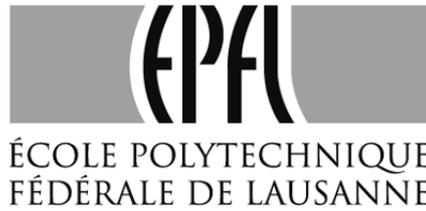


ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE
Section de Mathématiques



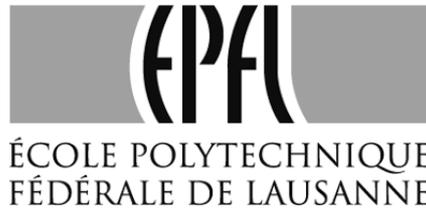
ANALYSE III

Professeur J. Descloux
Rédigé par O. Borel et J. Descloux

Cours destinés aux physiciens de deuxième année

Lausanne 1979
Rédition 2010

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE
Section de Mathématiques



ANALYSE III

Professeur J. Descloux
Rédigé par O. Borel et J. Descloux

Cours destinés aux physiciens de deuxième année

Lausanne 1979
Rédition 2010

TABLE DES MATIERES

Chapitre I.	<u>NOTIONS DE BASE</u>	Page
I.	1. Notations	1
I.	2. Ensembles dénombrables	2
I.	3. Nombres réels	5
I.	4. Espace \mathbb{R}^n	17
I.	5. Suites dans \mathbb{R}^n	24
I.	6. Continuité	29
I.	7. Compacts. Continuité uniforme	35
I.	8. Série	41
I.	9. Convergence ponctuelle et uniforme, Convergence normale	49
I.	10. Connexité. Connexité simple. Domaines étoilés	52
Chapitre II.	<u>ANALYSE VECTORIELLE</u>	
II.	1. Fonctions $C^k(A)$	56
II.	2. Espace affine. Champs scalaires et vectoriels	59
II.	3. Arcs. Intégrales curviligne	61
II.	4. Morceaux de surface. Surfaces fermées. Intégrale de surface	68
II.	5. Angle solide	77
II.	6. Gradient, dérivée dans une direction .	81
II.	7. Rotationnel. Divergence. Laplacien . .	88
II.	8. Formules relatives aux opérateurs $\overrightarrow{\text{grad}}$, div., $\overrightarrow{\text{rot}}$	93
II.	9. Théorème de Stokes	95
II.	10. Théorèmes du gradient, de la divergence, du rotationnel	100
II.	11. Définition intrinsèque des opérateurs $\overrightarrow{\text{grad}}$, div., $\overrightarrow{\text{rot}}$	107

Chapitre II.	<u>Analyse_vectorielle</u> (suite)	Page
II.	12. Formules de Green. Fonctions harmoniques	110
II.	13. Coordonnées curvilignes orthogonales.	115
II.	14. Opérateurs $\overrightarrow{\text{grad}}$, div. , $\overrightarrow{\text{rot.}}$, Δ en coordonnées curvilignes orthogonales.	120
Chapitre III.	<u>SERIES_DE_FOURIER</u>	
III.	1. Fonctions continues par intervalles .	129
III.	2. Espaces à produit scalaire	139
III.	3. Fonctions périodiques	149
III.	4. Séries de Fourier trigonométriques .	152
INDEX DES NOTATIONS		172
INDEX TERMINOLOGIQUE		173
BIBLIOGRAPHIE		176

I. NOTIONS DE BASE

I.1. Notations

On utilisera les notations habituelles ensemblistes.

\in : appartient; \forall : pour tout; \exists : il existe; \ni : tel que;

\notin : n'appartient pas; \nexists : il n'existe pas.

Si E et F sont deux ensembles, la notation $f : E \rightarrow F$ désigne une application f de E dans F ; si $G \subseteq E$, $f(G)$ est le sous-ensemble de F formé des images des éléments de G . Si $H \subseteq F$, $f^{-1}(H)$ est l'ensemble des éléments de E dont l'image par f appartient à H ; f est injective si $f(x) = f(y)$ implique $x = y$; f est surjective si $f(E) = F$; f est bijective si elle est à la fois injective et surjective.

Si $A \subseteq B$, l'ensemble des $x \in B$ n'appartenant pas à A est le complémentaire de A dans B ; dans la plupart des situations, l'ensemble B par rapport auquel on prend le complémentaire est connu et n'est pas mentionné explicitement; on note A^c le complémentaire de A .

L'ensemble des nombres naturels, c'est-à-dire l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots\}$ est noté par \mathbb{N} (*). L'ensemble des nombres réels est noté par \mathbb{R} ; l'ensemble des nombres réels > 0 est noté \mathbb{R}_+ .

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$; $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$; $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$;

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$.

La fin d'une démonstration sera souvent marquée par l'abréviation Q.E.D. (Quod erat demonstrandum).

(*) Certains auteurs et parmi eux N. Bourbaki, notent \mathbb{N} l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$, car dans la construction logique des nombres entiers, on commence par le cardinal de l'ensemble vide, qui est 0 ...

I.2. Ensembles dénombrables

Définition. Un ensemble A est dénombrable s'il est possible de numéroter ses éléments. En d'autres termes, A est dénombrable s'il est fini, ou s'il existe une bijection de \mathbb{N} sur A auquel cas A est nécessairement infini.

Théorème I.2.1. Soit $B \subset A$, A dénombrable. Alors B est dénombrable.

Démonstration. Puisque A est dénombrable, on peut numéroter ses éléments par un indice prenant les valeurs $1, 2, \dots$; soit $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$; numérotions les éléments de B de la façon suivante : b_1 est l'élément de B ayant le plus petit indice selon la numérotation de A ; b_2 est l'élément de B différent de b_1 ayant le plus petit indice selon la numérotation de A ; b_3 est l'élément de B différent de b_1 et b_2 ayant le plus petit indice selon la numérotation de A etc. Donc si $a_{n_0} \in B$, a_{n_0} est pris en considération selon cet algorithme au plus tard au pas n_0 . Ainsi on obtient bien une numérotation des éléments de B , et B est dénombrable.

Corollaire. Soit $f : A \rightarrow B$, f injective, B dénombrable. Alors A est dénombrable.

Démonstration. D'après le théorème I.2.1, $C \equiv f(A) \subset B$ est dénombrable; f peut être considérée comme une bijection de A sur C ; puisque C est dénombrable, on peut le numéroter et attribuer ensuite à chaque $x \in A$ le numéro de $f(x) \in C$, ainsi A est dénombrable.

Théorème I.2.2. L'ensemble $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ constitué des paires (i, j) avec $i \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$ est dénombrable.

