| \to 0 \text{ lorsque } d(P)\to 0,$$

et donc

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(p_i)\,|D_i| \to \int_a^b f(\alpha(t))\,\|\alpha'(t)\|\,dt$$

justifiant l'interprétation de $\int_a^b f(\alpha(t))\,\|\alpha'(t)\|\,dt$ en tant que l'intégrale de f sur la partie D de J. Si

$$\lim_{a\to\inf J}\int_a^b f(\alpha(t))\,\|\alpha'(t)\|\,dt \text{ et } \lim_{b\to\sup J}\int_a^b f(\alpha(t))\,\|\alpha'(t)\|\,dt$$

existent et sont finies alors f est intégrable sur tout l'arc C.

1.2 Changement de représentation paramétrique

Soient $\alpha : J \to C$ et $\beta : K \to C$ deux représentations paramétriques régulières d'un arc régulier. Alors la fonction composée $\alpha^{-1}\circ\beta : K \to J$ est un homéomorphisme. C'est donc une fonction monotone qui correspond au changement de paramètre utilisé pour décrire l'arc C. Plus précisément, on a le résultat suivant.

Théorème 1.3 *Soient C un arc régulier dans $\mathbb{R}^N$ et $\alpha : J \to C$ une représentation paramétrique régulière de C. Alors (i) une fonction $\beta : K \to C$ est une représentation paramétrique régulière de C $\Leftrightarrow$ (ii) K est un intervalle ouvert et il existe un homéomorphisme $\varphi : K \to J$ tel que $\varphi \in C^1(K)$ avec $\varphi'(s) \neq 0$ pour tout $s \in K$ et $\beta(s) = \alpha(\varphi(s))$ pour tout $s \in K$.*

Remarque Dans ce cas, $\beta'(s) = \alpha'(\varphi(s))\varphi'(s)$ pour tout $s \in K$ et, de plus, φ' a le même signe sur tout l'intervalle K.
Preuve $\Longrightarrow$ Posant $\varphi = \alpha^{-1} \circ \beta$, on a que $\varphi : K \to J$ est un homéomorphisme. Le point essentiel est de montrer que φ est dérivable. Fixons $s_0 \in K$ et posons $t_0 = \varphi(s_0)$. On va monter que φ est dérivable sur un intervalle ouvert qui contient s_0. Puisque $\alpha'(t_0) \neq 0$, il existe un entier $i \in \{1, 2, ..., N\}$ tel que $\alpha_i'(t_0) \neq 0$. Considérons la fonction $F : K \times J \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(s,t) = \beta_i(s) - \alpha_i(t).$$

Elle a les propriétés suivantes:

$$F \in C^1(K \times J), \qquad F(s_0, t_0) = 0, \qquad \partial_t F(s_0, t_0) \neq 0.$$

Par le théorème des fonctions implicites, il existe

$$\delta > 0 \text{ et } \psi \in C^1((s_0 - \delta, s_0 + \delta))$$

tels que

$$\psi(s_0) = t_0 \text{ et } F(s, \psi(s)) = 0 \text{ pour tout } s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta).$$

De plus, près de (s_0, t_0), toute les solutions de l'équation $F(s,t) = 0$ sont de cette forme. Donc, pour s près de s_0, $\varphi(s) = \psi(s)$, montrant que φ est de classe C^1 sur un intervalle ouvert qui contient s_0. D'où $\varphi \in C^1(K)$.
Par la formule pour la dérivée d'une fonction composée,

$$\beta'(s) = \alpha'(\varphi(s))\varphi'(s) \text{ pour tout } s \in K.$$

Or, $\beta'(s) \neq 0$ et donc $\varphi'(s) \neq 0$ pour tout $s \in K$.

$\Longleftarrow$ Il suffit de vérifier directement que la fonction β définie par $\beta(s) = \alpha(\varphi(s))$ a toutes les propriétés d'une représentation paramétrique de C.

Corollaire 1.4 *Soient $\alpha : J \to C$ et $\beta : K \to C$ deux représentations paramétriques régulières d'un arc régulier C. Alors, pour toute fonction continue $f : C \to \mathbb{R}$,*

$$\int_J f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| \ dt = \int_K f(\beta(s)) \|\beta'(s)\| \ ds,$$

dans le sens que l'existence de l'une de ces intégrales implique l'existence de l'autre et qu'elles ont la même valeur.

Preuve On utilise le changement de variable $t = \varphi(s)$ où $\varphi = \alpha^{-1} \circ \beta$. Alors si $[a, b] \subset K$,

$$\int_a^b f(\beta(s)) \|\beta'(s)\| \ ds = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\varphi'(s)\| \ \frac{1}{\varphi'(s)} dt$$

car $\beta(s) = \alpha(t)$ et $\beta'(s) = \alpha'(\varphi(s))\varphi'(s) = \alpha'(t)\varphi'(s)$. Or,

$$\|\alpha'(t)\varphi'(s)\| \frac{1}{\varphi'(s)} = \|\alpha'(t)\| \frac{|\varphi'(s)|}{\varphi'(s)} = \begin{cases} \|\alpha'(t)\| & \text{si } \varphi'(s) > 0 \\ -\|\alpha'(t)\| & \text{si } \varphi'(s) < 0 \end{cases}$$

et φ' a le même signe sur tout l'intervalle K. Notant que

$\varphi([a, b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$ si $\varphi' > 0$ sur K et $\varphi([a, b]) = [\varphi(b), \varphi(a)]$ si $\varphi' < 0$ sur K,

on voit que

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\varphi'(s)\| \ \frac{1}{\varphi'(s)} dt = \int_{\varphi([a,b])} f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| \ dt$$

dans les deux cas. Ensuite on laisse $a \to \inf K$ et $b \to \sup K$.

Remarque On peut toujours décrire un arc régulier utilisant un paramètre qui mesure la distance le long de cet arc. En effet, si $\alpha : J \to C$ est une représentation paramétrique quelconque d'un arc régulier C, on introduit une nouvelle paramétrisation de cet arc de la façon suivante. On choisit $a \in J$ et puis on définit une fonction ψ sur J en posant

$$\psi(t) = \int_a^t \|\alpha'(\tau)\| \, d\tau.$$

Alors, $\psi \in C^1(J)$ et $\psi'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$ pour tout $t \in J$. Posons $K = Im\psi$ et $\varphi = \psi^{-1}$. On peut vérifier que la fonction $\beta : K \to \mathbb{R}^N$ définie par

$\beta(s) = \alpha(\varphi(s))$, est une représentation paramétrique régulière de C. Posant $t = \varphi(s)$, on a $\alpha(t) = \beta(\psi(t)) = \beta(s)$ et donc

$$\|\alpha'(t)\| = \|\beta'(\psi(t))\psi'(t)\| = \|\beta'(s)\| \, \|\alpha'(t)\| \text{ car } \psi'(t) = \|\alpha'(t)\|,$$

montrant que

$$\|\beta'(s)\| = 1 \text{ pour tout } s \in K.$$

Ce paramètre s est appelé **abscisse curviligne** sur C car $|s| = |\psi(t)|$ est la longueur de la partie de C entre les points $\alpha(a)$ et $\alpha(t)$. Notons que si l'on utilise une telle représentation paramétrique, la formule pour l'intégrale d'une fonction $f : C \to \mathbb{R}$ devient

$$\int_C f \; ds = \int_K f(\beta(s)) \; ds.$$

et la notation ds rappelle cette situation.

1.3 Arcs orientés

Il est clair intuitivement que l'on peut parcourir une courbe dans deux directions. Pour des arcs réguliers on peut préciser cette idée en introduisant la notion d'orientation.

Définition 1.5 *Soit C un arc régulier dans $\mathbb{R}^N$.* ***Un champ continu de tangentes unitaires sur*** *C est une fonction $T : C \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ telle que*
(i) $T : C \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est continue
(ii)$\|T(P)\| = 1$ pour tout $P \in C$
(iii) $P + ev\{T(P)\}$ est la tangente à C en P, pour tout $P \in C$.

Tout arc régulier admet un champ continu de tangentes unitaires. Si $\alpha : J \to C$ est une représentation paramétrique régulière de C, alors $\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$ est une tangente unitaire au point $\alpha(t) \in C$. La fonction $T_\alpha : C \to \mathbb{R}^N$ définie par

$$T_\alpha(P) = \frac{\alpha'(\alpha^{-1}(P))}{\|\alpha'(\alpha^{-1}(P))\|} \qquad \text{pour } P \in C \iff T_\alpha(\alpha(t)) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \qquad \text{pour } t \in J$$

est le champ continu de tangentes unitaires sur C engendré par α.

Soient $\alpha : J \to C$ et $\beta : K \to C$ deux représentations paramétriques régulières d'un arc régulier C. Les champs continus de tangentes unitaires engendrés par ces représentations sont

$$T_\alpha(\alpha(t)) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \text{ et } T_\beta(\beta(s)) = \frac{\beta'(s)}{\|\beta'(s)\|}$$

et $\alpha(t) = \beta(s)$ où $t = \varphi(s)$ avec $\varphi = \alpha^{-1} \circ \beta$. Alors,

$$T_\beta(\beta(s)) = \frac{\alpha'(t)\varphi'(s)}{\|\alpha'(t)\varphi'(s)\|} = T_\alpha(\alpha(t))\frac{\varphi'(s)}{|\varphi'(s)|}.$$

Ainsi,

$$T_\beta = \begin{cases} T_\alpha & \text{si } \varphi' > 0 \text{ sur } K \\ -T_\alpha & \text{si } \varphi' < 0 \text{ sur } K \end{cases}.$$

Donc il y a exactement deux champs continus de tangentes unitaires sur un arc régulier C.

Définition 1.6 *Un arc régulier C avec un choix de champ continu de tangentes unitaires T sur C est appelé* ***arc régulier orienté****, noté (C, T) ou bien $\overrightarrow{C}$. Une représentation paramétrique de (C, T) est une représentation paramétrique régulière $\alpha : J \to C$ de C telle que $T_\alpha = T$.*

Remarque Etant donné un arc régulier C, il admet deux orientations, (C, T) et $(C, -T)$.

Définition 1.7 *Soient (C, T) un arc régulier orienté dans $\mathbb{R}^N$ et $f : C \to \mathbb{R}^N$ un champ vectoriel continu sur C.* ***L'intégrale curviligne de*** *f le long de C est*

$$\int_{(C,T)} f \cdot ds = \int_C \langle f, T\rangle \; ds.$$

Remarques (1) Si $\alpha : J \to C$ est une représentation paramétrique de (C, T),

$$T(\alpha(t)) = T_\alpha(\alpha(t)) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

et donc

$$\int_{(C,T)} f \cdot ds = \int_C \langle f, T\rangle \; ds = \int_J \langle f(\alpha(t)), T(\alpha(t))\rangle \, \|\alpha'(t)\| \; dt = \int_J \langle f(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle \; dt.$$

Ainsi, en écrivant

$$\int_{(C,T)} f \cdot ds = \int_{(C,T)} f_1 dx_1 + ... + f_N dx_N$$

il est entendu que l'on remplace dx_i par $\alpha_i'(t)dt$ lors des calculs.

(2) Une fois qu'une orientation de l'arc C a été précisée, l'intégrale curviligne le long de C est aussi notée

$$\int_{\overrightarrow{C}} f \cdot ds.$$

(3) Si $\widehat{T} = -T$ sur C,

$$\int_{(C,\widehat{T})} f \cdot ds = -\int_{(C,T)} f \cdot ds$$

pour tout champ vectoriel continu sur C.

1.4 Chemins orientés et chemins fermés

On traite des courbes qui ne sont pas des arc réguliers.
Soient $P, Q \in \mathbb{R}^N$ avec $P \neq Q$. Un sous-ensemble $D \subset \mathbb{R}^N$ est appelé **chemin régulier entre** P et Q s'il existe un intervalle compact $[a, b]$ et une fonction $\alpha \in C^1([a, b], \mathbb{R}^N)$ tels que $D = Im\alpha$ et

(i) $\alpha \mid_{(a,b)}$ est une représentation paramétrique régulière d'un arc $C = D\backslash\{P, Q\}$

(ii) $\alpha(a) = P$ et $\alpha(b) = Q$

(iii) $\alpha'(a) \neq 0$ et $\alpha'(b) \neq 0$.

On dit alors que α est une représentation paramétrique de D. Il y a deux champs continus de tangentes unitaires sur D,

$$T_\alpha(x) = \frac{\alpha'(\alpha^{-1}(x))}{\|\alpha'(\alpha^{-1}(x))\|} \text{ pour } x \in D \text{ et } -T_\alpha.$$

Notons que $-T_\alpha = T_\beta$ où $\beta : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ est définie par

$$\beta(s) = \alpha(a + b - s) \text{ pour } s \in [a, b].$$

Un **chemin régulier de** P **vers** Q est (D, T) où D est un chemin régulier entre P et Q orienté dans le sens du champ continu de tangentes unitaires

$T = T_\alpha$, dans la notation précédente. Donc (D, T_β) est un chemin régulier de Q vers P.

Une intégrale curviligne sur un chemin régulier D entre P et Q est définie comme étant l'intégrale sur l'arc régulier $D\backslash\{P, Q\}$.

De manière plus générale, un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^N$ est un **chemin entre** P **et** Q où $P \neq Q$ lorsqu'il peut être exprimé comme $D = \cup_{i=1}^k D_i$ où

(i) D_i est un chemin régulier entre P_i et P_{i+1} pour $i = 1, 2, ...k$

(ii) $P_1 = P$ et $P_{k+1} = Q$

(iii) $D_i \cap D_{i+1} = \{P_{i+1}\}$ pour $i = 1, 2, ...k - 1$

(iv) $D_i \cap D_j = \emptyset$ si $|i - j| \geq 2$.

Un tel chemin va **de** P **vers** Q si les parties D_i sont orientées de sorte que (D_i, T_i) va de P_i vers P_{i+1}.

L'intégrale curviligne sur un chemin est définie comme étant la somme des intégrales sur les parties D_i. Elle ne dépend pas de la décomposition utilisée.

Un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^N$ est appelé **chemin fermé** lorsqu'il peut être exprimé comme $D = D_1 \cup D_2$ où

(i) D_1 et D_2 sont deux chemins entre P et Q avec $P \neq Q$

(ii) $D_1 \cap D_2 = \{P, Q\}$.

Si les parties D_i sont orientées de sorte que (D_1, T_1) va de P vers Q et (D_2, T_2) va de Q vers P, on dit que D est un **chemin fermé orienté.** Un chemin fermé admet exactement deux orientations. Un chemin fermé orienté $\overrightarrow{D}$ détermine un vecteur tangent unitaire unique sur D sauf pour un nombre fini de points.

L'intégrale curviligne sur un chemin fermé est la somme des intégrales sur les parties D_1 et D_2. Elle ne dépend pas de la décomposition utilisée.

1.5 Chemins fermés dans le plan

Soit D un chemin fermé dans $\mathbb{R}^2$. Il y a quelques terminologies et conventions particulières à ce cas. Un résultat fondamental (le Théorème de Jordan) montre que son complément $\mathbb{R}^2\backslash D$ est la réunion de deux parties connexes disjointes dont l'une est bornée, appelée **l'intérieur de** D et l'autre est non bornée, appelée **l'extérieur de** D. Ceci permet de distinguer les deux directions normales à D en chaque point de D où il y a une droite tangente. En fait, si $P \in D$ et $P + ev\{(p, q)\}$ est la droite tangente à D en P, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$P \pm \varepsilon(-q, p) \notin D \text{ pour tout } \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

On peut choisir (p, q) de sorte que

$$P + \varepsilon(-q, p) \in extD \text{ et } P - \varepsilon(-q, p) \in intD \text{ pour tout } \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

En ce cas

$$N(P) = \frac{(-q, p)}{\|(-q, p)\|} \text{ est la } \textbf{normale unitaire extérieure} \text{ à } D \text{ en } P.$$

Ainsi, $N(P)$ est déterminé de manière unique par les propriétés suivantes

$$\|N(P)\| = 1, \langle N(P), T(P)\rangle = 0, P+\varepsilon N(P) \in extD \text{ pour tout } \varepsilon > 0 \text{ et petit,}$$

où $T(P)$ est telle que $P + ev\{T(P)\}$ est la droite tangente à D en P. Si $\|T(P)\| = 1$ alors $\{N(P), T(P)\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$.

Les deux orientations de D peuvent être distinguées de la manière suivante. Soient (D, T) une orientation de D et (C_i, T_i) un arc régulier orienté tel que $C_i \subset D$ et $T_i(P) = T(P) = (p, q)$ pour $P \in C_i$. Cette orientation est dite **positive/negative** lorsque le repère orthonormé $(N(P), T(P))$ est direct/indirect respectivement. C'est à dire, lorsque

$$\det[N(P), T(P)] = 1, \quad \det[N(P), T(P)] = -1 \text{ respectivement.}$$

(Rappel: un repère orthonormée de $\mathbb{R}^2$ est direct lorsque qu'il est obtenu par une rotation du repère canonique $((1, 0), (0, 1))$.)
Lorsque l'on représente graphiquement $\mathbb{R}^2$ de la façon usuelle, cette convention correspond aux notions intuitives suivantes:

(a) l'orientation positive de D est dans le sens opposé au mouvement des aiguilles d'une montre,

(b) en se promenant sur D dans le sens de l'orientation positive avec la tête vers le haut, l'intérieur de D se trouve à sa gauche.

Une fonction $N : D \to \mathbb{R}^2$ est appelée **champ de normales unitaires extérieures sur** D si $N(P)$ est une normale unitaire extérieure à D en P, sauf pour un nombre fini de points P de D.

Soit $f : D \to \mathbb{R}^2$ un champ vectoriel continu sur D. **Le flux de** f **à travers** D **vers l'extérieur** est l'intégrale curviligne

$$\int_D \langle f, N\rangle \; ds$$

où $N : D \to \mathbb{R}^2$ est un champ de normales unitaires extérieures sur D.

2 Autres intégrales curvilignes

Soient C une courbe dans $\mathbb{R}^N$ et $f : C \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une fonction continue sur C. On a introduit une notion d'intégrale de f le long de C pour certains types de courbes orientées qui correspond à intégrer la composante tangentielle de f sur C dans une direction donnée. Cette quantité intervient dans les calculs de quantités scalaires telles que le travail en mécanique et la circulation en mécanique de fluides. Dans le plan, la notion de flux amène à l'intégrale de la composante normale de f sur C. Or, dans d'autres circonstances, on doit intégrer le champ entier f sur C et le résultat est un vecteur.

Exemple Le champ électrique au point (x, y, z) est donné par la fonction

$$E(x, y, z) = (3x^2 - 1, 3xy - 1, z).$$

Un fil métallique a la forme du cercle de centre $(0, 0, 0)$ et de rayon 2 dans le plan $z = 0$, et il porte une charge électrique de densité $\rho > 0$ (constante) par unité de longueur. Calculer la force totale F sur le fil.

$$\begin{aligned} F &= \int_C \rho E ds = \int_C \rho(E_1, E_2, E_3) ds \\ &= \rho \left(\int_C E_1 ds, \int_C E_2 ds, \int_C E_3 ds \right). \end{aligned}$$

Une représentation paramétrique du chemin fermé C est

$$\alpha(\theta) = 2(\cos\theta, \sin\theta, 0) \text{ pour } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

et donc, pour $i = 1, 2, 3$,

$$\int_C E_i ds = \int_0^{2\pi} E_i(\alpha(\theta)) \left\| \alpha'(\theta) \right\| d\theta.$$

Or, $\|\alpha'(\theta)\| \equiv 2$ et

$$\begin{aligned} F &= 2\rho \left(\int_0^{2\pi} [12\cos^2\theta - 1] d\theta, \int_0^{2\pi} [12\cos\theta\sin\theta - 1] d\theta, \int_0^{2\pi} 0 d\theta \right) \\ &= 4\rho\pi\,(5, -1, 0). \end{aligned}$$

3 Intégrales de surface

But : Soit S une surface dans $\mathbb{R}^3$. On veut définir et calculer l'intégrale d'une fonction f sur S. On traitera deux cas.

(i) Une fonction $f : S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

(ii) Un champ vectoriel $f : S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Motivation : (i) Une coque métallique a la forme de S. Sa densité de masse par unité d'aire est donnée par $f : S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Calculer la masse totale de la coque.

(ii) Un fluide remplit une région ouverte Ω dans $\mathbb{R}^3$ et sa vitesse au point $x \in \Omega$ est $v(x)$(écoulement stationnaire). Soit S une surface dans Ω. Calculer le volume de fluide qui traverse S par unité de temps.

3.1 Surface dans $\mathbb{R}^3$

On commence par introduire un élément de surface appelé "nappe régulière". Ensuite on traitera d'autres cas.

Définition 3.1 *Un sous-ensemble S de $\mathbb{R}^3$ est appelé* ***nappe régulière*** *lorsqu'il existe une fonction $\alpha : \Omega \to S$ ayant les propriétés suivantes.*

(i) Ω est ouvert et connexe dans $\mathbb{R}^2$

(ii) $\alpha : \Omega \to S$ est un homéomorphisme

(iii) $\alpha \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et $\partial_1\alpha(s,t), \partial_2\alpha(s,t)$ sont linéairement indépendants pour tout $(s,t) \in \Omega$.

Une telle fonction α est appelée ***représentation paramétrique régulière de*** *S.*

Rappel : $\partial_1\alpha(s,t), \partial_2\alpha(s,t)$ sont linéairement indépendants

$\Longleftrightarrow \partial_1\alpha(s,t) \wedge \partial_2\alpha(s,t) \neq 0$ où $\wedge$ est le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$.

D'autre part, pour $P = \alpha(s,t) \in S$, la réunion de toutes les tangentes des arcs réguliers sur S passant par P est

$$\alpha(s,t) + ev\{\partial_1\alpha(s,t), \partial_2\alpha(s,t)\},$$

appelé **plan tangent** à S au point P. Notant que

$$ev\{\partial_1\alpha(s,t), \partial_2\alpha(s,t)\} = [\partial_1\alpha(s,t) \wedge \partial_2\alpha(s,t)]^\perp$$

on voit que $\partial_1\alpha(s,t) \wedge \partial_2\alpha(s,t)$ est un vecteur normal à ce plan tangent et

$$\alpha(s,t) + ev\{\partial_1\alpha(s,t) \wedge \partial_2\alpha(s,t)\}$$

est la **droite normale** à S au point P.

Définition 3.2 *Soit S une nappe régulière dans $\mathbb{R}^3$.* ***Un champ continu de normales unitaires sur S*** *est une fonction $N : S \to \mathbb{R}^3$ telle que*
(i) $N : S \to \mathbb{R}^3$ est continu
(ii) $\|N(P)\| = 1$ pour tout $P \in S$
(iii) $P + N(P)^\perp$ est le plan tangent à S en P, pour tout $P \in S$.

Noter que $P + ev\{N(P)\}$ est la droite normale à S en P.

Si $\alpha : \Omega \to S$ est une représentation paramétrique régulière de S, alors

$$N_\alpha(P) = \frac{\partial_1\alpha(s,t) \wedge \partial_2\alpha(s,t)}{\|\partial_1\alpha(s,t) \wedge \partial_2\alpha(s,t)\|} \text{ où } P = \alpha(s,t)$$

est le champ continu de normales unitaires sur S engendré par α.

Définition 3.3 *Soient S une nappe régulière dans $\mathbb{R}^3$ et $f : S \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur S.* ***L'intégrale de surface de*** *f sur S est*

$$\int_S f \, d\sigma = \int_\Omega f(\alpha(s,t)) \, \|\partial_1\alpha(s,t) \wedge \partial_2\alpha(s,t)\| \, dsdt$$

où $\alpha : \Omega \to S$ est une représentation paramétrique régulière de S.

Remarques (1) On suppose que l'intégrale à droite existe, ce qui n'est pas toujours le cas car l'ensemble Ω peut être non borné et la fonction f peut être non bornée sur Ω, même lorsque Ω est borné. Si Ω est borné et son bord $\partial\Omega$ est la réunion d'un nombre fini de chemins fermés dans $\mathbb{R}^2$, et si $\alpha \in C^1(\overline{\Omega})$ et $f \in C(\overline{S})$, alors

$$\int_\Omega f(\alpha(s,t)) \, \|\partial_1\alpha(s,t) \wedge \partial_2\alpha(s,t)\| \, dsdt$$

existe.

(2) Cette définition ne dépend pas du choix de représentation paramétrique de S.

(3) Posant $f \equiv 1$, on retrouve l'aire de S,

$$|S| = \int_\Omega \|\partial_1\alpha(s,t) \wedge \partial_2\alpha(s,t)\| \, dsdt.$$

Exemple 1 (un tronc de cône) Soient $0 < a < b < \infty$,

$$\begin{array}{rcl} \Omega & = & \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : a < r = \sqrt{s^2+t^2} < b\} \text{ et} \\ g(s,t) & = & \sqrt{s^2+t^2} - a. \end{array}$$

Le graphe de la fonction $g : \Omega \to \mathbb{R}$ est l'ensemble

$$G(g) = \{(x,y,g(x,y)) : (x,y) \in \Omega\} \in \mathbb{R}^3$$

qui a la forme d'un tronc de cône. En fait, $S = G(g)$ est une nappe régulière et une représentation paramétrique régulière de S est donnée par la fonction

$$\alpha : \Omega \to \mathbb{R}^3 \text{ définie par } \alpha(s,t) = (s,t,g(s,t)).$$

Notons que

$$\begin{array}{rcl} \alpha^{-1}(x,y,z) & = & (x,y) \text{ pour tout } (x,y,z) \in S, \\ \partial_s\alpha(s,t) & = & (1,0,\frac{s}{r}), \qquad \partial_t\alpha(s,t) = (0,1,\frac{t}{r}) \\ \partial_s\alpha(s,t) \wedge \partial_t\alpha(s,t) & = & (-\frac{s}{r}, -\frac{t}{r}, 1), \qquad \|\partial_s\alpha(s,t) \wedge \partial_t\alpha(s,t)\| = \sqrt{2} \\ \int_S d\sigma & = & \int_\Omega \|\partial_s\alpha(s,t) \wedge \partial_t\alpha(s,t)\| \, dsdt \\ & = & \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_a^b r dr d\theta = \pi\sqrt{2}(b^2-a^2) \end{array}$$

Donc l'aire de S est $\pi\sqrt{2}(b^2-a^2)$ comme l'on peut vérifier par la géométrie élémentaire.

Exemple 2 (un tronc de cylindre) Soient $0 < a < b < \infty$,

$$\begin{array}{rcl} \Omega & = & \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : a < r = \sqrt{s^2+t^2} < b\} \text{ et} \\ \alpha(s,t) & = & (\frac{as}{r}, \frac{at}{r}, r-a). \end{array}$$

En posant $S = \alpha(\Omega)$, on constate que

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = a \text{ et } 0 < z < b-a\}$$

et donc que S est une partie de longueur $b-a$ d'un cylindre de rayon a. En fait, S est une nappe régulière et α en est une représentation paramétrique avec

$$\begin{aligned}
\alpha^{-1}(x,y,z) &= (\frac{(z+a)}{a}x, \frac{(z+a)}{a}y) \text{ pour tout } (x,y,z) \in S, \\
\partial_s\alpha(s,t) &= (\frac{a}{r} - \frac{as^2}{r^3}, -\frac{ast}{r^3}, \frac{s}{r}), \qquad \partial_t\alpha(s,t) = (-\frac{ast}{r^3}, \frac{a}{r} - \frac{at^2}{r^3}, \frac{t}{r}) \\
\partial_s\alpha(s,t) \wedge \partial_t\alpha(s,t) &= -\frac{a}{r^2}(s,t,0), \qquad \|\partial_s\alpha(s,t) \wedge \partial_t\alpha(s,t)\| = \frac{a}{r} \\
\int_S d\sigma &= \int_\Omega \|\partial_s\alpha(s,t) \wedge \partial_t\alpha(s,t)\|\, dsdt \\
&= \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{a}{r} r dr d\theta = 2\pi a(b-a)
\end{aligned}$$

et on a retrouvé la formule usuelle pour l'aire d'un tronc de cylindre de rayon a et d'hauteur $b-a$.

3.2 Changement de représentation paramétrique

Le fait que la définition d'intégrale de surface est indépendante du choix de représentation paramétrique de S découle du résultat suivant.

Théorème 3.4 *Soient S une nappe régulière dans $\mathbb{R}^3$ et $\alpha : \Omega \to S$ une représentation paramétrique régulière de S. Alors (i) une fonction $\beta : \Delta \to S$ est une représentation paramétrique régulière de $S \iff$ (ii) Δ est un sous-ensemble ouvert et connexe de $\mathbb{R}^2$ et il existe un homéomorphisme $\varphi : \Delta \to \Omega$ tel que $\varphi \in C^1(\Delta)$ avec $\det \nabla\varphi(u,v) \neq 0$ pour tout $(u,v) \in \Delta$ et $\beta(u,v) = \alpha(\varphi(u,v))$ pour tout $(u,v) \in \Delta$.*

Remarque Dans ce cas, la matrice jacobienne $\nabla\varphi$ de φ est inversible:

$$\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \varphi_1(u,v) \\ \varphi_2(u,v) \end{pmatrix} \text{ et } \nabla\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \partial_1\varphi_1(u,v) & \partial_2\varphi_1(u,v) \\ \partial_1\varphi_2(u,v) & \partial_2\varphi_2(u,v) \end{pmatrix}$$

De plus, $\varphi^{-1} \in C^1(\Omega)$ et

$$\nabla\varphi^{-1}(s,t) = \nabla\varphi(u,v)^{-1} \text{ où } (s,t) = \varphi(u,v)$$

Notant que $(s,t)=\varphi(u,v) \Longleftrightarrow \alpha(s,t)=\beta(u,v)$ et que $\det A^{-1}=1/\det A$, on voit que

$$\det \nabla\varphi^{-1}(s,t) = 1/\det\nabla\varphi(u,v) \text{ lorsque } \alpha(s,t)=\beta(u,v).$$

Comme $\det\nabla\varphi : \Delta \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ est une fonction continue et Δ est connexe, il n'y a que deux cas,

$$\begin{array}{lcl} \text{ou bien, } \det\nabla\varphi(u,v) & > & 0 \text{ pour tout } (u,v)\in\Delta \\ \text{ou bien, } \det\nabla\varphi(u,v) & < & 0 \text{ pour tout } (u,v)\in\Delta. \end{array}$$

Ensuite, $\beta(u,v)=\alpha(\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v))$ et donc

$$\begin{array}{rcl} \partial_1\beta(u,v) & = & \partial_1\alpha(\varphi(u,v))\partial_1\varphi_1(u,v)+\partial_2\alpha(\varphi(u,v))\partial_1\varphi_2(u,v) \\ \partial_2\beta(u,v) & = & \partial_1\alpha(\varphi(u,v))\partial_2\varphi_1(u,v)+\partial_2\alpha(\varphi(u,v))\partial_2\varphi_2(u,v) \end{array}$$

On trouve facilement que

$$\partial_1\beta(u,v)\wedge\partial_2\beta(u,v) = \det\nabla\varphi(u,v)[\partial_1\alpha(\varphi(u,v))\wedge\partial_2\alpha(\varphi(u,v))],$$

montrant que $\partial_1\beta(u,v)\wedge\partial_2\beta(u,v)$ est parallèle à $\partial_1\alpha(s,t)\wedge\partial_2\alpha(s,t)$ lorsque $\beta(u,v)=\alpha(s,t)$.

Corollaire 3.5 *Soient $\alpha : \Omega \to S$ et $\beta : \Delta \to S$ deux représentations paramétriques régulières d'une nappe régulière S. Alors pour toute fonction continue $f : S \to \mathbb{R}$,*

$$\int_\Omega f(\alpha(s,t))\,\|\partial_1\alpha(s,t)\wedge\partial_2\alpha(s,t)\|\,dsdt = \int_\Delta f(\beta(u,v))\,\|\partial_1\beta(u,v)\wedge\partial_2\beta(u,v)\|\,dudv,$$

dans le sens que l'existence de l'une de ces intégrales implique l'existence de l'autre et qu'elles ont la même valeur.

Preuve Supposons que Ω est borné et son bord $\partial\Omega$ est un chemin fermé dans $\mathbb{R}^2$, que $\alpha\in C^1(\overline{\Omega})$ et que $f\in C(\overline{S})$. On utilise la formule de changement de variables pour les intégrales doubles. Posant $(s,t)=\varphi(u,v)$, on obtient $\beta(u,v)=\alpha(\varphi(u,v))=\alpha(s,t)$ pour tout $(u,v)\in\Delta$

$$\begin{array}{rl} & \displaystyle\int_\Delta f(\beta(u,v))\,\|\partial_1\beta(u,v)\wedge\partial_2\beta(u,v)\|\,dudv \\ = & \displaystyle\int_{\varphi(\Delta)} f(\alpha(s,t))\,\|\det\nabla\varphi(u,v)[\partial_1\alpha(s,t)\wedge\partial_2\alpha(s,t)\|\ \frac{1}{|\det\nabla\varphi(u,v)|}dsdt \\ = & \displaystyle\int_\Omega f(\alpha(s,t))\,\|\partial_1\alpha(s,t)\wedge\partial_2\alpha(s,t)\|\,dsdt. \end{array}$$

3.3 Nappes orientées

Soient $\alpha : \Omega \to S$ et $\beta : \Delta \to S$ deux représentations paramétriques régulières d'une nappe régulière S. Les champs continus de normales unitaires engendrés par ces représentations sont

$$N_\alpha(\alpha(s,t)) = \frac{\partial_1\alpha(s,t) \wedge \partial_2\alpha(s,t)}{\|\partial_1\alpha(s,t) \wedge \partial_2\alpha(s,t)\|} \text{ et } N_\beta(\beta(u,v)) = \frac{\partial_1\beta(u,v) \wedge \partial_2\beta(u,v)}{\|\partial_1\beta(u,v) \wedge \partial_2\beta(u,v)\|}.$$

Comme

$$\partial_1\beta(u,v) \wedge \partial_2\beta(u,v) = \det \nabla\varphi(u,v)[\partial_1\alpha(\varphi(u,v)) \wedge \partial_2\alpha(\varphi(u,v))$$

lorsque $\beta(u,v) = \alpha(\varphi(u,v)) = \alpha(s,t)$, on voit que

$$N_\beta(\beta(u,v)) = \frac{\det \nabla\varphi(u,v)}{|\det \nabla\varphi(u,v)|} N_\alpha(\alpha(s,t)).$$

Ainsi,

$$N_\beta = \begin{cases} N_\alpha & \text{si } \det \nabla\varphi > 0 \text{ sur } \Delta \\ -N_\alpha & \text{si } \det \nabla\varphi < 0 \text{ sur } \Delta \end{cases}.$$

Donc il y a exactement deux champs continus de normales unitaires sur une nappe régulière.