Démonstration. Le tableau 1 montre comment on peut numéroter tous les éléments de \mathbb{N}^2 ; le numéro de chaque élément est encadré et précède l'élément. (Numérotation diagonale).

Tableau 1

① (1,1)	② (1,2)	④ (1,3)	⑦ (1,4)	⑪ (1,5)...
③ (2,1) ←	⑤ (2,2) ←	⑧ (2,3) ←	⑫ (2,4) ←	(2,5)...
⑥ (3,1) ←	⑨ (3,2) ←	⑬ (3,3) ←	(3,4)	(3,5)...
⑩ (4,1) ←	⑭ (4,2) ←	(4,3)	(4,4)	(4,5)...
⑮ (5,1) ←	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)...
.....				

Corollaire. Soit $\{A_i\}_{i \in I}$ une famille dénombrable d'ensembles A_i dénombrables (I est ou bien l'ensemble des N premiers nombres de \mathbb{N} (où N est le nombre des A_i) ou \mathbb{N} lui-même). Alors $B = \bigcup_{i \in I} A_i$ est dénombrable.

Démonstration. Posons $A'_1 = A_1$. Soit A'_2 l'ensemble des éléments de A_2 non contenus dans A_1 ; soit A'_3 l'ensemble des éléments de A_3 non contenus dans $A'_1 \cup A'_2$; soit A'_4 l'ensemble des éléments de A_4 non contenus dans $A'_1 \cup A'_2 \cup A'_3$ etc... D'après le théorème I.2.1, chaque A'_i est dénombrable ; la famille $\{A'_i\}_{i \in I}$ est composée d'ensembles disjoints et l'on a $B = \bigcup_{i \in I} A'_i$; désignons par $a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3}, \dots$ (numérotation finie ou infinie) les éléments de A'_i ; considérons l'application $f : B \rightarrow \mathbb{N}^2$ qui à $a_{i,j}$ fait correspondre (i,j) ; f est injective et, d'après les théorèmes I.2.1 et I.2.2, B est dénombrable, Q.E.D.

Exemple 1. L'ensemble des nombres entiers positifs, nuls et négatifs est dénombrable. En effet, cet ensemble est l'union de \mathbb{N} , de $\{0\}$ et des entiers négatifs qui sont tous dénombrables.

Exemple 2. L'ensemble des nombres rationnels est dénombrable. Il suffit, en utilisant le raisonnement de l'exemple 1, de montrer que l'ensemble A des nombres rationnels positifs est dénombrable; considérons l'application $f : A \longrightarrow \mathbb{N}^2$ qui au nombre rationnel x fait correspondre $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ où $x = i/j$ et i/j est une fraction irréductible; f est une injection; les théorèmes I.2.1 et I.2.2 permettent de conclure que A est dénombrable.

Exemple 3. L'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable. Supposons, par l'absurde, que nous ayons réussi à numéroter par a_1, a_2, a_3, \dots tous les nombres réels. Représentons chaque a_i par une représentation décimale infinie (en complétant éventuellement la partie décimale par une suite infinie de zéros). Soit $a_{i,j}$ le j ème chiffre après la virgule de a_i ; soit b_j un chiffre différent de 0, de 9 et de $a_{i,j}$; considérons le nombre réel $0, b_1 b_2 b_3 b_4 \dots$; par construction, ce nombre a une partie après la virgule différente de chacune de celle des a_i ; d'autre part, ce nombre n'admet qu'une seule représentation décimale; donc ce nombre est différent de chacun des a_i , contradiction.

I.3. Nombres réels

Nous supposons connues les propriétés habituelles de l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels relatives aux quatre opérations arithmétiques et aux relations d'ordre $<$, \leq , $>$, \geq . Par contre, nous allons expliciter une propriété relative aux "coupures" que nous pouvons adopter comme axiome.

Définition. Une coupure est une paire (A,B) de deux ensembles disjoints non vides dont la réunion est égale à \mathbb{R} et telle que $x \in A$, $y \in B$ implique $x < y$.

Axiome de Dedekind. Si (A,B) est une coupure, alors il existe un nombre $a \in \mathbb{R}$ unique tel que $x < a$ implique $x \in A$ et $y > a$ implique $y \in B$. a est appelé "nombre de Dedekind" associé à la coupure.

Remarque 1. Le nombre de Dedekind peut appartenir à l'un ou à l'autre des deux ensembles de la coupure.

Remarque 2. Les nombres rationnels ne jouissent pas d'une propriété semblable; de façon plus précise, soit A et B deux ensembles non vides, disjoints, dont la réunion est l'ensemble des nombres rationnels; alors il n'existe pas nécessairement un nombre a rationnel tel que x rationnel, $x < a$ implique $x \in A$ et y rationnel, $y > a$ implique $y \in B$; exemple : $A = \{x \text{ rationnel} : x < \sqrt{2}\}$, $B = \{y \text{ rationnel} : y > \sqrt{2}\}$.

Définitions. Soit $C \subset \mathbb{R}$, $C \neq \emptyset$; $c \in \mathbb{R}$ est un majorant de C (respectivement un minorant) si $x \leq c$ (respectivement $x \geq c$) $\forall x \in C$. C est majoré (respectivement minoré) si C possède un majorant (respectivement un minorant). C est borné s'il est à la fois majoré et minoré.

Soit $C \subset \mathbb{R}$, $C \neq \emptyset$, C majoré ; soit B l'ensemble des majorants de C et $A = B^c$; (A, B) forme alors une coupure et le nombre de Dedekind associé est appelé borne supérieure de C ou supremum de C ; on le note $\sup C$. On dit alors que $\sup C$ existe, ou est défini. Les hypothèses " C majoré" et " $\sup C$ existe" sont donc équivalentes. De même, soit $C \subset \mathbb{R}$, $C \neq \emptyset$, C minoré ; soit A l'ensemble des minorants de C et $B = A^c$; (A, B) forme alors une coupure et le nombre de Dedekind associé est appelé borne inférieure de C ou infimum de C ; on le note $\inf C$. On dit alors que $\inf C$ existe, ou est défini. Les hypothèses " C minoré" et " $\inf C$ existe" sont donc équivalentes.

N.B. Si C n'est pas majoré, on peut poser $\sup C = +\infty$. Ainsi $\sup C$ est toujours défini, et $\sup C$ existe au sens précédent si et seulement si $\sup C$ est fini. De même, on peut poser $\inf C = -\infty$ si C n'est pas minoré. Le nombre $\inf C$ est alors toujours défini et existe au sens précédent si et seulement s'il est fini.