Définition 3.6 *Une nappe régulière S avec un choix de champ continu de normales unitaires N sur S est appelé **nappe orientée**, notée (S,N). Une représentation paramétrique de (S,N) est une représentation paramétrique régulière de S telle que $N_\alpha = N$.*

Remarque Etant donné une nappe régulière S, elle admet deux orientations. Si (S,N) est l'une de ces orientations, l'autre est $(S,-N)$.

Définition 3.7 *Soient (S,N) une nappe orientée et $f : S \to \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel continu sur S. **Le flux de f à travers S dans le sens de N** est*

$$\int_{(S,N)} f \cdot d\sigma = \int_S \langle f, N \rangle \, d\sigma.$$

Remarques (1) Si $\alpha : \Omega \to S$ est une représentation paramétrique de (S, N),

$$N(\alpha(s,t)) = N_\alpha(\alpha(s,t)) = \frac{\partial_1\alpha(s,t) \wedge \partial_2\alpha(s,t)}{\|\partial_1\alpha(s,t) \wedge \partial_2\alpha(s,t)\|}$$

et donc

$$\begin{aligned}\int_{(S,N)} f \cdot d\sigma &= \int_\Omega \langle f(\alpha(s,t)), N(\alpha(s,t))\rangle \, \|\partial_1\alpha(s,t) \wedge \partial_2\alpha(s,t)\| \, dsdt \\ &= \int_\Omega \langle f(\alpha(s,t)), \partial_1\alpha(s,t) \wedge \partial_2\alpha(s,t)\rangle \; dsdt.\end{aligned}$$

(2) Utilisant la notation

$$dx_i \wedge dx_j = \frac{\partial(\alpha_i, \alpha_j)}{\partial(s,t)} dsdt \text{ où } \frac{\partial(\alpha_i, \alpha_j)}{\partial(s,t)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha_i}{\partial s} & \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} \\ \frac{\partial \alpha_j}{\partial s} & \frac{\partial \alpha_j}{\partial t} \end{pmatrix},$$

le flux de f à travers S s'écrit

$$\int_{(S,N)} f \cdot d\sigma = \int_{(S,N)} f_1 dx_2 \wedge dx_3 + f_2 dx_3 \wedge dx_1 + f_3 dx_1 \wedge dx_2.$$

Noter bien l'ordre des termes car

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i.$$

3.4 Nappes avec un bord

Définition 3.8 *Un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^3$ est appelé **nappe avec un bord** lorsqu'il existe un ouvert Ω borné et connexe de $\mathbb{R}^2$ tel que son bord $\partial\Omega$ est un chemin fermé et une fonction $\alpha \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ telle que*

(i) $\alpha\mid_\Omega$ est une représentation paramétrique régulière d'une nappe S

(ii) $\alpha : \overline{\Omega} \to A$ est un homéomorphisme

(iii) $\partial_1\alpha(s,t) \wedge \partial_2\alpha(s,t) \neq 0$ pour tout $(s,t) \in \partial\Omega$.

*L'ensemble $A \backslash S = \alpha(\partial\Omega)$ est appelé **bord (géométrique) de** A, et noté ∂A*

Remarques (1) On peut vérifier que $A\backslash S$ est un chemin fermé dans $\mathbb{R}^3$. Il ne faut pas le confondre avec le bord (topologique) en tant que sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$. Ce dernier est formé par les points de $\mathbb{R}^3$ qui ne sont ni dans l'intérieur de A, ni dans l'intérieur de son complément et donc le bord topologique de A est égal à A lorsque A est une nappe avec un bord. Si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ est une représentation paramétrique de $\partial\Omega$, alors $\alpha \circ \gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ est une représentation paramétrique de $A \backslash S$.

(2) Le champ continu N_α de normales unitaires sur S engendré par α s'étend à A de manière continue. Ainsi, on peut déterminer une orientation de A, notée (A, N), en choisissant une orientation (S, N) de la nappe S.

(3) Sur une nappe orientée avec bord, il y a une notion d'orientation positive de son bord que l'on peut préciser ainsi. Soient (A, N) une nappe orientée avec bord et soit $\alpha : \overline{\Omega} \to A$ une représentation paramétrique de (A, N) telle que $N = N_\alpha$. Le bord de Ω est un chemin fermé dans $\mathbb{R}^2$. Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ est une représentation paramétrique de $\partial\Omega$ avec l'orientation positive. Alors $\alpha \circ \gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ est une représentation paramétrique du bord de A et l'orientation du bord engendrée par cette paramétrisation est appelée positive pour l'orientation N de A. Intuitivement, cette orientation du bord est déterminée de la manière suivante. Lorsqu'on se déplace sur le bord de A dans le sens positif avec sa tête dans la direction de N, la nappe A se trouve à sa gauche.

Annexe 1 Lors de l'étude des représentations paramétriques, on est appelé à vérifier qu'une fonction est un homéomorphisme. Si l'on ne dispose pas d'une formule explicite pour la fonction inverse le résultat suivant peut permettre d'établir la continuité de cette fonction inverse.

Lemme 3.9 *Soit Ω un sous-ensemble ouvert et borné de $\mathbb{R}^M$. Considérons une fonction $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ telle que*

$$\begin{aligned} (i)\ g &\in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N), \\ (ii)\ g &\mid_{\Omega} \text{ est injectif}, \\ (iii)\ g(\Omega) \cap g(\partial\Omega) &= \emptyset. \end{aligned}$$

Alors $\alpha = g\,|_\Omega : \Omega \to S$ est un homéomorphisme où $S = \alpha(\Omega) = g(\Omega)$.

Remarque Dans cet énoncée, $\overline{\Omega}$ signifie l'adhérence de Ω et $\partial\Omega = \overline{\Omega} \backslash \Omega$ son bord topologique.

Preuve Par les hypothèses, α est continue sur Ω et une fonction inverse $\alpha^{-1} : S \to \Omega$ existe. Il suffit de démontrer que α^{-1} est continu sur S. Considérons un point $P \in S$ et une suite $\{P_n\} \subset S$ telle que $P_n \to P$. On doit montrer que $\alpha^{-1}(P_n) \to \alpha^{-1}(P)$. Si ceci n'est pas le cas, il existe $\delta > 0$ et une sous-suite

$\{P_{n_k}\}$ telle que $\|\alpha^{-1}(P_{n_k}) - \alpha^{-1}(P)\| \geq \delta$ pour tout k. Or, $\{\alpha^{-1}(P_{n_k})\} \subset \Omega$ et donc il y a une sous-suite $\{\alpha^{-1}(P_{n_{k_j}})\}$ telle que $\alpha^{-1}(P_{n_{k_j}}) \to z \in \overline{\Omega}$ car $\overline{\Omega}$ est compact. Par la continuité de g sur $\overline{\Omega}$, $P_{n_{k_j}} = g(\alpha^{-1}(P_{n_{k_j}})) \to g(z)$ et donc $g(z) = P \in g(\Omega)$. Par l'hypothèse (iii), ceci implique que $z \notin \partial\Omega$ et donc $z \in \overline{\Omega}\backslash\partial\Omega = \Omega$. Ainsi $g(z) = \alpha(z) = P$ et $z = \alpha^{-1}(P)$. Or, $\alpha^{-1}(P_{n_{k_j}}) \to z = \alpha^{-1}(P)$ tandis que $\left\|\alpha^{-1}(P_{n_{k_j}}) - \alpha^{-1}(P)\right\| \geq \delta$ pour tout j, ce qui est impossible. De cette contradiction on doit conclure que $\alpha^{-1}(P_n) \to \alpha^{-1}(P)$, ce qu'il fallait démontrer.

Annexe 2 Dans la démonstration du résultat concernant la relation entre deux représentations paramétriques régulières de la même nappe, la difficulté principale est de montrer que la fonction $\varphi : \Delta \to \Omega$ définie par $\varphi = \alpha^{-1} \circ \beta$ est continument dérivable lorsque $\alpha : \Omega \to S$ et $\beta : \Delta \to S$ sont deux représentations régulières d'une nappe S. Pour ce faire, considérons un point $(u_0, v_0) \in \Delta$ et posons $(s_0, t_0) = \varphi(u_0, v_0)$. Soit $n = N_\alpha(\alpha(s_0, t_0))$ une normale unitaire à la nappe S au point $P = \alpha(s_0, t_0) = \beta(u_0, v_0)$ et posons $X = n^\perp$. Donc X est un sous espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2. Considérons la fonction $F : \Omega \times \Delta \to X$ définie par

$$F(s, t, u, v) = \alpha(s, t) - \beta(u, v) - \langle \alpha(s, t) - \beta(u, v), n\rangle\, n.$$

Alors $F \in C^1(\Omega \times \Delta)$ et $F(s_0, t_0, u_0, v_0) = 0$. De plus

$$D_{(s,t)}F(s_0, t_0, u_0, v_0) = \begin{bmatrix} \partial_s\alpha_1(s_0, t_0) & \partial_t\alpha_1(s_0, t_0) \\ \partial_s\alpha_2(s_0, t_0) & \partial_t\alpha_2(s_0, t_0) \\ \partial_s\alpha_3(s_0, t_0) & \partial_t\alpha_3(s_0, t_0) \end{bmatrix}$$

car $\langle \partial_s\alpha(s_0, t_0), n\rangle = \langle \partial_t\alpha(s_0, t_0), n\rangle = 0$. Ainsi $D_{(s,t)}F(s_0, t_0, u_0, v_0)$ est une matrice de rang 2 et il découle du Théorème des Fonctions Implicites qu'il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et une fonction $\psi \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ tels que

$$(u_0, v_0) \in U \subset \Delta, \psi(u_0, v_0) = (s_0, t_0) \text{ et } F(\psi(u, v), (u, v)) = 0 \text{ pour tout } (u, v) \in U.$$

De plus, il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $F(s, t, u, v) = 0$ et $\|(s, t) - (s_0, t_0)\| + \|(u, v) - (u_0, v_0)\| < \varepsilon$ alors $(s, t) = \psi(u, v)$. Or, $F(\varphi(u, v), (u, v)) = 0$ pour tout $(u, v) \in \Delta$ et φ est continu sur Δ car α et β sont des homéomorphismes. Donc, il existe $\delta > 0$ tel que $\varphi(u, v) = \psi(u, v)$ lorsque $\|(u, v) - (u_0, v_0)\| < \delta$. Ceci montre que $\varphi \in C^1(B, \mathbb{R}^2)$ où $B = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \|(u, v) - (u_0, v_0)\| < \delta\} \subset \Delta$.

4 Intégration par parties en $\mathbb{R}^2$ et le Théorème de Green

Rappel: Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f \in C^1([a,b])$. Alors le Théorème Fondamental du calcul intégral affirme que

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

C'est à dire, l'intégrale de f' sur l'intervalle (a, b) peut être calculée à partir des valeurs de f sur le bord de l'intervalle. Soient $u, v \in C^1([a,b])$. En posant $f = uv$, on déduit la formule usuelle d'intégration par parties,

$$\int_a^b uv'dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'vdx.$$

But: On va formuler des résultats de ce genre concernant des fonctions de plusieurs variables. Dans cette section on va établir des formules reliant des intégrales doubles et des intégrales curvilignes dans le plan. Dans la section suivante, les formules relieront des intégrales de surface et des intégrales sur des chemins fermés dans $\mathbb{R}^3$. Dans une troisième section, on traitera des formules reliant des intégrales triples et des intégrales de surfaces.

Afin des formuler ces résultats, on rappelle quelques terminologies concernant les dérivées partielles.

4.1 Opérateurs différentiels

Rappelons quelques définitions.

Soit V un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^N$.

Pour une fonction $u \in C^1(V, \mathbb{R})$, le **gradient** de u est le vecteur

$$\nabla u = (\partial_1 u, ..., \partial_N u) \text{ et } \nabla u : V \to \mathbb{R}^N \text{ un champ vectoriel.}$$

Pour un champ vectoriel $f \in C^1(V, \mathbb{R}^N)$, la **matrice jacobienne** de f est la matrice

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1 & \cdot & \cdot & \partial_N f_1 \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \partial_1 f_N & \cdot & \cdot & \partial_N f_N \end{bmatrix} \text{ et } \nabla f : V \to \mathbb{R}^{N \times N}.$$

Pour un champ vectoriel $f \in C^1(V, \mathbb{R}^N)$, la **divergence** de f est

$$\nabla \cdot f = \sum_{i=1}^{N} \partial_i f_i \text{ et } \nabla \cdot f : V \to \mathbb{R} \text{ est une fonction.}$$

Pour $N = 3$ et un champ vectoriel $f \in C^1(V, \mathbb{R}^3)$, le **rotationnel** de f est

$$\nabla \wedge f = (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2, \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3, \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) \text{ et}$$
$$\nabla \wedge f : V \to \mathbb{R}^3 \text{ est un champ vectoriel.}$$

Pour $N = 2$ et un champ vectoriel $f \in C^1(V, \mathbb{R}^2)$, le **rotationnel** de f est

$$\nabla \wedge f = \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \text{ et } \nabla \wedge f : V \to \mathbb{R} \text{ est une fonction.}$$

Pour une fonction $u \in C^2(V, \mathbb{R})$, son gradient $\nabla u \in C^1(V, \mathbb{R}^N)$ et la matrice jacobienne de ce champ vectoriel $\nabla(\nabla u)$ est symétrique, appelée **matrice hessienne** $H(u)$ de u,

$$H(u) = \nabla(\nabla u) = \begin{bmatrix} \partial_1\partial_1 u & \cdot & \cdot & \partial_N \partial_1 u \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \partial_1 \partial_N u & \cdot & \cdot & \partial_N \partial_N u \end{bmatrix} \text{et}$$
$$H(u)_{ij} = \partial_j \partial_i u = \partial_i \partial_j u = H(u)_{ji} \text{ pour } 1 \le i, j \le N.$$

Pour une fonction $u \in C^2(V, \mathbb{R})$, le **laplacien** de u est

$$\Delta u = \nabla \cdot (\nabla u) = \sum_{i=1}^{N} \partial_i^2 u \text{ et } \Delta u : V \to \mathbb{R} \text{ est une fonction.}$$

On utilise aussi des notations alternatives:

$$\nabla u = \text{grad } u, \nabla \cdot f = \text{div } f, \nabla \wedge f = \text{rot } f = \text{curl } f.$$

Notons encore que:

(1) Pour $f \in C^1(V, \mathbb{R}^N), \nabla \cdot f = trace \nabla f$

(2) Pour $P, Q \in \mathbb{R}^3, P \wedge Q$ est le vecteur unique dans $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\langle P \wedge Q, A \rangle = \det(P, Q, A) = P \cdot (Q \wedge A) \text{ pour tout } A \in \mathbb{R}^3.$$

(3) Pour $N = 3$ et $f \in C^1(V, \mathbb{R}^3), \nabla \wedge f$ est le vecteur unique dans $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\langle \nabla \wedge f, A \rangle = \nabla \cdot (f \wedge A) \text{ pour tout } A \in \mathbb{R}^3.$$

(4) Pour $u \in C^2(V, \mathbb{R})$, $\Delta u = trace H(u)$.

4.2 Intégration par parties

On commence par le cas d'une région limitée par les graphes de deux fonctions.

Lemme 4.1 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $\varphi, \psi \in C^1([a, b])$ telles que $\varphi < \psi$ sur (a, b). Considérons une fonction $f \in C^1(\overline{\Omega})$ où*

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b \textit{ et } \varphi(x) < y < \psi(x)\}. \tag{1}$$

Alors, pour $i = 1, 2$,

$$\int_\Omega \partial_i f(x, y) dx dy = \int_{\partial\Omega} f N_i ds$$

où $N : \partial\Omega \to \mathbb{R}^2$ est le champ de normales unitaires extérieures sur le chemin fermé $\partial\Omega$.