Théorème I.3.1. a) Si C est majoré, alors $\sup C$ est le plus petit des majorants de C .
 b) Si C est minoré, alors $\inf C$ est le plus grand des minorants de C .

Démonstration. Établissons a). Soit donc C majoré et $c = \sup C$. Il faut établir α) que c est un majorant de C , β) qu'il n'y a pas de majorant inférieur à c . α) Supposons par l'absurde que c ne soit pas un majorant de C ; il existe donc $x \in C$ et $x > c$; posons $d = (x+c)/2$; d'une part, $x > d$ et d n'est pas majorant ; d'autre part $d > c$ et, par définition même de c , d est un majorant, contradiction. β) Par définition de c , tout nombre inférieur à C n'est pas un majorant.

Corollaire 1. Soit $A \subset \mathbb{R}$ possédant un maximum, c'est-à-dire un élément $a \in A$ tel que $x \leq a \quad \forall x \in A$. Alors $a = \sup A$. De même si A possède un minimum \tilde{a} , alors $\tilde{a} = \inf A$.

Corollaire 2. Soit $A \subset B \subset \mathbb{R}$. Si B est majoré (respectivement minoré), alors $\sup A \leq \sup B$ (respectivement $\inf A \geq \inf B$).

Démonstration. Supposons B majoré ; tout majorant de B est aussi majorant de A ; donc $\sup B$ est aussi un majorant de A ; donc $\sup A \leq \sup B$.

Corollaire 3. Soit (A, B) une coupure et c le nombre de Dedekind associé. Alors $c = \sup A = \inf B$.

Démonstration. c est un majorant de A et un minorant de B ; donc $a \equiv \sup A \leq c \leq \inf B \equiv b$; supposons par l'absurde que $a < b$; alors le nombre $(a+b)/2$ ne pourrait appartenir ni à A ni à B ce qui est contradictoire.

Définition. Soit f une application d'un ensemble E dans \mathbb{R} . Soit $G \subset E$. Si $f(G)$ est majoré, on pose $\sup_{x \in G} f(x) = \sup f(G)$; si $f(G)$ est minoré, on pose $\inf_{x \in G} f(x) = \inf f(G)$.

Théorème I.3.2. Soit f_1 et $f_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f_1(x) < f_2(x)$ pour tout $x \in G \subset E$.

a) Si $\sup_{x \in G} f_2(x)$ est défini, alors

$$\sup_{x \in G} f_1(x) < \sup_{x \in G} f_2(x).$$

b) Si $\inf_{x \in G} f_1(x)$ est défini, alors

$$\inf_{x \in G} f_1(x) \leq \inf_{x \in G} f_2(x)$$

Démonstration. Démontrons a). D'après le théorème I.3.1, on a pour tout $x \in G$

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \sup_{x \in G} f_2(x) ;$$

donc, toujours d'après le même théorème $\sup_{x \in G} f_1(x) \leq$

$\sup_{x \in G} f_2(x)$, Q.E.D.

Théorème I.3.3. Soit $\{A_i\}_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles non vides de \mathbb{R} ; soit $A = \bigcup_{i \in I} A_i$

a) Si A est majoré, $\sup A = \sup_{i \in I} \{\sup A_i\}$;

b) Si A est minoré, $\inf A = \inf_{i \in I} \{\inf A_i\}$.

Démonstration. Démontrons a). D'après le corollaire 2 du théorème I.3.1, $\sup A_i \leq \sup A$; considérons l'application $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(i) = \sup A_i$; on a $f(i) \leq \sup A$ et par conséquent

$$a = \sup_{i \in I} \{\sup A_i\} = \sup_{i \in I} f(i) \leq \sup A ;$$

pour montrer que $a = \sup A$, supposons, par l'absurde, que $a < \sup A$; a n'est donc pas un majorant de A et il existe $x \in A$ avec $a < x$; or $\exists i \in I$ tel que $x \in A_i$; donc $a < \sup A_i = f(i) \leq \sup_{i \in I} f(i) = a$, contradiction.

Application. Soit E un sous-ensemble du plan rapporté aux axes cartésiens x et y . Soit $E_y = \{(a,b) \in E, b=y\}$ et $Y = \{y : E_y \neq \emptyset\}$. Alors $E = \bigcup_{y \in Y} E_y$ (figure 1).

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(E)$ soit majoré. Alors :

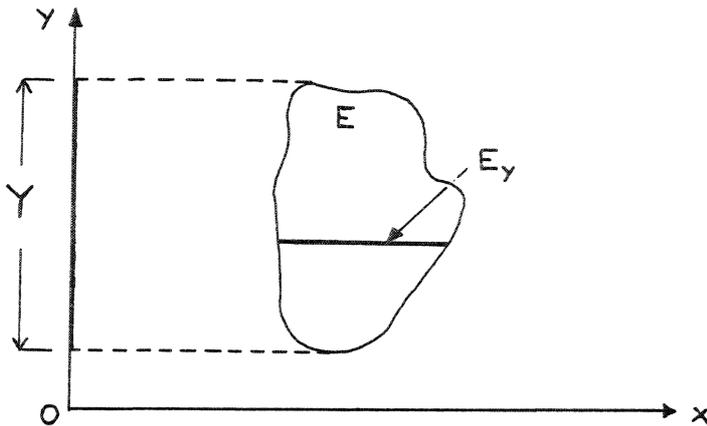
$$\sup f(E) = \sup_{y \in Y} \left\{ \sup_{x \in E_y} f(x,y) \right\}$$


figure 1

Définition. Une suite dans \mathbb{R} est une application μ de \mathbb{N} dans \mathbb{R} ; on utilisera indifféremment les notations $[a_i]_{i=1}^{\infty}$, $[a_i]$ où a_1, a_2, a_3, \dots signifiant que $\mu(i) = a_i \quad i \in \mathbb{N}$.

Il importe de bien distinguer la suite elle-même, qui est une application μ , de l'ensemble des valeurs de la suite, c'est-à-dire de $\mu(\mathbb{N})$. Ainsi la suite $0, 1, 1, 1, 1, \dots$ et la suite $0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$ ont le même ensemble de valeurs $\{0, 1\}$, mais sont différentes.

Définition. La suite $[a_i]$ est majorée, minorée ou bornée selon que l'ensemble des valeurs de la suite est majoré, minoré, ou borné. La suite est monotone croissante si $a_{i+1} \geq a_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$; elle est monotone décroissante si $a_{i+1} \leq a_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$.

Définition. Soit $[a_i]$ une suite. Soit $\{i_1, i_2, \dots\}$ un sous-ensemble infini de \mathbb{N} tel que $i_1 < i_2 < i_3 \dots$

La suite $[a_{i_k}]_{k=1}^{\infty}$ est une sous-suite de $[a_i]$.

Remarque. Soit une suite $\mu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mu(i) = a_i$; Soit $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ avec $g(k) = i_k$. La suite $\nu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $\nu(k) = \mu(g(k)) = a_{i_k}$ est une sous-suite si et seulement si g est monotone, c'est-à-dire $g(k+1) > g(k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Définition. La suite $[a_i]$ converge vers $a \in \mathbb{R}$ si $\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon)$ tel que $|a_i - a| < \epsilon$ pour $i > N(\epsilon)$; la suite est dite alors convergente, a est la limite de la suite et l'on écrit : $a = \lim_{i \rightarrow \infty} a_i$.

Remarque. Il résulte de la définition que si une suite $[a_i]$ converge vers a , alors la condition "il existe q tel que $t < a_i < t'$ pour $i > q$ " implique " $t \leq a \leq t'$ ".

Définition. La suite $[a_i]$ est une suite de Cauchy si $\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon)$ tel que $|a_i - a_j| < \epsilon$ pour $i, j > N(\epsilon)$.

Soit $[a_i]$ une suite, et B l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels qu'il n'existe qu'un nombre fini d'indices $i \in \mathbb{N}$ pour lesquels $a_i > x$. Si $A = B^c$, alors (A, B) est une coupure si et seulement si A et B sont tous deux non vides ; dans ce cas, le nombre de Dedekind associé à cette coupure est la limite supérieure de la suite $[a_i]$; il est noté $\limsup_{i \rightarrow \infty} (a_i)$. On dit alors que la limite supérieure existe, ou est définie, les hypothèses " $\limsup_{i \rightarrow \infty} a_i$ existe" et " A et B sont tous deux non vides" étant équivalentes par définition.

De même soit C l'ensemble des nombres $x \in \mathbb{R}$ tels qu'il existe au plus un nombre fini d'indices $i \in \mathbb{N}$ pour lesquels $a_i < x$, et soit $D = C^c$. Dans ce cas (C, D) est une coupure si et seulement si C et D sont tous deux non vides et le nombre de Dedekind associé à cette coupure est la limite inférieure de la suite $[a_i]$, notée $\liminf_{i \rightarrow \infty} (a_i)$. Les hypothèses " $\liminf_{i \rightarrow \infty} a_i$ existe" et " $\liminf_{i \rightarrow \infty} a_i$ est définie" sont par définition équivalentes.

Exemple. Si $[a_i]$ est une suite bornée, alors la limite supérieure et la limite inférieure de la suite sont toutes deux définies.

Remarques. 1) Il revient au même de dire que l'ensemble B ci-dessus est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $a_i \leq x$ pour tous les indices i sauf un nombre fini (ou nul) ou encore que B est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $a_i \leq x$ à partir d'un certain rang dépendant de x . Remarque analogue pour l'ensemble C .

2) Si $B = \emptyset$, on peut poser $\limsup_{i \rightarrow \infty} a_i = +\infty$ et si $A = \emptyset$, $\liminf_{i \rightarrow \infty} a_i = -\infty$. Ainsi la limite supérieure est toujours définie, et $\limsup_{i \rightarrow \infty} a_i$ "existe" au sens précédent si, et seulement si, $\limsup_{i \rightarrow \infty} a_i$ est fini. Remarque analogue pour $\liminf_{i \rightarrow \infty} a_i$.

Théorème I.3.4. Une suite $[a_i]$ monotone croissante et majorée converge, et on a :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = \sup_{i \in \mathbb{N}} a_i$$

Démonstration. Soit $[a_i]$ monotone croissante et majorée ; posons $C = \sup_{i \in \mathbb{N}} a_i$ et montrons que $C = \lim_{i \rightarrow \infty} a_i$. Soit $\epsilon > 0$ donné ; $C - \epsilon$ n'est pas un majorant de la suite et il existe par conséquent $N \in \mathbb{N}$ avec $a_N > C - \epsilon$; la suite étant monotone croissante on aura $C - \epsilon < a_i \leq C$ pour $i \geq N$; ainsi $|a_i - C| < \epsilon$ si $i > N$, Q.E.D.

Théorème I.3.5. Soit $[a_i]$ une suite.

a) Si l'une des quantités $\lim_{i \rightarrow \infty} \sup a_i$, $\inf_{k \in \mathbb{N}} (\sup_{i \geq k} a_i)$, $\lim_{k \rightarrow \infty} (\sup_{i \geq k} a_i)$ existe, elles existent toutes les trois et sont égales :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sup a_i = \inf_{k \in \mathbb{N}} (\sup_{i \geq k} a_i) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\sup_{i \geq k} a_i)$$

b) Si l'une des quantités $\lim_{i \rightarrow \infty} \inf a_i$, $\sup_{k \in \mathbb{N}} (\inf_{i \geq k} a_i)$, $\lim_{k \rightarrow \infty} (\inf_{i \geq k} a_i)$ existe, elles existent toutes les trois et sont égales :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \inf a_i = \sup_{k \in \mathbb{N}} (\inf_{i \geq k} a_i) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\inf_{i \geq k} a_i)$$

Démonstration. Prouvons a). Supposons que $\lim_{i \rightarrow \infty} \sup a_i = C$ existe, et soit $\epsilon > 0$. Par définition, d'une part il existe N tel que $a_i \leq C + \epsilon$ pour $i > N$, d'autre part $a_i > C - \epsilon$ pour une infinité d'indices i . Ainsi, on a

$$C - \epsilon < \sup_{i \geq k} a_i \leq C + \epsilon \quad \text{pour } k > N.$$

La suite $[\sup_{i \geq k} a_i]_{k=1}^{\infty}$ est donc une suite monotone décroissante minorée, de sorte que la limite existe et (Théorème 1.3.4)

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} \left(\sup_{i \geq k} a_i \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{i \geq k} a_i \right),$$

$$C - \varepsilon \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{i \geq k} a_i \right) \leq C + \varepsilon ;$$

il en résulte que $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{i \geq k} a_i \right) = C$, puisque ε est arbitraire.

Montrons maintenant que si $\inf_{k \in \mathbb{N}} \left(\sup_{i \geq k} a_i \right)$ existe, alors $\limsup_{i \rightarrow \infty} a_i$

existe. En effet, l'hypothèse implique que $[a_i]$ est majorée. De plus, quel que soit k , on a :

$$\sup_{i \geq k} a_i > g \equiv \inf_{q \in \mathbb{N}} \left(\sup_{i \geq q} a_i \right) - 1$$

et par conséquent, il existe un entier $j(k) \geq k$ tel que $a_{j(k)} > g$. Les $j(k)$ ne sont pas nécessairement tous distincts, mais l'ensemble $\{j(k), k \in \mathbb{N}\}$ est infini ; ceci permet, à partir de la définition, de conclure à l'existence de $\limsup_{i \rightarrow \infty} a_i$.