Preuve Commencons par le cas $i = 2$ car c'est plus facile que le cas $i = 1$ à cause de la forme de Ω. En fait,

$$\int_\Omega \partial_2 f(x, y) dx dy = \int_a^b \{\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \partial_2 f(x, y) dy\} dx = \int_a^b \{f(x, \psi(x)) - f(x, \varphi(x))\} dx.$$

D'autre part, $\partial\Omega = \cup_{i=1}^4 C_i$ où

$C_1 = \alpha([a, b])$ et $\alpha(x) = (x, \varphi(x))$,
C_2 est le segment de droite entre $(b, \varphi(b))$ et $(b, \psi(b))$,
$C_3 = \beta([a, b])$ et $\beta(x) = (x, \psi(x))$,
C_4 est le segment de droite entre $(a, \varphi(a))$ et $(a, \psi(a))$.

Sur C_2 et C_4, $N_2 \equiv 0$ et donc

$$\int_{\partial\Omega} f N_2 ds = \int_{C_1} f N_2 ds + \int_{C_3} f N_2 ds.$$

Sur C_1, $N(\alpha(x)) = (\alpha_2'(x), -\alpha_1'(x)) / \|\alpha'(x)\| = (\varphi'(x), -1)/\sqrt{1 + \varphi'(x)^2}$. D'où,

$$\int_{C_1} f N_2 ds = \int_a^b f(\alpha(x)) N_2(\alpha(x)) \|\alpha'(x)\| dx = -\int_a^b f(x, \varphi(x)) dx.$$

De la même façon on trouve que

$$\int_{C_3} f N_2 ds = \int_a^b f(x, \psi(x))dx$$

et le lemme est établi dans le cas $i = 2$.

Notons que dans cette première partie de la démonstration on a simplement utilisé le fait que $f \in C(\overline{\Omega})$, que $\partial_2 f$ existe et $\partial_2 f \in C(\overline{\Omega})$. Pour traiter le cas $i = 1$, on introduit la fonction auxiliaire g ayant la propriété que $\partial_2 g = \partial_1 f$. Cette fonction est définie par

$$g(x, y) = \int_{\varphi(x)}^{y} \partial_1 f(x, t)dt \text{ pour } (x, y) \in \overline{\Omega}.$$

Alors $g \in C(\overline{\Omega})$, la dérivée partielle $\partial_2 g$ existe et

$$\partial_2 g(x, y) = \partial_1 f(x, y).$$

Donc $\partial_2 g \in C(\overline{\Omega})$, et, par ce qui a déjà été démontré,

$$\int_\Omega \partial_2 g(x, y)dxdy = \int_{\partial\Omega} g N_2 ds.$$

Or,

$$\int_\Omega \partial_2 g(x, y)dxdy = \int_\Omega \partial_1 f(x, y)dxdy$$

et il reste à voir que

$$\int_{\partial\Omega} g N_2 ds = \int_{\partial\Omega} f N_1 ds.$$

Or,

$$\int_{\partial\Omega} g N_2 ds = \int_a^b \{g(x, \psi(x)) - g(x, \varphi(x))\}dx = \int_a^b g(x, \psi(x))dx$$

car $g(x, \varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$.
D'autre part,

$$\frac{d}{dx} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, t)dt = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \partial_1 f(x, t)dt + f(x, \psi(x))\psi'(x) - f(x, \varphi(x))\varphi'(x)$$

et donc

$$\begin{aligned}
g(x,\psi(x)) &= \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \partial_1 f(x,t)dt \\
&= \frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)dt - f(x,\psi(x))\psi'(x) + f(x,\varphi(x))\varphi'(x).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\int_a^b g(x,\psi(x))dx \\
&= \int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} f(b,t)dt - \int_{\varphi(a)}^{\psi(a)} f(a,t)dt - \int_a^b f(x,\psi(x))\psi'(x)dx + \int_a^b f(x,\varphi(x))\varphi'(x)dx \\
&= \int_{C_2} fN_1 ds + \int_{C_4} fN_1 ds + \int_{C_3} fN_1 ds + \int_{C_1} fN_1 ds \\
&= \int_{\partial\Omega} fN_1 ds.
\end{aligned}$$

La même formule peut être démontrée pour des régions dans le plan qui ne sont pas forcément limitées par les graphes de deux fonctions de classe C^1. Evidemment, on peut permuter les axes, où faire une rotation des axes avant d'utiliser le lemme. Une démarche encore plus générale consiste à découper la région Ω en un nombre fini de parties Ω_i de sorte que, sur chaque partie, on sait que la formule est valable par les remarques précédentes. Ce découpage doit être tel que:

$$\left.\begin{array}{l}
\overline{\Omega} = \cup_{k=1}^m \overline{\Omega}_k \text{ où, à une rotation près, la partie } \Omega_k \text{ est de la forme (1),} \\
\text{soit } N^k : \partial\Omega_k \to \mathbb{R}^2 \text{ le champ de normales unitaires extérieures à } \Omega_k, \\
\qquad \text{pour } k \neq h, \overline{\Omega}_k \cap \overline{\Omega}_h \subset \partial\Omega_k \cap \partial\Omega_h \text{ et } N^k(x,y) = -N^h(x,y), \\
\qquad \text{pour tout sauf un nombre fini de points } (x,y) \in \partial\Omega_k \cap \partial\Omega_h.
\end{array}\right\} \quad (2)$$

Voici une classe de régions que l'on peut découper de cette façon.

Définition 4.2 *Un sous-ensemble Ω de $\mathbb{R}^2$ est appelé* ***domaine régulier*** *lorsqu'il y a un nombre fini de chemins fermés $C_1, ..., C_k$ dans $\mathbb{R}^2$ tels que*

$$\Omega = intC_1 \text{ si } k = 1 \text{ et } \Omega = (intC_1) \setminus \cup_{i=2}^k D_i \text{ si } k \geq 2,$$

où $D_i = \overline{intC_i} = (intC_i) \cup C_i$ et les chemins C_i sont tels que

$$D_i \subset intC_1 \text{ et } D_i \subset extC_j \text{ pour } i,j = 2, ..., k \text{ et } i \neq j.$$

Si Ω est un domaine régulier alors Ω est ouvert et borné et son bord $\partial\Omega = \cup_{i=1}^{k} C_i$. On dit que $\partial\Omega$ est **orienté positivement** lorsque

$$\begin{aligned} &C_1 \text{ a l'orientation positive et} \\ &C_i \text{ a l'orientation négative pour } i = 2, ..., k. \end{aligned}$$

Un **champ de normales unitaires extérieures sur** $\partial\Omega$ est une fonction $N : \partial\Omega \to \mathbb{R}^2$ telle que, pour tout sauf un nombre fini de points $P \in \partial\Omega$,

$$\begin{gathered} \|N(P)\| = 1,\ P + ev\{N(P)\} \text{ est la droite normale à } \partial\Omega \text{ en } P \\ \text{et il existe } \varepsilon_P > 0 \text{ tel que } P + \varepsilon N(P) \notin \Omega \text{ pour } 0 < \varepsilon < \varepsilon_P. \end{gathered}$$

C'est à dire,

$N \mid_{C_1}$ est un champ de normales unitaires extérieures sur C_1 et
$N \mid_{C_i}$ est un champ de normales unitaires intérieures sur C_i pour $i = 2, ..., k$.

Pour ce genre de région. la formule du lemme reste valable.

Théorème 4.3 *(formule d'intégration par parties) Soient Ω un domaine régulier dans $\mathbb{R}^2$ et $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$. Alors pour $i = 1, 2$,*

$$\int_{\Omega} u\partial_i v \; dxdy = \int_{\partial\Omega} uvN_i \; ds - \int_{\Omega} v\partial_i u \; dxdy$$

où N est le champ de normales unitaires extérieures sur $\partial\Omega$. En particulier,

$$\int_{\Omega} \partial_i u \; dxdy = \int_{\partial\Omega} uN_i \; ds.$$

Preuve Il suffit de justifier la deuxième formule pour une fonction $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Ensuite, on obtient la première formule en remplacant u par le produit uv. Soit $\overline{\Omega} = \cup_{k=1}^{m} \overline{\Omega}_k$ un découpage de Ω du type (4). Par le lemme,

$$\int_{\Omega_k} \partial_i u \; dxdy = \int_{\partial\Omega_k} uN_i^k \; ds \text{ pour } k = 1, ..., m$$

et donc

$$\int_{\Omega} \partial_i u \; dxdy = \sum_{k=1}^{m} \int_{\Omega_k} \partial_i u \; dxdy = \sum_{k=1}^{m} \int_{\partial\Omega_k} uN_i^k \; ds = \int_{\partial\Omega} uN_i \; ds.$$

Il y a plusieurs formes équivalentes de ce résultat.

4.3 Le théorème de Green et ses variantes

Corollaire 4.4 *Soient Ω un domaine régulier dans $\mathbb{R}^2$.*

(i) (Théorème de Green) Soient $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$. Alors

$$\int_\Omega \{\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\} dxdy = \int_{\partial\Omega} \{vN_1 - uN_2\} ds = \int_{\overrightarrow{\partial\Omega}} udx + vdy,$$

où N est le champ de normales unitaires extérieures sur $\partial\Omega$ et $\overrightarrow{\partial\Omega}$ est considéré avec l'orientation positive.

(ii) Soit $f : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un champ vectoriel tel que $f_1, f_2 \in C^1(\overline{\Omega})$. Alors,

$$\int_\Omega \{\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1\} dxdy = \int_{\overrightarrow{\partial\Omega}} f \cdot dl$$

où l'intégrale sur $\overrightarrow{\partial\Omega}$ est calculée pour l'orientation positive.

(iii) Soit $f : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un champ vectoriel tel que $f_1, f_2 \in C^1(\overline{\Omega})$. Alors,

$$\int_\Omega \{\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2\} dxdy = \int_{\partial\Omega} \langle f, N \rangle \; ds$$

où N est le champ de normales unitaires extérieures sur $\partial\Omega$.

Remarque La formule (ii) montre que l'intégrale de $rot f = \nabla \wedge f$ sur Ω est égale à la circulation de f sur $\partial\Omega$ dans le sens positif. Selon la formule (iii), l'intégrale de $div f = \nabla \cdot f$ sur Ω est égale au flux de f à travers $\partial\Omega$ vers l'extérieur.

Preuve (i) Par le théorème,

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x} dxdy = \int_{\partial\Omega} vN_1 ds \text{ et } \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial y} dxdy = \int_{\partial\Omega} uN_2 ds,$$

et on obtient immédiatement la première égalité. Soit $T = (p, q)$ une tangente unitaire en un point P de $\partial\Omega$ dans la direction associée à l'orientation positive de $\partial\Omega$. Alors $N(P) = (q, -p)$ et donc

$$\int_{\partial\Omega} \{vN_1 - uN_2\} ds = \int_{\partial\Omega} \{vq + up\} ds = \int_{\overrightarrow{\partial\Omega}} \langle (u, v), T \rangle \, ds = \int_{\overrightarrow{\partial\Omega}} udx + vdy.$$

(ii) Posant $f_1 = u$ et $f_2 = v$, ceci découle de (i) car

$$\int_{\overrightarrow{\partial\Omega}} f_1 dx + f_2 dy = \int_{\overrightarrow{\partial\Omega}} f \cdot dl.$$

(iii) Posant $f_1 = v$ et $f_2 = -u$, ceci découle de (i).

5 Le théorème de Stokes

But : Obtenir une formule d'intégration par parties pour des intégrales sur une nappe.

Observation : Une telle formule ne peut pas porter sur des dérivées partielles quelconques. Par exemple, considérons le disque $S = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 < 1\}$ qui est une nappe régulière limitée par le cercle $C = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 1\}$. Pour une fonction $u \in C^1(\mathbb{R}^3)$, la formule d'intégration par parties dans le plan $z = 0$ montre que, pour $i = 1, 2$,

$$\int_S \partial_i u \, d\sigma = \int_\Omega \partial_i u(x, y, 0) \, dxdy \; = \int_{\partial\Omega} u n_i \, ds = \int_C u n_i \, ds$$

où $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$et $n(x, y, 0) = (x, y, 0)$. Par contre,

$$\int_S \partial_3 u \, d\sigma = \int_\Omega \partial_3 u(x, y, 0) \, dxdy$$

ne peut pas être traitée de cette façon car on peut modifier $\partial_3 u(x, y, 0)$ sans modifier $u(x, y, 0)$ en remplacant u par

$$w(x, y, z) = u(x, y, z) + v(z)$$

où $v \in C^1(\mathbb{R})$ et $v(0) = 0$. En ce cas,

$$\begin{aligned}\int_S \partial_3 w \, d\sigma = \int_\Omega \partial_3 w(x, y, 0) \, dxdy &= \int_\Omega \{\partial_3 u(x, y, 0) + v'(0)\} \, dxdy \\ &= \int_\Omega \partial_3 u(x, y, 0) \, dxdy + v'(0) \, |\Omega|\end{aligned}$$

où $|\Omega|$ est l'aire de Ω, tandis que $w \equiv u$ sur C. Cet exemple simple suggère que l'on peut traiter des intégrales sur une nappe qui ne contiennent que des dérivées partielles dans des directions tangentes à la nappe en chaque point.

Avant de formuler les résultats on doit préciser la notion du bord d'une nappe ainsi que son orientation.

5.1 Nappes avec un bord

Définition 5.1 *Un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^3$ est appelé* ***nappe avec un bord*** *lorsqu'il existe une fonction $\alpha : \overline{\Omega} \to A$ ayant les propriétés suivantes:*

(i) $\Omega = intC$ où C est un chemin fermé dans $\mathbb{R}^2$

(ii) $\alpha : \overline{\Omega} \to A$ est un homéomorphisme

(iii) $\alpha \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ et $\partial_1\alpha(s,t) \wedge \partial_2\alpha(s,t) \neq 0$ pour tout $(s,t) \in \overline{\Omega} = \Omega \cup C$. Posant $S = \alpha(\Omega)$, on a que S est une nappe régulière. L'ensemble $A \backslash S = \alpha(C)$ est appelé ***bord (géométrique) de*** *A (et de S), et noté $\partial A (= \partial S)$.*

Remarques (1) On peut vérifier que $A \backslash S$ est un chemin fermé dans $\mathbb{R}^3$. Il ne faut pas le confondre avec le bord (topologique) en tant que sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$. Ce dernier est formé par les points de $\mathbb{R}^3$ qui ne sont ni dans l'intérieur de A, ni dans l'intérieur de son complément et donc le bord topologique de A est égal à A lorsque A est une nappe avec un bord. Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ est une représentation paramétrique de $\partial\Omega$, alors $\alpha \circ \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ est une représentation paramétrique de $A \backslash S$.

(2) Le champ continu N_α de normales unitaires sur S engendré par α s'étend à A de manière continue. Ainsi, on peut déterminer une orientation de A, notée (A, N), en choisissant une orientation (S, N) de la nappe S.

(3) Sur une nappe orientée avec bord, il y a une notion d'orientation positive de son bord que l'on peut préciser ainsi. Soient (A, N) une nappe orientée avec bord et soit $\alpha : \overline{\Omega} \to A$ une représentation paramétrique de (A, N) telle que $N = N_\alpha$. Le bord de Ω est un chemin fermé dans $\mathbb{R}^2$. Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ est une représentation paramétrique de $\partial\Omega$ avec l'orientation positive. Alors $\alpha \circ \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ est une représentation paramétrique du bord de A et l'orientation du bord engendrée par cette paramétrisation est appelée positive pour l'orientation N de A. Intuitivement, cette orientation du bord est déterminée de la manière suivante. Lorsqu'on se déplace sur le bord de A dans le sens positif avec sa tête dans la direction de N, la nappe A se trouve à sa gauche.

(4) On peut généraliser cette notion en remplacant la condition (i) par

(i') Ω est un domaine régulier dans $\mathbb{R}^2$.

Dans ce cas, le bord de Ω est $\partial\Omega = \cup_{i=1}^k C_i$ où les C_i sont des chemins fermés et $\partial A = \partial S = \cup_{i=1}^k \alpha(C_i)$ est une réunion de chemins fermés dans $\mathbb{R}^3$. Un champ continu de normales unitaires sur S est défini par

$$N_\alpha(\alpha(s,t)) = \frac{\partial_s\alpha(s,t) \wedge \partial_t\alpha(s,t)}{\|\partial_s\alpha(s,t) \wedge \partial_t\alpha(s,t)\|}$$

et il détermine une des deux orientations de S. L'orientation positive de ∂S relative à N_α est celle engendrée par α et l'orientation positive de $\partial\Omega$. C'est à dire, si $\gamma_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^2$ est une représentation paramétrique du chemin fermé C_i qui engendre l'orientation positive de C_i pour $i = 1$ et l'orientation négative de C_i pour $i \geq 2$, alors l'orientation positive de $\alpha(C_i)$ relative à N_α est celle engendrée par la représentation paramétrique $\alpha \circ \gamma_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^3$.

5.2 Intégration par parties; théorème de Stokes

Soient V un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $u \in C^1(V)$. Pour $A \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$, la dérivée de u au point P suivant le vecteur A est

$$Du(P, A) = \lim_{t \to 0} \frac{u(P + tA) - u(P)}{t} = \langle A, \nabla u(P) \rangle .$$

Considérons maintenant $S \subset V$ une nappe régulière dans $\mathbb{R}^3$ et $N : S \to \mathbb{R}^3$ un champ continu de normales unitaires sur S. Si $A \in N(P)^\perp$, $Du(P, A) = \langle A, \nabla u(P) \rangle$ est une **dérivée tangentielle** de u en P. Rappelons que si $N \in \mathbb{R}^3$ avec $\|N\| = 1$, alors $N^\perp = \{A \wedge N : A \in \mathbb{R}^3\}$. Ainsi, en chaque point P de S, $A \wedge N(P)$ est un vecteur dans une direction du plan tangent à S au point P et donc $\{A \wedge N(P)\} \cdot \nabla u(P) = \langle A \wedge N(P), \nabla u(P) \rangle$ est une dérivée de u en P suivant un vecteur tangent à S en P. Noter que $\{A \wedge N(P)\} \cdot \nabla u(P) = A \cdot \{N(P) \wedge \nabla u(P)\}$ par les propriétés du produit triple.

Théorème 5.2 *Soient V un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $u \in C^1(V)$. Soit (S, N) une nappe orientée avec bord telle que $S \subset V$. Soit $T : \partial S \to \mathbb{R}^3$ le champ de tangentes unitaires sur le chemin fermé ∂S dans le sens de l'orientation positive de ∂S par rapport à N. Alors*

$$\int_S \langle A \wedge N, \nabla u \rangle \, d\sigma = \int_{\partial S} u \, \langle A, T \rangle \, ds \tag{3}$$

pour tout $A \in \mathbb{R}^3$. En particulier, pour $i = 1, 2, 3$,

$$\int_S (N \wedge \nabla u)_i \, d\sigma = \int_{\partial S} u T_i \, ds. \tag{4}$$

Preuve Il suffit d'établir la première formule (7) pour $A = e_i$ où $i = 1, 2, 3$. Considérons le cas $A = e_1 = (1, 0, 0)$, les cas $i = 2, 3$ étant semblables.

Notons d'abord que

$$\langle e_1 \wedge N, \nabla u\rangle = -\langle e_1 \wedge \nabla u, N\rangle = \langle (0, \partial_3 u, -\partial_2 u), N\rangle = N_2\partial_3 u - N_3\partial_2 u$$

Soit $\alpha : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ une représentation paramétrique de S telle que $N_\alpha = N$, où $\Omega = intC$ et C est un chemin fermé dans $\mathbb{R}^2$. Alors,

$$\begin{aligned}
\int_S \langle e_1 \wedge N, \nabla u\rangle \; d\sigma = -\int_S \langle e_1 \wedge \nabla u, N\rangle \; d\sigma \\
&= \int_\Omega \langle (0, \partial_3 u(\alpha(s,t)), -\partial_2 u(\alpha(s,t)), N_\alpha(\alpha(s,t))\rangle \, dsdt \\
&= \int_\Omega \langle (0, \partial_3 u(\alpha(s,t)), -\partial_2 u(\alpha(s,t)), \partial_1\alpha(s,t) \wedge \partial_2\alpha(s,t)\rangle \, dsdt \\
&= \int_\Omega \partial_3 u(\alpha(s,t))\frac{\partial(\alpha_3,\alpha_1)}{\partial(s,t)} - \partial_2 u(\alpha(s,t))\frac{\partial(\alpha_1,\alpha_2)}{\partial(s,t)} dsdt.
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\partial_s u(\alpha(s,t)) &= \partial_1 u(\alpha(s,t))\partial_s\alpha_1(s,t) + \partial_2 u(\alpha(s,t))\partial_s\alpha_2(s,t) + \partial_3 u(\alpha(s,t))\partial_s\alpha_3(s,t) \\
\partial_t u(\alpha(s,t)) &= \partial_1 u(\alpha(s,t))\partial_t\alpha_1(s,t) + \partial_2 u(\alpha(s,t))\partial_t\alpha_2(s,t) + \partial_3 u(\alpha(s,t))\partial_t\alpha_3(s,t)
\end{aligned}$$

et donc, éliminant $\partial_1 u(\alpha(s,t))$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\partial_s u(\alpha(s,t))\partial_t\alpha_1(s,t) - \partial_t u(\alpha(s,t))\partial_s\alpha_1(s,t) \\
&= -\partial_2 u(\alpha(s,t))\frac{\partial(\alpha_1,\alpha_2)}{\partial(s,t)} + \partial_3 u(\alpha(s,t))\frac{\partial(\alpha_3,\alpha_1)}{\partial(s,t)}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\int_S \langle e_1 \wedge N, \nabla u\rangle \; d\sigma = \int_\Omega \partial_s u(\alpha(s,t))\partial_t\alpha_1(s,t) - \partial_t u(\alpha(s,t))\partial_s\alpha_1(s,t) dsdt$$

Admettant que $\alpha \in C^2(\overline{\Omega})$, on peut intégrer par parties sur Ω et on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \partial_s u(\alpha(s,t))\partial_t\alpha_1(s,t) - \partial_t u(\alpha(s,t))\partial_s\alpha_1(s,t) dsdt \\
&= \int_{\partial\Omega} [u\circ\alpha]\partial_2\alpha_1 n_1 - [u\circ\alpha]\partial_1\alpha_1 n_2 ds \\
&- \int_\Omega u(\alpha(s,t))\partial_s\partial_t\alpha_1(s,t) - u(\alpha(s,t))\partial_t\partial_s\alpha_1(s,t) dsdt \\
&= \int_{\partial\Omega} [u\circ\alpha]\{\partial_2\alpha_1 n_1 - \partial_1\alpha_1 n_2\} ds, \text{ car } \partial_s\partial_t\alpha_1 = \partial_t\partial_s\alpha_1,
\end{aligned}$$

où $n : \partial\Omega \to \mathbb{R}^2$ est le champ de normales unitaires extérieures sur $\partial\Omega$. (Le cas où α n'est pas de classe C^2 sur $\overline{\Omega}$, peut être traité par approximation.) Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ une représentation paramétrique de $\partial\Omega$ avec l'orientation positive et posons $\beta(u) = \alpha \circ \gamma(u)$. Alors $n(u) = (\gamma_2'(u), -\gamma_1'(u))/\left\|\gamma'(u)\right\|$ et $\beta'(u) = \partial_1\alpha(\gamma(u))\gamma_1'(u) + \partial_2\alpha(\gamma(u))\gamma_2'(u)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega} [u \circ \alpha]\{\partial_2\alpha_1 n_1 - \partial_1\alpha_1 n_2\} ds \\
&= \int_a^b [u \circ \alpha \circ \gamma(u)]\{\partial_2\alpha_1(\gamma(u))\gamma_2'(u) + \partial_1\alpha_1(\gamma(u))\gamma_1'(u)\} du \\
&= \int_a^b u(\beta(u))\beta_1'(u) du = \int_{\partial S} u T_1 ds
\end{aligned}$$

car $\beta : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ est une représentation paramétrique de ∂S et $T = T_\beta$. En résumé, on a montré que

$$\int_S \langle e_1 \wedge N, \nabla u\rangle \; d\sigma = \int_{\partial S} u T_1 ds$$

pour autant que $\alpha \in C^2(\overline{\Omega})$.

Exemple 1 (**un tronc de cône**) Soient $0 < a < b < \infty$,

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : a < r = \sqrt{s^2+t^2} < b\} \text{ et} \\
g(s,t) &= \sqrt{s^2+t^2} - a.
\end{aligned}$$

On a déjà vu que le graphe de la fonction $g : \Omega \to \mathbb{R}$ a la forme d'un tronc de cône. En fait, $S = \alpha(\Omega)$ est une nappe régulière et une représentation paramétrique régulière de S est donnée par la fonction

$$\alpha : \Omega \to \mathbb{R}^3 \text{ définie par } \alpha(s,t) = (s,t,g(s,t)).$$

Notons que Ω est un domaine régulier dans $\mathbb{R}^2$ et que $\partial\Omega = C_1 \cup C_2$ où C_1, C_2 sont des cercles

$$C_1 = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : s^2+t^2 = b^2\} \text{ et } C_2 = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : s^2+t^2 = a^2\}.$$

Donc le bord de S est $\partial S = \alpha(C_1) \cup \alpha(C_2)$ et donc ∂S est aussi la réunion de deux cercles

$$\alpha(C_1) = \{(s,t,b-a) \in \mathbb{R}^3 : s^2+t^2 = b^2\} \text{ et } \alpha(C_2) = \{(s,t,0) \in \mathbb{R}^3 : s^2+t^2 = a^2\}.$$

D'autre part,

$$\partial_s\alpha(s,t)\wedge\partial_t\alpha(s,t) = (-\frac{s}{r}, -\frac{t}{r}, 1), \qquad \|\partial_s\alpha(s,t)\wedge\partial_t\alpha(s,t)\| = \sqrt{2}$$

et donc $N_\alpha(\alpha(s,t)) = (-\frac{s}{r}, -\frac{t}{r}, 1)/\sqrt{2}$.

Selon notre définition, l'orientation positive de $\partial\Omega$ consiste à traiter le chemin fermé C_1 avec son orientation positive et C_2 avec son orientation négative. Des représentations paramétriques appropriées sont

$\gamma_1(\theta) = b(\cos\theta, \sin\theta)$ et $\gamma_2(\theta) = a(\cos\theta, -\sin\theta)$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$, respectivement.

L'orientation de $\partial S = \alpha(C_1)\cup\alpha(C_2)$ qui est positive relative à N_α est donc engendrée par les représentations paramétriques $\alpha\circ\gamma_1$ et $\alpha\circ\gamma_2$ de $\alpha(C_1)$ et $\alpha(C_2)$, respectivement. Les champs de tangentes unitaires correspondants sont

$$T^1 : \alpha(C_1) \to \mathbb{R}^3 \text{ où } T^1(s,t,b-a) = (-t,s,0)/b \text{ pour } (s,t)\in C_1,$$
$$T^2 : \alpha(C_2) \to \mathbb{R}^3 \text{ où } T^2(s,t,0) = (t,-s,0)/a \text{ pour } (s,t)\in C_2.$$

La formule (7) s'écrit

$$\begin{aligned}\int_S \langle A\wedge N, \nabla u\rangle \, d\sigma &= \int_{\partial S} u\,\langle A, T\rangle \, ds \\ &= \int_{\alpha(C_1)} u\left\langle A, T^1\right\rangle \, ds + \int_{\alpha(C_2)} u\left\langle A, T^2\right\rangle \, ds \\ &= \int_0^{2\pi} u(b\cos\theta, b\sin\theta, b-a)\{-A_1\sin\theta + A_2\cos\theta\} b d\theta \\ &+ \int_0^{2\pi} u(a\cos\theta, a\sin\theta, 0)\{A_1\sin\theta - A_2\cos\theta\} a d\theta.\end{aligned}$$

Exemple 2 (**un tronc de cylindre**) Soient $0 < a < b < \infty$,

$$\Omega = \{(s,t)\in\mathbb{R}^2 : a < r = \sqrt{s^2+t^2} < b\} \text{ et}$$
$$\alpha(s,t) = (\frac{as}{r}, \frac{at}{r}, r-a).$$

En posant $S = \alpha(\Omega)$, on constate que

$$S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = a \text{ et } 0 < z < b-a\}$$

est une partie de longueur $b-a$ d'un cylindre de rayon a. Cette fois, $\partial S = \alpha(C_1) \cup \alpha(C_2)$ est aussi la réunion de deux cercles de rayon a,

$$\alpha(C_1) = \{(\frac{as}{b}, \frac{at}{b}, b-a) \in \mathbb{R}^3 : s^2+t^2 = b^2\} \text{ et } \alpha(C_2) = \{(s,t,0) \in \mathbb{R}^3 : s^2+t^2 = a^2\}$$

où les cercles C_i sont les mêmes que dans l'exemple précédant. D'autre part,

$$N_\alpha(\alpha(s,t)) = -\frac{1}{r}(s,t,0).$$

Les champs de tangentes unitaires correspondants à l'orientation de ∂S qui est positive relative à N_α sont

$T^1 : \alpha(C_1) \to \mathbb{R}^3$ où $T^1(x,y,b-a) = (-y,x,0)/a$ pour $(x,y,b-a) \in \alpha(C_1)$,
$T^2 : \alpha(C_2) \to \mathbb{R}^3$ où $T^2(x,y,0) = (t,-s,0)/a$ pour $(x,y,0) \in \alpha(C_2)$.

La formule du théorème s'écrit

$$\begin{aligned}
\int_S \langle A \wedge N, \nabla u \rangle \, d\sigma &= \int_{\partial S} u \langle A, T \rangle \, ds \\
&= \int_{\alpha(C_1)} u \left\langle A, T^1 \right\rangle \, ds + \int_{\alpha(C_2)} u \left\langle A, T^2 \right\rangle \, ds \\
&= \int_0^{2\pi} u(a\cos\theta, a\sin\theta, b-a)\{-A_1 \sin\theta + A_2 \cos\theta\} a d\theta \\
&+ \int_0^{2\pi} u(a\cos\theta, a\sin\theta, 0)\{A_1 \sin\theta - A_2 \cos\theta\} a d\theta.
\end{aligned}$$

Le Théorème de Stokes établit une relation analogue dans le contexte des champs vectoriels. La notion de rotationnel d'un champ vectoriel permet de cerner les dérivées dans des directions perpendiculaires à une direction donnée.

Notons que, pour $N \in \mathbb{R}^3$ avec $\|N\| = 1$,

$$\begin{aligned}
&\langle N, \nabla \wedge f \rangle \\
&= N \cdot (\nabla \wedge f) = N_1\{\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2\} + N_2\{\partial_3 f_1 - \partial_1 f_3\} + N_3\{\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1\} \\
&= \langle (0, -N_3, N_2), \nabla f_1 \rangle + \langle (N_3, 0, -N_1), \nabla f_2 \rangle + \langle (-N_2, N_1, 0), \nabla f_3 \rangle \\
&= \langle e_1 \wedge N, \nabla f_1 \rangle + \langle e_2 \wedge N, \nabla f_2 \rangle + \langle e_3 \wedge N, \nabla f_3 \rangle \qquad (*)
\end{aligned}$$

et $(0,-N_3,N_2),(N_3,0,-N_1),(-N_2,N_1,0)\in N^\perp$. Ainsi, $\langle N,\nabla\wedge f\rangle$ peut être exprimé comme une somme de dérivées directionnelles des composantes f_i dans des directions perpendiculaires à N.
Remarque Notons que la notation $\nabla\wedge f$ est souvent étendue aux champs vectoriels $f\in C^1(\Omega,\mathbb{R}^2)$ où Ω est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$ de la manière suivante. On plonge $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ en posant

$$V=\Omega\times\mathbb{R} \text{ et } F(x,y,z)=(f_1(x,y),f_2(x,y),0) \text{ pour } (x,y,z)\in V.$$

Alors $\nabla\wedge F(x,y,z)=(0,0,\partial_1 f_2(x,y)-\partial_2 f_1(x,y))$ et donc il est déterminé par l'expression $\partial_1 f_2(x,y)-\partial_2 f_1(x,y)$. On simplifie la notation en posant

$$\nabla\wedge f(x,y)=\partial_1 f_2(x,y)-\partial_2 f_1(x,y).$$

Noter que dans ce cas,

$$f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \text{ mais } \nabla\wedge f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}.$$

On peut maintenant énoncer le résultat principal.

Théorème 5.3 *(de Stokes) Soient V un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $f\in C^1(V,\mathbb{R}^3)$. Soit (S,N) une nappe orientée avec bord telle que $S\subset V$. Soit $T:\partial S\to\mathbb{R}^3$ le champ de tangentes unitaires sur le chemin fermé ∂S dans le sens de l'orientation positive de ∂S par rapport à N. Alors*

$$\int_S \langle\nabla\wedge f,N\rangle\ d\sigma=\int_{\partial S}\langle f,T\rangle\ ds.$$

Cette formule s'écrit aussi sous la forme

$$\int_{(S,N)}\nabla\wedge f\cdot d\sigma=\int_{(\partial S,T)} f\cdot dl$$

ou encore

$$\begin{aligned}&\int_{(S,N)}(\nabla\wedge f)_1\ dy\wedge dz+(\nabla\wedge f)_2\ dz\wedge dx+(\nabla\wedge f)_3\ dx\wedge dy\\ &=\int_{\overrightarrow{\partial S}} f_1\ dx+f_2\ dy+f_3\ dz\end{aligned}$$

où $\overrightarrow{\partial S}$ signifie que le chemin fermé ∂S est considéré avec l'orientation positive par rapport à N.