Enfin, si $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{i \geq k} a_i \right)$ existe, il est clair que $\inf_{k \in \mathbb{N}} \left(\sup_{i \geq k} a_i \right)$

existe aussi, et l'on est ramené au problème précédent.

Q.E.D.

Remarque. Avec les conventions relatives à l'infini pour sup, inf, lim sup, lim inf, on peut montrer que les 3 quantités du théorème 1.3.5 a), qui existent donc toujours, sont toujours égales. Remarque analogue pour b).

Théorème 1.3.6. Soit $[a_i]$ une suite bornée ; alors

$$\inf_{i \in \mathbb{N}} a_i \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} a_i \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} a_i \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} a_i$$

Démonstration. En appliquant systématiquement le théorème 1.3.1., on a successivement

$$\inf_{i \in \mathbb{N}} a_i \leq \inf_{i \geq k} a_i \leq \sup_{i \geq j} a_i \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} a_i \quad \forall j, k \in \mathbb{N} ;$$

$$\inf_{i \in \mathbb{N}} a_i \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} (\inf_{i \geq k} a_i) \leq \sup_{i \geq j} a_i \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} a_i \quad \forall j \in \mathbb{N} ;$$

$$\inf_{i \in \mathbb{N}} a_i \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} (\inf_{i \geq k} a_i) \leq \inf_{j \in \mathbb{N}} (\sup_{i \geq j} a_i) \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} a_i ;$$

le résultat est alors une conséquence du théorème 1.3.5.

Théorème 1.3.7. Soit $[a_i]$ et $[b_i]$ deux suites avec $a_i \leq b_i \quad \forall i$,

a) si $\lim_{i \rightarrow \infty} \sup a_i$ et $\lim_{i \rightarrow \infty} \sup b_i$ existent alors

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sup a_i \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \sup b_i .$$

b) si $\lim_{i \rightarrow \infty} \inf a_i$ et $\lim_{i \rightarrow \infty} \inf b_i$ existent alors

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \inf a_i \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \inf b_i .$$

Démonstration. Démontrons a) On utilise deux fois le théorème 1.3.2 puis le théorème 1.3.5 :

$$\sup_{i \geq k} a_i \leq \sup_{i \geq k} b_i , \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{i \geq k} a_i \leq \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{i \geq k} b_i$$

Théorème 1.3.8. La suite $[a_i]$ converge si et seulement si les quantités $\lim_{i \rightarrow \infty} \sup a_i$ et $\lim_{i \rightarrow \infty} \inf a_i$ existent et sont égales.

Démonstration. Supposons que $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a$ soit définie. Soit $\epsilon > 0$ donné ; $\exists N$ tel que $a - \epsilon < a_i < a + \epsilon$ pour tout $i > N$; alors par le théorème 1.3.1. on a

$$\sup_{i \geq k} a_i \leq a + \epsilon \quad \forall k > N$$

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} (\sup_{i \geq k} a_i) \leq \inf_{k > N} (\sup_{i \geq k} a_i) \leq a + \epsilon ;$$

Cette relation étant vraie pour tout $\epsilon > 0$, on a (théorème 1.3.5.)
 $\limsup_{i \rightarrow \infty} a_i \leq a$; de façon analogue on obtient $\liminf_{i \rightarrow \infty} a_i \geq a$;
 par le théorème 1.3.6., on a

$$a \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} a_i \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} a_i \leq a$$

et par conséquent $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = \liminf_{i \rightarrow \infty} a_i = \limsup_{i \rightarrow \infty} a_i$.

Réciproquement supposons que $\liminf_{i \rightarrow \infty} a_i = \limsup_{i \rightarrow \infty} a_i \equiv b$. Montrons
 que $b = \lim_{i \rightarrow \infty} a_i$; Soit $\epsilon > 0$ donné; $\exists N_1$ tel que $a_i \leq b + \epsilon/2$
 pour $i > N_1$ et $\exists N_2$ tel que $a_i \geq b - \epsilon/2$ pour $i > N_2$; alors
 pour $i > N \equiv \max(N_1, N_2)$ $b - \epsilon/2 \leq a_i \leq b + \epsilon/2$, c'est-à-dire
 pour $i > N$ $|a_i - b| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$; donc $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = b$.

Corollaire. La limite d'une suite, quand elle existe, est univoquement déterminée.

Démonstration. D'après le théorème 1.3.8., la limite, quand elle existe, est égale à la limite supérieure qui est définie par une coupure, donc univoquement déterminée.

Théorème 1.3.9. Toute suite de Cauchy est convergente.

Démonstration. Soit la suite de Cauchy $[a_i]$. Il existe $M \in \mathbb{N}$
 tel que $|a_i - a_j| < 1$, si $i, j > M$; en particulier $|a_i - a_{M+1}| < 1$
 si $i > M$; en posant $Q = \max_{i=1, \dots, M} (a_i - a_{M+1})$, on voit que
 $a_{M+1} - \max(1, Q) \leq a_i \leq a_{M+1} + \max(1, Q)$ ce qui signifie que la
 suite est bornée et que $a \equiv \limsup_{i \rightarrow \infty} a_i$ est bien définie. Montrons
 que $a = \lim_{i \rightarrow \infty} a_i$. Soit $\epsilon > 0$ donné; il existe un nombre fini de
 $i \in \mathbb{N}$ avec $a_i > a + \epsilon/2$ et un nombre infini de $i \in \mathbb{N}$ avec
 $a_i > a - \epsilon/2$ donc un nombre infini de $i \in \mathbb{N}$ avec $|a_i - a| \leq \epsilon/2$;
 puisque la suite est de Cauchy, il existe N tel que $|a_i - a_j| < \epsilon/2$

pour $i, j > N$, il existe aussi $M \in \mathbb{N}$, $M > N$ tel que $|a_M - a| \leq \epsilon/2$; pour $i > N$ on a alors

$$|a_i - a| \leq |a_i - a_M| + |a_M - a| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

et par conséquent $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a$.

Théorème 1.3.10. (Bolzano-Weierstrass). Une suite $[a_i]$ bornée possède une sous-suite convergente.