Le Théorème de Stokes affirme que:
"le flux du rotationnel de f à travers S dans le sens de N" = "la circulation de f sur le bord de S dans le sens qui est positif par rapport à N".
Preuve du théorème On a déjà noté que

$$\langle \nabla \wedge f, N \rangle = \langle e_1 \wedge N, \nabla f_1 \rangle + \langle e_2 \wedge N, \nabla f_2 \rangle + \langle e_3 \wedge N, \nabla f_3 \rangle$$

et donc, en utilisant le théorème précédent, on trouve que

$$\int_S \langle \nabla \wedge f, N \rangle \ d\sigma = \sum_{i=1}^{3} \int_S \langle e_i \wedge N, \nabla f_i \rangle \ d\sigma = \sum_{i=1}^{3} \int_{\partial S} f_i T_i \ ds = \int_{\partial S} \langle f, T \rangle \ ds.$$

Remarques Dans le cas où la nappe S se trouve dans le plan $z = 0$ et $f(x, y, z) = (f_1(x, y), f_2(x, y), 0)$ on retrouve le Théorème de Green. En effet,

$$\nabla \wedge f = (0, 0, \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)$$

on peut choisir $N \equiv (0, 0, 1)$. Alors $\langle \nabla \wedge f, N \rangle = \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1$ et

$$\int_S \langle \nabla \wedge f, N \rangle \ d\sigma = \int_\Omega \{\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1\} \ dxdy,$$

où $\Omega = int \partial S$ dans le plan $z = 0$, tandis que

$$\int_{\partial S} \langle f, T \rangle \ ds = \int_{\overrightarrow{\partial S}} f_1 \ dx + f_2 \ dy + f_3 \ dz = \int_{\overrightarrow{\partial \Omega}} f_1 \ dx + f_2 \ dy$$

où $\overrightarrow{\partial \Omega}$ signifie l'orientation positive de $\partial \Omega$ dans le plan.

A partir de ces théorèmes on peut établir des formules d'intégration par parties sur une surface.

Corollaire 5.4 *Soient V un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^3$. Soit (S, N) une nappe orientée avec bord telle que $S \subset V$. Soit $T : \partial S \to \mathbb{R}^3$ le champ de tangentes unitaires sur le chemin fermé ∂S dans le sens de l'orientation positive de ∂S par rapport à N. Alors,*
(i) pour $u, v \in C^1(V)$,

$$\int_S v \langle A \wedge N, \nabla u \rangle \ d\sigma = \int_{\partial S} uv \langle A, T \rangle \ ds - \int_S u \langle A \wedge N, \nabla v \rangle \ d\sigma \textit{ pour tout } A \in \mathbb{R}^3. \tag{5}$$

(ii) Pour $u \in C^1(V)$ *et* $f \in C^1(V, \mathbb{R}^3)$,

$$\int_S \langle f \wedge N, \nabla u \rangle \; d\sigma = \int_{\partial S} u \langle f, T \rangle \; ds - \int_S u \langle \nabla \wedge f, N \rangle \; d\sigma \tag{6}$$

Preuve Pour obtenir la deuxième formule, il suffit de remplacer u par le produit uv dans la première. Pour ce qui concerne la formule (4), on peut remplacer f par le produit uf dans la formule de Stokes et on obtient

$$\int_S \langle \nabla \wedge (uf), N \rangle \, d\sigma = \int_{\partial S} \langle uf, T \rangle \; ds.$$

Or $\nabla \wedge (uf) = (\nabla u) \wedge f + u(\nabla \wedge f)$ et

$$\begin{aligned} \langle \nabla \wedge (uf), N \rangle &= \langle (\nabla u) \wedge f, N \rangle + \langle u(\nabla \wedge f), N \rangle \\ &= \langle f \wedge N, \nabla u \rangle + u \langle \nabla \wedge f, N \rangle \end{aligned}$$

par les propriétés du produit triple. Donc

$$\begin{aligned} \int_S \langle f \wedge N, \nabla u \rangle \, d\sigma + \int_S u \langle \nabla \wedge f, N \rangle \, d\sigma &= \int_S \langle \nabla \wedge (uf), N \rangle \, d\sigma \\ &= \int_{\partial S} \langle uf, T \rangle \; ds = \int_{\partial S} u \langle f, T \rangle \; ds \end{aligned}$$

ce qui établit la formule.

5.3 Compléments

On peut traiter d'autres types de surfaces qui ne sont pas forcément des nappes orientées avec bord par découpage approprié.
Exemple 3 (**une sphère**) Soit

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Alors S n'est pas une nappe avec bord mais il existe deux nappes avec bord S_1 et S_2 telles que

$$S = S_1 \cup S_2 \text{ et } S_1 \cap S_2 \subset (\partial S_1) \cap (\partial S_2).$$

Par exemple, on peut choisir

$$S_1 = \{(x, y, z) \in S : z \geq 0\} \text{ et } S_2 = \{(x, y, z) \in S : z \leq 0\}.$$

Soit $N(x,y,z) = (x,y,z)$. Alors $N : S \to \mathbb{R}^3$ est un champ de normales unitaires sur S, orienté vers l'exptérieur de S. Alors (S_i, N) est une nappe orientée avec bord. En effet, une représentation paramétrique de S_1 est donnée par

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \text{ et la fonction } \alpha : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$$

définie par

$$\alpha(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}(2x, 2y, 1-x^2-y^2).$$

De plus, $N_\alpha = N$ sur S_1. (Pour vérifier ceci, il suffit de vérifier que $N_\alpha(\alpha(0,0)) = (0,0,1)$.) Le bord de S_1 est le cercle $C = \{(x,y,0) : x^2+y^2 = 1\}$ et son orientation positive relative à N est celle engendrée par la représentation paramétrique $\alpha \circ \gamma_1$ où $\gamma_1 = (\cos\theta, \sin\theta)$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$. Donc le champ de tangents unitaires sur C associé à cette orientation est $T^1 : C \to \mathbb{R}^3$ où $T^1(x,y,0) = (-y,x,0)$ car $\alpha \circ \gamma_1(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ et $T^1(\alpha \circ \gamma_1(\theta)) = (\alpha \circ \gamma_1)'(\theta) / \|(\alpha \circ \gamma_1)'(\theta)\| = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$.

Ensuite, la fonction $\beta : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, définie par

$$\beta(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}(2x, 2y, -1+x^2+y^2)$$

est une représentation paramétrique de S_2 et on constate que $N_\beta(\beta(0,0)) = (0,0,1) = -N(0,0,-1)$. Donc$N_\beta = -N$ sur S_2. De plus, $\partial S_2 = C$ et une représentation paramétrique de C avec l'orientation qui est positive relative à N_β est $\beta \circ \gamma_1 = \alpha \circ \gamma_1$ car $\beta = \alpha$ sur $\partial\Omega$. Comme on a déjà vu, le champ de tangentes unitaires sur C associé à cette orientation est $T^1 : C \to \mathbb{R}^3$. Donc le champ de tangentes unitaires sur C associé à orientation qui est positive relative à $N = -N_\beta$ est $T^2 = -T^1$.

Appliquant le Théorème de Stokes sur les nappes S_i séparément et puis additionnant les formules, on obtient

$$\begin{aligned}\int_S \langle \nabla \wedge f, N \rangle \, d\sigma &= \int_{(\partial S_1, T^1)} f \cdot dl + \int_{(\partial S_2, T^2)} f \cdot dl \\ &= \int_{(C, T^1)} f \cdot dl - \int_{(C, T^1)} f \cdot dl = 0.\end{aligned}$$

Remarque La sphère est un exemple d'une **surface fermée**, c'est à dire son bord géométrique est vide. Pour de telles surfaces, le flux d'un rotationnel est toujours nul. Le bord d'un domaine régulier dans $\mathbb{R}^3$ dans le sens du théorème de la divergence a cette propriété.

Soulignons qu'il existe des surfaces qui ne peuvent pas être traitées de cette façon car on ne peut pas choisir les orientations des parties de façon cohérente. Voici l'exemple le plus célebre de cette situation.

Exemple 3 (une **bande de Möbius**) Considérons $b > a > 0$,

$$\Omega = (-a, a) \times (0, 2\pi) \text{ et } \alpha : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3 \text{ où}$$
$$\alpha(s,t) = ((b + as\cos\frac{t}{2})\cos t, (b + as\cos\frac{t}{2})\sin t, as\sin\frac{t}{2}).$$

On peut vérifier que $\alpha(\Omega)$ est une nappe régulière et donc N_α est un champ continu de normales unitaires sur $\alpha(\Omega)$. Par contre α n'est pas injectif sur $\overline{\Omega}$. En fait, $\alpha(s, 0) = \alpha(-s, 2\pi)$ pour tout $s \in [-a, a]$. De plus, $N_\alpha : \alpha(\Omega) \to \mathbb{R}^3$ n'admet aucun prolongement continu sur $\alpha(\overline{\Omega})$ car

$$\lim_{t\to 0+} N_\alpha(\alpha(s,t)) = -\lim_{t\to 2\pi-} N_\alpha(\alpha(s,t)) \text{ pour tout } s \in (-a, a).$$

Dans ce cas $S = \alpha(\overline{\Omega})$ n'est pas une nappe orientée avec bord. En fait, S est une surface n'ayant qu'un seul côté, appelée **bande (ou ruban) de Möbius**. Cependant, il existe deux nappes avec bord S_1 et S_2 telles que

$$S = S_1 \cup S_2 \text{ et } S_1 \cap S_2 \subset (\partial S_1) \cap (\partial S_2).$$

Il suffit de poser

$$\Omega_1 = (-a, a) \times (0, \pi) \text{ et } \Omega_1 = (-a, a) \times (\pi, 2\pi)$$

et puis de définir $S_1 = \alpha(\overline{\Omega_1})$ et $S_2 = \alpha(\overline{\Omega_2})$. Par contre on ne peut pas choisir des champs continus de normales unitaires sur S_1 et S_2 de manière cohérente pour S. Lorsque l'on introduit des orientations des parties S_1 et S_2 et puis qu'on somme les flux correspondants, le résultat dépend du découpage choisi. Donc la notion de flux d'un champ vectoriel à travers S n'est pas bien posée.

6 Le théorème de la divergence

<u>**But**</u> Etablir les formules d'intégration par parties pour des régions ouvertes dans $\mathbb{R}^3$.

On commence par introduire une classe de sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ analogues aux domaines réguliers dans le plan.

Définition 6.1 *Un sous-ensemble V de $\mathbb{R}^3$ est appelé **domaine régulier** lorsque V est un sous-ensemble ouvert, borné et connexe et son bord ∂V à les propriétés suivantes.*

(a) Il existe un nombre fini de nappes avec bord $S_1, ..., S_k$ telles que

$$\partial V = \cup_{i=1}^{k} S_i \text{ et } S_i \cap S_j \subset (\partial S_i) \cap (\partial S_j) \text{ pour tout } i \neq j.$$

(b) Pour chaque $i = 1, ..., k$ il y a une orientation (S_i, N^i) de S_i telle que, pour tout $x \in S_i \backslash \partial S_i$, il existe $\varepsilon(x) > 0$ tel que

$$x - tN^i(x) \in V \text{ et } x + tN^i(x) \notin V \text{ pour tout } t \in (0, \varepsilon(x)).$$

Un champ vectoriel $N : \partial V \to \mathbb{R}^3$ tel que $N(x) = N^i(x)$ pour tout $x \in \cup_{i=1}^{k} S_i \backslash \partial S_i$ est appelé **champ de normales unitaires extérieures sur** ∂V. Noter que les valeurs de N sur $\cup_{i=1}^{k} \partial S_i$ ne sont pas spécifiées.
La partie (b) de la définition assure que V ne se trouve que d'un seul côté de ∂V.
Remarque Si V est un domaine régulier dans $\mathbb{R}^3$ et $f \in C^1(\overline{V}, \mathbb{R}^3)$ on peut déduire du Théorème de Stokes que

$$\int_{\partial V} \langle \nabla \wedge f, N \rangle \, d\sigma = \sum_{i=1}^{k} \int_{S_i} \left\langle \nabla \wedge f, N^i \right\rangle \, d\sigma = 0.$$

Exemples Notons que la sphère $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$, le cube $V_2 = (0, 1)^3$ ainsi que la région

$$V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 2\}$$

sont des domaines réguliers dans $\mathbb{R}^3$ tandis que

$$V_4 = V_1 \backslash \{(x, y, 0) : y \leq 0\}$$

ne l'est pas. La région V_4 est ouverte, bornée et connexe et elle vérifie la condition (a) de la définition mais pas la condition (b).

Définition 6.2 *Soient Ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$.* ***La divergence de*** *f au point (x, y, z) est l'expression*

$$\sum_{i=1}^{3} \partial_i f(x, y, z), \text{ notée } \nabla \cdot f(x, y, z) \text{ ou } div f(x, y, z).$$

Théorème 6.3 *(de la divergence, de Gauss/Ostrogradsky) Soient V un domaine régulier dans $\mathbb{R}^3$ et $N : \partial V \to \mathbb{R}^3$ le champ de normales unitaires extérieures à V.*

$$(1) \int_V \partial_i \varphi \; dxdydz = \int_{\partial V} \varphi N_i \; d\sigma \text{ pour } i = 1, 2, 3$$

pour tout $\varphi \in C^1(\overline{V})$.

$$(2) \int_V v \partial_i u \; dxdydz = \int_{\partial V} uvN_i \; d\sigma - \int_V u \partial_i v \; dxdydz \text{ pour } i = 1, 2, 3$$

pour tout $u, v \in C^1(\overline{V})$.

$$(3) \int_V \nabla \cdot f \; dxdydz = \int_{\partial V} \langle f, N \rangle \; d\sigma$$

pour tout $f \in C^1(\overline{V}, \mathbb{R}^3)$.

Il suffit de démontrer la formule (3). Posant $f = \varphi e_i$ dans (3), on obtient (1). Posant $\varphi = uv$ dans (1), on obtient (2). On va établir la formule (3) pour des régions plus simples. Ensuite le cas général peut être abordé par découpage et rotation.

Lemme 6.4 *Soient C un chemin fermé dans $\mathbb{R}^2$ et $D = (intC) \cup C$. Soient $\varphi, \psi \in C^1(D)$ telles que $\varphi < \psi$ sur $intC$ et $\{(x, y) \in C : \varphi(x, y) = \psi(x, y)\}$ est la réunion d'un nombre fini de points et de chemins. Considérons le domaine régulier dans $\mathbb{R}^3$,*

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in intC \text{ et } \varphi(x, y) < z < \psi(x, y)\}.$$

Soient $N : \partial V \to \mathbb{R}^3$ le champ de normales unitaires extérieures à V. Alors

$$\int_V \nabla \cdot f \; dxdydz = \int_{\partial V} \langle f, N \rangle \; d\sigma$$

pour tout $f \in C^1(\overline{V}, \mathbb{R}^3)$.