Démonstration. Soit $[a_i]$ bornée; la quantité $a = \limsup_{i \rightarrow \infty} a_i$ est définie; nous allons construire une sous-suite convergeant vers a . Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un nombre fini de $i \in \mathbb{N}$ avec $a_i > a + \epsilon$ et un nombre infini de $i \in \mathbb{N}$ avec $|a_i - a| \leq \epsilon$; soit $i_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|a_{i_1} - a| \leq 1$; soit ensuite $i_2 \in \mathbb{N}$, $i_2 > i_1$ tel que $|a_{i_2} - a| \leq \frac{1}{2}$; soit ensuite $i_3 \in \mathbb{N}$, $i_3 > i_2$ tel que $|a_{i_3} - a| \leq \frac{1}{3}$ etc... on obtient ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$ le terme a_{i_k} avec $i_k > i_{k+1}$; $[a_{i_k}]_{k=1}^{\infty}$ est donc une sous-suite de $[a_i]$; montrons qu'elle converge vers a ; soit $\epsilon > 0$ donné; il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{N} < \epsilon$; alors pour tout $k > N$ on a

$$|a_{i_k} - a| \leq \frac{1}{k} < \frac{1}{N} < \epsilon,$$

ce qui signifie que $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{i_k} = a$.

I.4. Espace \mathbb{R}^n

Définitions et notations. \mathbb{R}^n est l'espace vectoriel des éléments de la forme $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, où $x_i \in \mathbb{R}$ pour $i = 1, 2, \dots, n$. Le nombre $|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ est la longueur de $x \in \mathbb{R}^n$; on remarque que, pour $n = 1$, cette notion coïncide avec la valeur absolue. Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, $|x - y|$ est la distance de x à y . Pour $a \in \mathbb{R}^n$, $\rho \in \mathbb{R}$, $B(a, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < \rho\}$ est la boule de centre a et de rayon ρ . $A \subset \mathbb{R}^n$ est borné s'il existe une boule qui le contient.

Théorème 1.4.1. Soit $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$; on a

- a) $|\lambda x| = |\lambda| |x|$
- b) $|x \pm y| \leq |x| + |y|$
- c) $|x \pm y| \geq \left| |x| - |y| \right|$
- d) $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$.

Démonstration. a) est une conséquence directe de la définition. Pour démontrer b) on remarque tout d'abord que l'on a l'inégalité :

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq |x|^2 |y|^2; \quad (1)$$

en effet si $y = 0$ (1) est vérifiée; si $y \neq 0$, la fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$ définie par $f(\lambda) = |x + \lambda y|^2 = |x|^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^n x_i y_i + \lambda^2 |y|^2$ est un trinôme du second degré de signe constant; (1) exprime précisément le fait que son discriminant est non positif. On a alors

$$\begin{aligned} |x \pm y|^2 &= |x|^2 \pm 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i + |y|^2 \leq |x|^2 + 2 |x| |y| + |y|^2 = \\ &= (|x| + |y|)^2 \end{aligned}$$

ce qui démontre b). c) résulte des deux relations suivantes qui utilisent b):

$$|x| = |(x \pm y) \mp y| \leq |x \pm y| + |y| \Rightarrow |x \pm y| \geq |x| - |y|$$

$$|y| = |(y \pm x) \mp x| \leq |y \pm x| + |x| \Rightarrow |y \pm x| \geq |y| - |x|$$

d) est également une conséquence de b) en écrivant

$$|x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y| \quad \text{Q.E.D.}$$

Théorème 1.4.2. Soit $a, b \in \mathbb{R}^n$, $\rho \in \mathbb{R}$.

a) Si $b \in B(a, \rho)$, $\rho > 0$ alors

$$B(b, \rho - |b - a|) \subset B(a, \rho)$$

b) Si $|b - a| > \rho \geq 0$, alors

$$B(b, |b - a| - \rho) \cap \{x \in \mathbb{R}^n, |x - a| \leq \rho\} = \emptyset$$

Démonstration. a) Supposons $b \in B(a, \rho)$; soit $x \in B(b, \rho - |b - a|)$; on a (théorème 1.4.1. d) :

$$|x - a| \leq |x - b| + |b - a| < \rho - |b - a| + |b - a| = \rho$$

donc $x \in B(a, \rho)$, Q.E.D.

b) Supposons $|b - a| > \rho$; soit $x \in B(b, |b - a| - \rho)$; on a (théorème 1.4.1. c) :

$$|x - a| = |(x - b) + (b - a)| \geq |b - a| - |x - b| > |b - a| -$$

$$(|b - a| - \rho) = \rho,$$

et par conséquent $x \notin B(a, \rho)$.

Définition. $A \subset \mathbb{R}^n$ est un voisinage de $a \in \mathbb{R}^n$ s'il existe $\rho > 0$ tel que $B(a, \rho) \subset A$. $A \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble ouvert, si A est un voisinage de chacun des points qui le compose; en d'autres termes A est ouvert si $\forall a \in A, \exists \rho > 0$ avec $B(a, \rho) \subset A$. $A \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble fermé si son complémentaire A^c dans \mathbb{R}^n est ouvert.

Théorème 1.4.3. Soit A et B deux voisinages de $a \in \mathbb{R}^n$ et soit $C \supset A$. On a :

- a) $a \in A$
- c) C est un voisinage de a
- e) $A \cap B$ est un voisinage de a .

Démonstration. a) et b) résultent immédiatement des définitions. Pour vérifier c) on remarque que $\exists \rho_1 > 0, \rho_2 > 0$ avec $B(a, \rho_1) \subset C$ et $B(a, \rho_2) \subset B$ et par conséquent $B(a, \min(\rho_1, \rho_2)) \subset A \cap B$.

Théorème 1.4.4. a) \emptyset et \mathbb{R}^n sont simultanément ouverts et fermés ;
 b) si $a \in \mathbb{R}^n$, $\{a\}$ est un ensemble fermé ;
 c) si $a \in \mathbb{R}^n, \rho \in \mathbb{R}$, alors $B(a, \rho)$ est un ensemble ouvert ;
 d) si $a \in \mathbb{R}^n, \rho \in \mathbb{R}$, alors $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| \leq \rho\}$ est un ensemble fermé.