Preuve Notons que $\partial V = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ où

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x,y,\varphi(x,y)) : (x,y) \in D\} \\ S_2 &= \{(x,y,\psi(x,y)) : (x,y) \in D\} \\ S_3 &= \{(\gamma_1(u),\gamma_2(u),z) : u \in [a,b] \text{ et } \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y) \end{aligned}$$

où $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ est une représentation paramétrique de C. Donc $\gamma \in C([a,b]), \gamma(a) = \gamma(b)$ et il y a une partition $\{t_i : i = 1,...,k\}$ de $[a,b]$ telle que $\gamma \in C^1([t_i,t_{i+1}])$. On peut supposer que $\{1,...,k-1\} = A \cup B$ où $\varphi(\gamma(u)) < \psi(\gamma(u))$ pour tout $u \in (t_i,t_{i+1})$ si $i \in A$ et $\varphi(\gamma(u)) = \psi(\gamma(u))$ pour tout $u \in (t_i,t_{i+1})$ si $i \in B$. Pour $i \in A$ on pose

$$\Omega_i = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : t_i < u < t_{i+1} \text{ et } \varphi(\gamma(u)) < v < \psi(\gamma(u))\}$$

et en définissant $\alpha^i : \overline{\Omega_i} \to \mathbb{R}^3$ par

$$\alpha^i(u,v) = (\gamma_1(u),\gamma_2(u),v),$$

on voit que $\alpha^i(\overline{\Omega_i})$ est une nappe avec bord. Ainsi

$$\partial V = S_1 \cup S_2 \cup \cup_{i\in A}\alpha^i(\overline{\Omega_i})$$

et

$$N(x,y,\varphi(x,y)) =$$
$$\begin{cases} (\partial_1\varphi(x,y),\partial_2\varphi(x,y),-1)/\sqrt{1+\partial_1\varphi(x,y)^2+\partial_2\varphi(x,y)^2} & \text{sur } S_1\backslash\partial S_1 \\ -(\partial_1\psi(x,y),\partial_2\psi(x,y),-1)/\sqrt{1+\partial_1\psi(x,y)^2+\partial_2\psi(x,y)^2} & \text{sur } S_2\backslash\partial S_2 \\ (\gamma_2'(u),-\gamma_1'(u),0)/\sqrt{\gamma_1'(u)^2+\gamma_2'(u)^2} & \text{sur } \alpha^i(\Omega). \end{cases}$$

Maintenant on voit que

$$\begin{aligned} \int_V \partial_3 f_3 \, dxdydz &= \int_D \{\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z)\, dz\} dxdy \\ &= \int_D \{f_3(x,y,\psi(x,y)) - f_3(x,y,\varphi(x,y))\} dxdy \end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} f_3 N_3 \, d\sigma &= \sum_{i=1}^{2} \int_{S_i} f_3 N_3 \, d\sigma \text{ car } N_3 = 0 \text{ sur } \alpha^i(\Omega) \\ &= \int_D \{f_3(x,y,\psi(x,y)) - f_3(x,y,\varphi(x,y))\} dxdy. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_{\partial V} f_3 N_3 \; d\sigma = \int_V \partial_3 f_3 \; dxdydz. \qquad ((1))$$

Notons que pour obtenir ce résultat on a utilisé seulement les propriétés que $f_3 \in C(\overline{V})$, que $\partial_3 f_3$ existe et que $\partial_3 f_3 \in C(\overline{V})$. Il reste à montrer que

$$\int_V \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 \; dxdydz = \int_{\partial V} f_1 N_1 + f_2 N_2 \; d\sigma$$

et on va déduire ceci de ce qui est déjà établi en introduisant les fonctions auxiliaires

$$F(x,y,z) = (\int_{\varphi(x,y)}^{z} f_2(x,y,t)dt, -\int_{\varphi(x,y)}^{z} f_1(x,y,t)dt, 0)$$

et

$$G(x,y,z) = (0, 0, \frac{\partial}{\partial x}\int_{\varphi(x,y)}^{z} f_1(x,y,t)dt + \frac{\partial}{\partial y}\int_{\varphi(x,y)}^{z} f_2(x,y,t)dt)$$

On vérifie facilement que $G \in C(\overline{V}, \mathbb{R}^3)$, que $\partial_3 G_3$ existe et que $\partial_3 G_3 \in C(\overline{V})$. En fait,

$$\partial_3 G_3 = \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2$$

Par la formule (1) appliquée à G, on sait que

$$\int_V \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 \; dxdydz = \int_V \partial_3 G_3 \; dxdydz = \int_{\partial V} G_3 N_3 \; d\sigma.$$

D'autre part, $F \in C^1(\overline{V}, \mathbb{R}^3)$ et

$$\nabla \wedge F(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), -G_3(x,y,z)).$$

Or, par le Théorème de Stokes,

$$\int_{\partial V} \langle \nabla \wedge F, N \rangle \; d\sigma = 0$$

montrant que

$$\int_{\partial V} f_1 N_1 + f_2 N_2 \; d\sigma = \int_{\partial V} G_3 N_3 \; d\sigma = \int_V \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 \; dxdydz.$$

Utilisant la formule (1), on obtient

$$\int_{\partial V} f_1 N_1 + f_2 N_2 + f_3 N_3 \; d\sigma = \int_V \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \partial_3 f_3 \; dxdydz,$$

c'est à dire la forme de Gauss.

7 Champs qui dérivent d'un potentiel

<u>But</u>: Etudier des situations où un champ vectoriel peut être exprimé comme la dérivée d'une fonction. Il y a deux cas importants.
(1) Soient Ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Existe–t-il une fonction $\varphi \in C^1(\Omega)$ telle que $f = \nabla\varphi$ sur Ω ? En ce cas, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ est un **potentiel (scalaire)** pour f sur Ω.
(2) Soient Ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Existe–t-il un champ vectoriel $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ tel que $f = \nabla \wedge g$ sur Ω ? En ce cas, $g : \Omega \to \mathbb{R}^3$ est un **potentiel vecteur** pour f sur Ω.

7.1 Potentiel scalaire

Soient Ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^N)$. On peut traiter séparément les composantes connexes de Ω. Donc dans la suite on supposera que Ω est connexe. Dans ce cas, un potentiel de f sur Ω est unique à une constante additive près.

Lorsque $N = 1$, Ω est un intervalle ouvert et un potentiel de f sur Ω est simplement une primitive de f. Donc il suffit de choisir $a \in \Omega$ et puis de poser

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ pour } x \in \Omega.$$

Dans la suite on supposera que $N \geq 2$.

Commençons par deux observations importantes

Lemme 7.1 *Soit Ω un sous-ensemble ouvert et connexe de $\mathbb{R}^N$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ un champ vectoriel continu qui dérive d'un potentiel φ sur Ω.*

(1) Pour un chemin $\overrightarrow{C}$ allant de p vers q tel que $C \subset \Omega$,

$$\int_{\overrightarrow{C}} f.dl = \varphi(q) - \varphi(p). \tag{7}$$

(2) Si $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, alors $\nabla f(x)$ est une matrice symétrique pour tout $x \in \Omega$. C'est à dire,

$$\partial_i f_j(x) = \partial_j f_i(x) \text{ pour } 1 \leq i, j \leq N.$$

Remarque Dans le cas $N = 3$, la matrice $\nabla f(x)$ est symétrique $\Longleftrightarrow$ $\nabla \wedge f(x) = 0$. Un champ vectoriel ayant la propriété que $\nabla \wedge f(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$ est dit **irrotationnel** sur Ω.
Preuve (1) Soit $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ une représentation paramétrique d'un chemin C tel que $C \subset \Omega$ et $\alpha(a) = p$ et $\alpha(b) = q$. Alors

$$\int_{\overrightarrow{C}} f.dl = \int_a^b \langle f(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle \, dt = \int_a^b \langle \nabla\varphi(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle \, dt$$

car $f = \nabla\varphi$. Or,

$$\frac{d}{dt}\varphi(\alpha(t)) = \langle \nabla\varphi(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle$$

et donc

$$\int_{\overrightarrow{C}} f.dl = \int_a^b \frac{d}{dt}\varphi(\alpha(t))dt = \varphi(\alpha(b)) - \varphi(\alpha(a)) = \varphi(q) - \varphi(p).$$

(2) Rappelons que, si $\varphi \in C^2(\Omega)$, alors $\partial_i\partial_j\varphi = \partial_j\partial_i\varphi$ pour tout $i, j = 1, ..., N$. Comme $f_i = \partial_i\varphi$ pour tout $i = 1, ..., N$ et $f_i \in C^1(\Omega)$, on voit que $\varphi \in C^2(\Omega)$. Donc,

$$\partial_i f_j(x) = \partial_i\partial_j\varphi = \partial_j\partial_i\varphi = \partial_j f_i(x) \text{ pour } 1 \leq i, j \leq N.$$

Exemple Il découle de la partie (2) du lemme que beaucoup de champs f ne dérivent pas d'un potentiel. Par exemple, le champ $f(x, y) = (0, x)$ ne dérive pas d'un potentiel sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ car $\partial_1 f_2(x, y) - \partial_2 f_1(x, y) = 1$ pour tout (x, y) sur $\mathbb{R}^2$.

Théorème 7.2 *Soient Ω un sous-ensemble ouvert et connexe de $\mathbb{R}^N$ et $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^N)$.*
(1) f dérive d'un potentiel sur Ω

$$\Longleftrightarrow \qquad \int_{\overrightarrow{C}} f \cdot dl = \int_{\overrightarrow{D}} f \cdot dl$$

lorsque $\overrightarrow{C}$ et $\overrightarrow{D}$ sont deux chemins allant de p vers q (*)
tels que $C \cup D \subset \Omega$ et ceci quels que soient p et $q \in \Omega$ avec $p \neq q$.

(2) Soit a un point de Ω. Si f dérive d'un potentiel sur Ω, un potentiel est donné par

$$\varphi(x) = \int_{\overrightarrow{C(x)}} f \cdot dl \text{ pour } x \neq a \quad \text{ et } \varphi(a) = 0$$

où $\overrightarrow{C(x)}$ est un chemin allant de a vers x tel que $C(x) \subset \Omega$.
(3) Si φ et ψ sont deux potentiels pour f sur Ω, alors il existe une constante K telle que

$$\psi(x) = \varphi(x) + K \textit{ pour tout } x \in \Omega$$

Remarques 1 Un champ vectoriel ayant la propriété (*) est dit **conservatif sur** Ω. On peut démontrer que la propriété (*) est équivalente à la propriété suivante :

$$\int_{\overrightarrow{C}} f \cdot dl = 0 \text{ pour tout chemin fermé tel que } C \subset \Omega. \qquad (**)$$

2 Si l'ensemble Ω a la propriété qu'il existe un point $a \in \Omega$ tel que

$$[a, x] = \{tx + (1-t)a : 0 \leq t \leq 1\} \subset \Omega \text{ pour tout } x \in \Omega,$$

on dit que Ω est **étoilé par rapport à** a. En ce cas, un potentiel pour f sur Ω est donné par la formule

$$\varphi(x) = \int_0^1 \langle f(tx + (1-t)a), x - a \rangle \, dt \qquad (3)$$

car on peut choisir $C(x) = [a, x]$ dans la partie (2) et utiliser la représentation paramétrique $\alpha(t) = tx + (1-t)a$.

La partie (1) donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ vectoriel dérive d'un potentiel mais la partie suffisante n'est pas forcément facile à vérifier. Lorsque le champ est dérivable, la symétrie de $\nabla f(x)$ pour tout x dans la région Ω est une condition nécessaire qui est facile à contrôler. En général, cette propriété de f n'est pas suffisante pour assurer que f dérive d'un potentiel sur Ω.
Exemple Considérons $\Omega = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ et le champ vectoriel

$$f : \Omega \to \mathbb{R}^2 \text{ défini par } f(x, y) = (-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}).$$

On voit que

$$f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2) \text{ et que } \partial_1 f_2 = \partial_2 f_1 \text{ sur } \Omega.$$

Cependant,

$$\int_{\overrightarrow{C}} f \cdot dl = 2\pi$$

où $\overrightarrow{C}$ est le cercle $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ avec l'orientation positive. Comme C est un chemin fermé dans Ω, il découle du Théorème 1(1) que f ne dérive pas d'un potentiel sur Ω.

Par contre, si Ω est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$ ayant la propriété que $intC \subset \Omega$ dès que C est un chemin fermé dans Ω, alors la symétrie de ∇f sur Ω est suffisante pour assurer que $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ dérive d'un potentiel sur Ω. En effet, dans ce cas, si C est un chemin fermé tel que $C \subset \Omega$, alors $f \in C^1((intC) \cup C)$ et par le Théorème de Green,

$$\int_{\overrightarrow{C}} f \cdot dl = \int_{intC} \{\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1\} dxdy = \int_{intC} \{0\} dxdy = 0$$

où $\overrightarrow{C}$ a l'orientation positive. Donc f a la propriété (**) dans Ω et, par le Théorème 1(1), f dérive d'un potentiel sur Ω.

Cette propriété de la région Ω peut être caractérisée d'une façon générale pour des sous-ensembles de $\mathbb{R}^N$.

Définition 7.3 *Un sous-ensemble ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ est dit* ***simplement connexe*** *lorsque*

(i) Ω est connexe et

(ii) tout chemin fermé dans Ω peut être contracté à un point sans quitter Ω. C'est à dire, si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ est une représentation paramétrique d'un chemin fermé $C \subset \Omega$, alors il existe une fonction continue $H : [0,1] \times [a,b] \to \mathbb{R}^N$ telle que

(1) $H(0,s) = \gamma(s)$ pour tout $s \in [a,b]$

(2) $H(1,s) = H(1,a)$ pour tout $s \in [a,b]$

(3) $H(t,s) \in \Omega$ pour tout $(t,s) \in [0,1] \times [a,b]$

(4) $H(t,a) = H(t,b)$ pour tout $t \in [0,1]$.

Exemples Cas $N = 2$: On peut montrer qu'un sous-ensemble ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ est simplement connexe $\Leftrightarrow$ Ω est connexe et $intC \subset \Omega$ pour tout chemin fermé $C \subset \Omega$.

Cas $N = 3$: Un sous-ensemble ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$ est simplement connexe $\Leftrightarrow$ Ω est connexe et, pour tout chemin fermé $C \subset \Omega$, il existe une nappe avec bord $S \subset \Omega$ telle que $C = \partial S$.

Une condition suffisante: Tout ouvert étoilé dans $\mathbb{R}^N$ est simplement connexe.

Théorème 7.4 *Soient Ω un sous-ensemble ouvert et simplement connexe de $\mathbb{R}^N$ et $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Alors*
f dérive d'un potentiel sur Ω
$\Longleftrightarrow \nabla f(x)$ est symétrique pour tout $x \in \Omega$.

Remarque Dans le cas $N = 3$, si $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ où Ω est ouvert et simplement connexe, alors f dérive d'un potentiel sur Ω si et seulement si f est irrotationnel sur Ω.

Preuve du Théorème 7.2: Supposons d'abord que f dérive d'un potentiel φ sur Ω. Soient $p, q \in \Omega$ avec $p \neq q$ et $\overrightarrow{C}, \overrightarrow{D}$ deux chemins allant de p vers q tels que $C \cup D \subset \Omega$. Par la formule (1),

$$\int_{\overrightarrow{C}} f \cdot dl = \varphi(q) - \varphi(p) = \int_{\overrightarrow{D}} f \cdot dl.$$

Réciproquement, supposons que f a la propriété (*). Fixons un point $a \in \Omega$. Pour chaque $x \in \Omega\backslash\{a\}$ choisissons un chemin $\overrightarrow{C(x)}$ allant de a vers x tel que $C(x) \subset \Omega$. L'existence d'un tel chemin est assurée par la connexité de Ω. Posons

$$\varphi(x) = \int_{\overrightarrow{C(x)}} f \cdot dl \text{ et } \varphi(a) = 0.$$

Montrons que $\varphi \in C^1(\Omega)$ et que $\nabla\varphi = f$ sur Ω. En effet, pour $x \in \Omega\backslash\{a\}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^N : \|x - y\| < \varepsilon\} \subset \Omega\backslash\{a\}$. Pour $h \in \mathbb{R}$, tel que $0 < |h| < \varepsilon$, et pour $i = 1, ..., N$,

$$\frac{\varphi(x + he_i) - \varphi(x)}{h} = \frac{1}{h}\{\int_{\overrightarrow{C(x+he_i)}} f \cdot dl - \int_{\overrightarrow{C(x)}} f \cdot dl\}.$$

Mais on peut trouver un chemin $\overrightarrow{D(x)}$ allant de a vers x tel que $D(x) \subset \Omega$ et $D(x) \cap [x, x + he_i] = \{x\}$. Alors $\overrightarrow{D(x)} \cup \overrightarrow{[x, x + he_i]}$ est un chemin allant de a vers $x + he_i$ et $D(x) \cup [x, x + he_i] \subset \Omega$. Donc par la propriété (*) de f

$$\int_{\overrightarrow{C(x+he_i)}} f \cdot dl = \int_{\overrightarrow{D(x)}} f \cdot dl + \int_{\overrightarrow{[x,x+he_i]}} f \cdot dl$$

et

$$\int_{\overrightarrow{D(x)}} f \cdot dl = \int_{\overrightarrow{C(x)}} f \cdot dl.$$

Ainsi,

$$\frac{\varphi(x+he_i)-\varphi(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_{\overrightarrow{[x,x+he_i]}} f\cdot dl.$$

Or, $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^N$ définie par $\alpha(t) = x + the_i$ pour $t \in [0,1]$, est une représentation paramétrique de $\overrightarrow{[x, x+he_i]}$ et donc

$$\begin{aligned}\int_{\overrightarrow{[x,x+he_i]}} f\cdot dl &= \int_0^1 \langle f(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle\, dt = \int_0^1 \langle f(\alpha(t), he_i\rangle\, dt\\ &= h\int_0^1 \langle f(x+the_i), e_i\rangle\, dt.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x+he_i)-\varphi(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\int_0^1 \langle f(x+the_i, e_i\rangle\, dt\\ &= \int_0^1 \langle f(x), e_i\rangle\, dt = f_i(x),\end{aligned}$$

c'est-à-dire, la dérivée partielle $\partial_i\varphi(x)$ existe et est égale à $f_i(x)$ pour tout $x \in \Omega\backslash\{a\}$ et pour $i = 1, ..., N$. Par contre,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(a+he_i)-\varphi(a)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\overrightarrow{C(a+he_i)}} f\cdot dl\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\overrightarrow{[a,a+he_i]}} f\cdot dl\\ &= \lim_{h\to 0}\int_0^1 \langle f(a+the_i, e_i\rangle\, dt = f_i(a).\end{aligned}$$

Ceci montre que $\varphi \in C^1(\Omega)$ et que $\nabla\varphi = f$ sur Ω.

Les points (1) et (2) du théorème sont déjà établis. Enfin, le point (3) est une conséquence immédiate de la connexité de Ω.

Preuve du Théorème 7.4: Par le point (2) du lemme, il suffit de démontrer que la symétrie de ∇f sur Ω implique que f a la propriété (**). Alors f dérive d'un potentiel. Pour le cas $N = 2$, on a déjà vu que ceci découle du Théorème de Green. Pour $N = 3$, on l'obtient comme une conséquence du Théorème de Stokes après avoir justifié la remarque que pour tout chemin fermé $C \subset \Omega$ il existe une nappe avec bord $S \subset \Omega$ telle que $C = \partial S$. Dans le cas général, on commence par montrer que l'homotopie H dans la définition de simplement connexe peut être remplacée par une fonction plus régulière ayant les mêmes propriétés. Ensuite on utilise cette fonction pour montrer que $\int_{\overrightarrow{C}} f \cdot dl = 0$ pour tout chemin fermé dans Ω.

Dans le cas où Ω est étoilé, on peut donner une démonstration plus directe. Il suffit de définir une fonction φ par la formule (3) et puis de calculer son gradient. Rappelons que, si M est une matrice réelle $N \times N$, alors

$$\langle Mv, w \rangle = \left\langle v, M^T w \right\rangle \text{ pour tout } v, w \in \mathbb{R}^N$$

et donc

$$\langle Mv, w \rangle = \langle Mw, v \rangle \text{ si } M \text{ est symétrique.}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \langle f(tx + (1-t)a), tv \rangle &= \langle \nabla f(tx + (1-t)a)[x-a], tv \rangle + \langle f(tx + (1-t)a), v \rangle \\
&= \langle \nabla f(tx + (1-t)a)tv, x - a \rangle + \langle f(tx + (1-t)a), v \rangle
\end{aligned}$$

Mais pour $x \in \Omega$ et $v \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla \varphi(x), v \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(tx + (1-t)a)tv, x - a \rangle + \langle f(tx + (1-t)a), v \rangle \, dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt} \langle f(tx + (1-t)a), tv \rangle \, dt \\
&= \langle f(x), v \rangle
\end{aligned}$$

montrant que $\nabla \varphi(x) = f(x)$ pour tout $x \in \Omega$.

7.2 Potentiels vecteur

On considère un sous-ensemble Ω qui est ouvert et connexe dans $\mathbb{R}^3$ et un champ vectoriel $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^3)$. On cherche un champ vectoriel $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ tel que $f(x) = \nabla \wedge g(x)$ pour tout $x \in \Omega$. La discussion de ce cas sera moins complète que celle des potentiels scalaires car notre traitement des surfaces fermées dans $\mathbb{R}^3$ était assez restreint. Notons d'abord que si le potentiel $g \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ alors $\nabla \cdot f = \nabla \cdot (\nabla \wedge g) = 0$ sur Ω et donc la condition $\nabla \cdot f = 0$ est nécessaire pour l'existence d'un tel potentiel. Un champ vectoriel $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ayant la propriété que $\nabla \cdot f = 0$ sur Ω est dit

solénoidal ou **incompressible.** On verra que si $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et dérive d'un potentiel vecteur sur Ω, alors forcément f est solénoidal sur Ω.

Bien sûr, il existe des champs qui n'admettent aucun potentiel vecteur.

Example 1 Soient $\Omega = \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ et

$$f(x) = \frac{x}{\|x\|^3} \text{ pour } x \in \Omega.$$

Alors $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$ mais f n'a pas de potentiel vecteur sur Ω, ni sur aucune partie de Ω qui contient la sphère

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}.$$

En fait, le champ $N : S \to \mathbb{R}^3$ de normales unitaires extérieures sur S est $N(x) = x$ et donc

$$\int_S \langle f, N \rangle \, d\sigma = \int_S \left\langle \frac{x}{\|x\|^3}, x \right\rangle d\sigma = \int_S \frac{1}{\|x\|} d\sigma = \int_S d\sigma = 4\pi,$$

tandis que, s'il existait un champ $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ tel que $f(x) = \nabla \wedge g(x)$ pour tout $x \in \Omega$, on aurait

$$\int_S \langle f, N \rangle \, d\sigma = \int_S \langle \nabla \wedge g, N \rangle \, d\sigma = 0$$

par le théorème de Stokes. (Notons en passant, que $-f$ est le champ de gravitation d'une masse unitaire fixé à l'origine et qu'il a les propriétés suivantes

$$\nabla \cdot f(x) = 0 \text{ et } f(x) = -\nabla(\frac{1}{\|x\|}) \text{ pour tout } x \in \Omega.)$$

D'autre part, lorsqu'un potentiel vecteur de f existe, il est loin d'être unique. Si g est un potentiel vecteur pour f sur Ω, alors $g + \nabla\varphi$ est aussi un potentiel vecteur pour f sur Ω quelle que soit la fonction $\varphi \in C^2(\Omega)$ car $\nabla \wedge (\nabla\varphi) = 0$ en ce cas.

Théorème 7.5 *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ouvert et $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^3)$ un champ vectoriel qui dérive d'un potentiel vecteur sur Ω.*

(A) Soient (S_1, N_1) et (S_2, N_2) deux nappes avec bord telles que $S_1 \cup S_2 \subset \Omega$ et $\partial S_1 = \partial S_2 = C$. Si N_1 et N_2 engendrent la même orientation $\overrightarrow{C}$ sur le chemin fermé C, alors

$$\int_{S_1} \langle f, N_1 \rangle \; d\sigma = \int_{S_2} \langle f, N_2 \rangle \; d\sigma.$$

(B) Si $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, alors $\nabla \cdot f(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$.

(C) Si g et $G \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ sont deux potentiels vecteur pour f sur Ω et si Ω est simplement connexe, alors il existe une fonction $\varphi \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ telle que

$$G(x) = g(x) + \nabla\varphi(x) \text{ pour tout } x \in \Omega.$$

Remarque 1 Soit $\overrightarrow{C}$ un chemin fermé dans Ω. Si Ω est simplement connexe, il existe une nappe orientée (S, N) avec bord telle que $S \subset \Omega$ et $\partial S = C$ et on peut choisir N de sorte que l'orientation de $\overrightarrow{C}$ est celle qui est positive par rapport à N. Si f dérive d'un potentiel vecteur sur Ω, le flux de f à travers S dans le sens de N est le même pour tous les choix de (S, N) vérifiant ces conditions et, en fait,

$$\int_S \langle f, N\rangle \ d\sigma = \int_{\overrightarrow{C}} g \cdot dl$$

où g est un potentiel vecteur pour f sur Ω, par le Théorème de Stokes. On peut ainsi parler sans ambiguïté du flux de f à travers le chemin fermé orienté $\overrightarrow{C}$ sous ces conditions, et ce flux est égal à la circulation du potentiel vecteur g sur $\overrightarrow{C}$. Noter que si G est un autre potentiel vecteur de f sur Ω,

$$\int_{\overrightarrow{C}} G \cdot dl = \int_{\overrightarrow{C}} (g + \nabla\varphi) \cdot dl = \int_{\overrightarrow{C}} g \cdot dl$$

par le point (C).

Remarque 2 L'Exemple 1 montre que la condition $\nabla \cdot f = 0$ sur Ω n'est pas sufficiante pour assurer l'existence d'un potentiel vecteur de f sur Ω, même si Ω est simplement connexe.

Remarque 3 On a établi le point (B) sans prétendre qu'il existe un potentiel $g \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ lorsque f dérive d'un potentiel sur Ω et $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

Preuve (A) Soit $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ un potentiel vecteur pour f sur Ω. Alors,

$$\begin{aligned}\int_{S_1} \langle f, N_1\rangle \ d\sigma &= \int_{S_1} \langle \nabla \wedge g, N_1\rangle \ d\sigma \\ &= \int_{\overrightarrow{\partial S_1}} g \cdot dl\end{aligned}$$

par le Théorème de Stokes, où $\overrightarrow{\partial S_1}$ a l'orientation positive engendrée par (S_1, N_1). Si (S_2, N_2) engendre la même orientation de $\partial S_2 = \partial S_1$,

$$\int_{\overrightarrow{\partial S_1}} g \cdot dl = \int_{\overrightarrow{\partial S_2}} g \cdot dl = \int_{S_2} \langle f, N_2\rangle \ d\sigma$$

de nouveau par le Théorème de Stokes et le résultat est établi.

(B) Supposons qu'il existe un point $a \in \Omega$ tel que $\nabla \cdot f(a) > 0$. Alors, par la continuité de $\nabla \cdot f$ sur Ω, il existe $\delta > 0$ tel que

$$B \subset \Omega \text{ et } \nabla \cdot f(x) \geq a/2 \text{ pour tout } x \in B$$

où $B = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x - a\| \leq \delta\}$. Comme $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et B est un domaine régulier, il découle du Théorème de la divergence que

$$\int_B (\nabla \cdot f)\ dxdydz = \int_{\partial B} \langle f, N \rangle\ d\sigma$$

où $N(x) = (x-a)/\|x-a\|$ est le champ de normales unitaires extérieures sur $\partial B = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x - a\| = \delta\}$. Mais

$$\int_{\partial B} \langle f, N \rangle\ d\sigma = \int_{\partial B} \langle \nabla \wedge g, N \rangle\ d\sigma$$

où $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ est un potentiel vecteur de f sur Ω. Comme ∂B est une sphère dans Ω, on sait par le Théorème de Stokes que

$$\int_{\partial B} \langle \nabla \wedge g, N \rangle\ d\sigma = 0$$

et donc,

$$\int_B (\nabla \cdot f)\ dxdydz = \int_{\partial B} \langle \nabla \wedge g, N \rangle\ d\sigma = 0.$$

Or,

$$\int_B (\nabla \cdot f)\ dxdydz \geq \int_B (a/2)\ dxdydz = \frac{a}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi\delta^3.$$

De cette contradiction, on voit que $\nabla \cdot f(x) \leq 0$ pour tout $x \in \Omega$. Remplaçant f par $-f$, on déduit que $\nabla \cdot f(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$.

(C) Comme $f = \nabla \wedge g = \nabla \wedge G$ sur Ω, on a que $\nabla \wedge (G - g) = 0$ sur Ω qui est simplement connexe. Donc il existe un potentiel scalaire $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ tel que $G - g = \nabla\varphi$ sur Ω. Mais g et $G \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ par hypothèse et donc $\varphi \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$.$\square$

Sur une région étoilée, la condition $\nabla \cdot f = 0$ sur Ω est sufficiante pour assurer l'existence d'un potentiel vecteur de f sur Ω.

Théorème 7.6 *Soient* Ω *un sous-ensemble ouvert* $\mathbb{R}^3$ *qui est étoilé par rapport à un point* $a \in \Omega$ *et* $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

Si $\nabla \cdot f = 0$ *sur* Ω, *alors le champ vectoriel* $g : \Omega \to \mathbb{R}^3$ *défini par*

$$g(x) = \int_0^1 f(tx + (1-t)a) \wedge t(x-a)\, dt$$

est un potentiel vecteur pour f *sur* Ω.

Ainsi,

$$\begin{aligned} &f \text{ dérive d'un potentiel vecteur sur } \Omega \\ &\iff \nabla \cdot f(x) = 0 \text{ sur } \Omega. \end{aligned}$$

Preuve Par une translation, on peut supposer sans perte de généralité que $a = 0$. Alors,

$$g(x) = \int_0^1 k(tx)\, dt \text{ où } k(x) = f(x) \wedge x$$

et donc

$$\nabla \wedge g(x) = \int_0^1 t(\nabla \wedge k)(tx)\, dt.$$

Or, pour tout $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} \nabla \wedge k(x) &= 2f(x) + (x \cdot \nabla) f(x) - x(\nabla \cdot f)(x) \\ &= 2f(x) + (x \cdot \nabla) f(x) \text{ car } \nabla \cdot f = 0 \text{ sur } \Omega, \end{aligned}$$

et, pour tout $t \in [0,1]$,

$$\frac{d}{dt} t^2 f(tx) = 2t f(tx) + t^2 \nabla f(tx) x.$$

Donc,

$$\begin{aligned} t(\nabla \wedge k)(tx) &= t\{2f(tx) + (tx \cdot \nabla) f(tx)\} \\ &= \frac{d}{dt} t^2 f(tx) \end{aligned}$$

et

$$\nabla \wedge g(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} t^2 f(tx) dt = f(x). \square$$

Remarque L'hypothèse que Ω soit étoilé par rapport à un point a permet de définir le potentiel vecteur g mais elle est assez restrictive. Il est souvent préférable d'essayer de calculer un potentiel vecteur en exploitant la liberté que l'on a dans le choix du potentiel. Par exemple, admetons que Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^3$ ayant la forme suivante:

soit

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \text{ il existe un point } (x, y, z) \in \Omega\}$$

et supposons qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $(x, y) \in A$,

$$\{z \in \mathbb{R} : (x, y, z) \in \Omega\} \text{ est un intervalle qui contient } c.$$

Alors, on peut chercher un potentiel vecteur de la forme $g = (g_1, g_2, 0)$ sur Ω. En ce cas, la condition $f = \nabla \wedge g$ équivaut à

$$\begin{array}{cl} -\partial_3 g_2 & = f_1 \\ \partial_3 g_1 & = f_2 \\ \partial_1 g_2 - \partial_2 g_1 & = f_3 \end{array}$$

On peut poser

$$g_1(x, y, z) = \int_c^z f_2(x, y, t)dt + k(x, y) \text{ et } g_2(x, y, z) = -\int_c^z f_1(x, y, t)dt + h(x, y)$$

(où $k, h \in C^1(A)$ sont arbitraires) et ainsi satisfaire les deux premières équations. Ensuite

$$\begin{aligned} \{\partial_1 g_2 - \partial_2 g_1\}(x, y, z) &= -\int_c^z \{\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2\}(x, y, t)dt + \{\partial_1 h - \partial_2 k\}(x, y) \\ &= \int_c^z \partial_3 f_3(x, y, t)dt + \{\partial_1 h - \partial_2 k\}(x, y) \text{ car } \nabla \cdot f = 0 \\ &= f_3(x, y, z) - f_3(x, y, c) + \{\partial_1 h - \partial_2 k\}(x, y). \end{aligned}$$

et donc la troisième équation $\partial_1 g_2 - \partial_2 g_1 = f_3$ se réduit à

$$\{\partial_1 h - \partial_2 k\}(x, y) = f_3(x, y, c) \text{ pour tout } (x, y) \in A.$$

Selon la forme de A, on peut poser une des fonctions h ou k égale à zéro et puis intégrer afin de calculer l'autre.

7.3 Fonctions harmoniques

Soient Ω un sous-ensemble ouvert et connexe de $\mathbb{R}^3$ et $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^3)$. On peut se demander quand f dérive à la fois d'un potentiel scalaire et d'un potentiel vecteur sur Ω.

Admettons que $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, que

$$f = \nabla\varphi \text{ sur } \Omega \text{ où } \varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}) \text{ et que}$$
$$f = \nabla \wedge g \text{ sur } \Omega \text{ où } g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3).$$

Alors $\varphi \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ et $0 = \nabla \cdot f(x) = \nabla \cdot (\nabla\varphi) = \Delta\varphi$ sur Ω.

Une fonction $\varphi \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ est dite **harmonique sur** Ω lorsque $\Delta\varphi = 0$ sur Ω. On vient de voir que si $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ dérive à la fois d'un potentiel scalaire et d'un potentiel vecteur sur Ω, alors f est le gradient d'une fonction harmonique sur Ω.

Réciproquement, si Ω est étoilé et $f = \nabla\varphi$ où $\varphi \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ est harmonique sur Ω, alors $\nabla \cdot f = 0$ sur Ω et donc f dérive aussi d'un potentiel vecteur sur Ω.

Considérons maintenant le cas où Ω est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Rappelons qu'en ce cas, $\nabla \wedge f$ est le scalaire $\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1$. D'autre part, si Ω est simplement connexe, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ et $\nabla \wedge f = 0$ sur Ω, on a vu qu'il existe un potentiel scalaire $\varphi \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ tel que

$$f = \nabla\varphi \text{ sur } \Omega.$$

La notion de potentiel vecteur n'a pas de sens pour un champ vectoriel dans le plan mais la condition $\nabla \cdot f = 0$ sur Ω assure l'existence une fonction courant $\psi \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ pour f sur Ω. En effet, $\nabla \cdot f = 0 \iff \nabla \wedge F = 0$ où $F = (f_2, -f_1)$ et donc il existe un potentiel scalaire $\psi \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ de F sur Ω lorsque Ω est simplement connexe. Mais

$$F = \nabla\psi \iff (f_1, f_2) = (-\partial_2\psi, \partial_1\psi)$$

ce qui est la définition d'une fonction courant ψ de f.

Ainsi, si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert et simplement connexe, un champ vectoriel $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ admet à la fois un potentiel scalaire et une fonction courant sur Ω

$$\iff f = \nabla\varphi \text{ où } \varphi \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) \text{ et } \Delta\varphi = 0 \text{ sur } \Omega.$$

D'autre part, si Ω est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ est harmonique sur Ω (c'est à dire, $\Delta\varphi = 0$ sur Ω), alors le champ vectoriel

$f = \nabla\varphi$ est à la fois incompressible ($\nabla \cdot f = 0$) et irrotationnel ($\nabla \wedge f = 0$) sur Ω.