Démonstration. a) Puisque \emptyset ne contient aucun élément, \emptyset satisfait à la condition des ensembles ouverts ; par ailleurs visiblement \mathbb{R}^n est ouvert ; finalement $\emptyset = (\mathbb{R}^n)^c$ et $\mathbb{R}^n = (\emptyset)^c$ sont fermés. b) est un cas particulier de d) ($\rho = 0$). c) si $\rho \leq 0, B(a, \rho) = \emptyset$ est un ensemble ouvert d'après a) ; considérons le cas $\rho > 0$; Soit $x \in B(a, \rho)$; d'après le théorème 1.4.2. a, $B(x, \rho - |x - a|) \subset B(a, \rho)$; donc $B(a, \rho)$ est un voisinage de x ; ceci étant vrai pour tout $x \in B(a, \rho)$, $B(a, \rho)$ est un ensemble ouvert. d) Pour $\rho < 0, \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| \leq \rho\} = \emptyset$ est fermé d'après a) ; soit $\rho > 0$; il faut montrer que $D \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| \leq \rho\}^c$ est ouvert ; soit $x \in D$ on aura $|x - a| > \rho$; d'après le théorème 1.4.2 b $B(x, |x - a| - \rho) \subset D$ donc D est voisinage de x ; ceci étant vrai pour tout $x \in D$, D est ouvert et $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| \leq \rho\}$ est fermé.

Théorème 1.4.5. A est un voisinage de $a \in \mathbb{R}^n$ si et seulement s'il existe un ouvert O tel que $a \in O \subset A$.

Démonstration. a) Supposons que A soit un voisinage de a ; alors il existe $B(a, \rho) \subset A$, $\rho > 0$; on a $a \in B(a, \rho) \subset A$ avec $B(a, \rho)$ ouvert (théorème 1.4.4. c). b) Supposons qu'il existe O ouvert avec $a \in O \subset A$; par définition d'un ouvert, il existe $\rho > 0$ tel que $B(a, \rho) \subset O \subset A$; donc A est un voisinage de a .

Théorème 1.4.6. Soit $\{A_i\}_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de \mathbb{R}^n .

- a) Si tous les A_i sont ouverts, alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est un ensemble ouvert.
- b) Si tous les A_i sont ouverts et si la famille est finie, alors $\bigcap_{i \in I} A_i$ est un ensemble ouvert.
- c) Si tous les A_i sont fermés, alors $\bigcap_{i \in I} A_i$ est un ensemble fermé.
- d) Si tous les A_i sont fermés et si la famille est finie, alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est un ensemble fermé.

Démonstration. a) Supposons que tous les A_i soient ouverts. Soit $x \in \bigcup_{i \in I} A_i \equiv A$; $\exists i \in I$ tel que $x \in A_i$; puisque A_i est ouvert, A_i est un voisinage de x et par conséquent A est voisinage de x (théorème 1.4.3. b) ; ceci étant vrai pour tout $x \in A$, A est ouvert.

b) Supposons A_1, A_2, \dots, A_n n ouverts ; soit $A = \bigcap_{i=1}^n A_i$; soit $x \in A$; A_1 et A_2 sont des voisinages de x , donc (théorème 1.4.3. c) $A_1 \cap A_2$ est un voisinage de x ; A_3 est un voisinage de x , donc (théorème 1.4.3. c) $(A_1 \cap A_2) \cap A_3$ est voisinage de x ; le même argument, répété $(n-1)$ fois, montre que A est voisinage de x quelconque $\in A$; donc A est ouvert.

c) et d) se déduisent de a) et b) en faisant usage des règles de Morgan : pour une famille $\{C_i\}_{i \in J}$ quelconque d'ensembles $(\bigcup_{i \in J} C_i)^c = \bigcap_{i \in J} C_i^c$ et $(\bigcap_{i \in J} C_i)^c = \bigcup_{i \in J} C_i^c$. Supposons donc les A_i fermés ; on aura $(\bigcap_{i \in I} A_i)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$

A_i^c est ouvert ; d'après a) le membre de droite est un ouvert, donc $\bigcap_{i \in I} A_i$ est fermé. Supposons les A_i fermés et la famille finie ; on aura

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c ;$$

A_i^c est ouvert ; d'après b) le membre de droite est un ouvert, donc $\bigcup_{i \in I} A_i$ est un fermé.

Définitions. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. 1) L'adhérence (ou fermeture) de A est le plus petit ensemble fermé contenant A ; l'adhérence de A est notée par \bar{A} . 2) $c \in \mathbb{R}^n$ est un point frontière de A si tout voisinage de c contient un point appartenant à A et un point n'appartenant pas à A ; en d'autres termes, $c \in \mathbb{R}^n$ est un point frontière de A si pour tout voisinage V de c on a $V \cap A \neq \emptyset$ et $V \cap A^c \neq \emptyset$. 3) L'ensemble des points frontière de A est la frontière de A . 4) $a \in \mathbb{R}^n$ est un point d'accumulation de A si tout voisinage de a contient un nombre infini de points de A .

Remarque. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$; soit $\{A_i\}_{i \in I}$ la famille des ensembles fermés contenant A ; \mathbb{R}^n (théorème 1.4.4. a) est un élément de cette famille qui n'est donc pas vide ; l'ensemble $\bigcap_{i \in I} A_i$ est fermé (théorème 1.4.6. c) ; il est manifestement le plus petit des fermés contenant A ; par conséquent $\bar{A} = \bigcap_{i \in I} A_i$ (en fait ce raisonnement montre l'existence de l'adhérence).

Remarque. A est fermé si et seulement si $A = \bar{A}$.

Théorème 1.4.7. La frontière Γ d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble fermé.

Démonstration. Supposons, par l'absurde, que Γ^c ne soit pas ouvert alors $\exists b \in \Gamma^c$ tel que toute boule $B(b, \rho)$ ait, pour $\rho > 0$, une intersection non vide avec Γ . Soit V un voisinage de b ; V contient une boule $B(b, \rho)$ avec $\rho > 0$; soit $c \in B(b, \rho) \cap \Gamma$;

D'après le théorème 1.4.2. a) $B(c, \rho - |c - b|) \equiv D \subset B(b, \rho)$;
 D est un voisinage de c ; puisque $c \in \Gamma$, D contient un point
 $a_1 \in A$ et un point $a_2 \in A^c$; puisque $D \subset B(b, \rho) \subset V$, a_1 et
 $a_2 \in V$; V étant un voisinage de b quelconque, $b \in \Gamma$, contradiction.

Théorème 1.4.8. Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, Γ la frontière de A . Alors
 $\bar{A} = A \cup \Gamma$.

Démonstration. Il suffit de montrer a) $A \cup \Gamma$ est fermé,
 b) $\Gamma \subset \bar{A}$. a) Montrons que $B = (A \cup \Gamma)^c$ est ouvert ; soit $x \in B$;
 \exists un voisinage V de x ne contenant aucun point de A , car sinon
 puisque $x \notin A$, x serait point frontière ce qui est impossible ;
 d'autre part, Γ étant fermé (théorème 1.4.7) Γ^c est ouvert, donc
 un voisinage de x ; alors $V \cap \Gamma^c$ est un voisinage de x (théorème
 1.4.3. c) avec $V \cap \Gamma^c \subset B$; donc B est voisinage de x ; ceci
 étant vrai pour tout $x \in B$, B est ouvert. b) Montrons que $x \notin \bar{A}$
 implique $x \notin \Gamma$; puisque \bar{A} est fermé, \bar{A}^c est un ouvert, donc
 un voisinage de x ; d'autre part $\bar{A}^c \cap A \subset A^c \cap A = \emptyset$; donc x
 a un voisinage qui ne contient aucun point de A ce qui implique
 $x \notin \Gamma$.

Corollaire. Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, Γ la frontière de A .

a) $A \cap \Gamma = \emptyset$ si et seulement si A est ouvert. b) $\Gamma \subset A$ si et seule-
 ment si A est fermé.

Démonstration. a) Soit $A \cap \Gamma = \emptyset$ et $x \in A$; alors il existe au
 moins un voisinage de x contenu dans A , sans quoi $x \in \Gamma$ ce qui
 est impossible ; A est donc voisinage de chacun de ses points ;
 A est donc ouvert ; réciproquement si A est ouvert, chaque $x \in A$
 possède le voisinage A qui a une intersection vide avec A^c ; donc
 $x \notin \Gamma$.

b) Si $\Gamma \subset A$, $A = A \cup \Gamma = \bar{A}$ (théorème 1.4.8) donc
 A est fermé ; si A est fermé $A = \bar{A} = A \cup \Gamma$ ce qui implique que
 $\Gamma \subset A$.

Théorème 1.4.9. Soit $a \in \mathbb{R}^n$, $\rho > 0$. a) L'adhérence de $B(a, \rho)$ est $\{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| \leq \rho\}$. b) La frontière de $B(a, \rho)$ est $\{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| = \rho\}$.

Démonstration. Soit $C = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| \leq \rho\}$, $D = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| = \rho\}$, Γ la frontière de $B(a, \rho)$. On a $C = B(a, \rho) \cup D$; d'après le théorème 1.4.8, pour démontrer a) et b) il suffit d'établir la relation $D = \Gamma$. Par ailleurs, puisque C est fermé, on a (théorème 1.4.8) $B(a, \rho) \cup \Gamma \subset C$; puisque Γ et D ont tous deux une intersection vide avec $B(a, \rho)$ on en conclut que $\Gamma \subset D$. Il reste donc à établir la relation $D \subset \Gamma$. Soit $d \in D$ et V un voisinage de d ; $\exists \eta > 0 \rightarrow B(d, \eta) \subset V$; montrons que $B(d, \eta)$ contient un point de $B(a, \rho)$ et un point de son complémentaire; tout d'abord $d \in B(d, \eta)$, mais $d \notin B(a, \rho)$; soit $\xi = \min(\eta, \rho)/(2\rho)$, alors on vérifie que $d - \xi(d - a) \in B(d, \eta) \cap B(a, \rho)$.

Théorème 1.4.10. Un sous-ensemble de \mathbb{R}^n est fermé si et seulement s'il contient tous ses points d'accumulation.

Démonstration. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. a) Supposons A fermé et $x \in A^c$; A^c est ouvert, donc un voisinage de x disjoint de A ; x n'est donc pas un point d'accumulation de A .

b) Supposons que A contienne tous ses points d'accumulation; soit $x \in A^c$; il faut montrer que A^c est ouvert et, pour cela, que A^c est voisinage de x ; puisque x n'est pas un point d'accumulation, il existe un voisinage V de x ne contenant qu'un nombre fini de points $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$; soit $\rho = \min_{i=1, \dots, m} (|x - a_i|)$ (si $m = 0$, on pose $\rho = 1$); alors $V \cap B(x, \rho) \subset A^c$ est un voisinage de x (théorème 1.4.3. c); donc A^c (théorème 1.4.1) est un voisinage de x .

I.5. Suites dans \mathbb{R}^n .

Définitions. Une suite dans \mathbb{R}^n est une application $\mu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$; on utilise les notations $[a_i]_{i=1}^{\infty}$ ou $[a_i]$ ou a_1, a_2, a_3, \dots signifiant que $\mu(i) = a_i$. Une sous-suite est une suite obtenue en supprimant des termes de la suite initiale. Formellement, on définit une sous-suite de la suite μ de la façon suivante : soit $g_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement monotone, c'est-à-dire $g(k+1) > g(k) \quad k \in \mathbb{N}$; alors $\nu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ défini par $\nu(k) = \mu(g(k))$ est une sous-suite ; on utilise la notation $[a_{i_k}]_{k=1}^{\infty}$ ou a_{i_k} ou $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \dots$, signifiant que $g(k) = i_k$.

La suite $[a_i]$ est bornée si l'ensemble des valeurs de la suite est borné ou, ce qui revient au même, s'il existe $M \in \mathbb{R}$ avec $|a_i| < M$ $i = 1, 2, 3, \dots$. La suite $[a_i]$ converge vers $a \in \mathbb{R}^n$ si $\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \exists |a_i - a| < \epsilon$ pour $i > N(\epsilon)$; la suite est dite alors convergente, a est la limite de la suite et l'on écrit $a = \lim_{i \rightarrow \infty} a_i$. La suite $[a_i]$ est de Cauchy si $\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \exists |a_i - a_j| < \epsilon$ si $i, j > N(\epsilon)$.

On vérifie immédiatement qu'une suite convergente est bornée et que toute sous-suite d'une suite convergeant vers $a \in \mathbb{R}^n$ converge également vers a .

Notation. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $[a_i]$ une suite dans \mathbb{R}^n ; on écrit $[a_i] \subset A$ si $a_i \in A \forall i \in \mathbb{N}$.

Théorème 1.5.1. Soit $[a_i] \subset \mathbb{R}^n$, $a_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n})$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = b$
- $\lim_{i \rightarrow \infty} a_{i,k} = b_k$, $k = 1, 2, \dots, n$
- \forall voisinage V de b , $\exists N$ tel que $a_i \in V$ pour $i > N$.

Démonstration. a) \Rightarrow b) . Soit $\epsilon > 0$ donné ; par hypothèse

$\exists N \exists |a_i - b| < \epsilon$ si $i > N$; pour chaque $k = 1, 2, \dots, n$, on a alors $|a_{i,k} - b_k| \leq |a_i - b| < \epsilon$ si $i > N$, donc $\lim_{i \rightarrow \infty} a_{i,k} = b_k$.

b) \Rightarrow a) . Soit $\epsilon > 0$ donné ; par hypothèse

$\exists N_k \exists |a_{i,k} - b_k| < \epsilon/n$ si $i > N_k$ et ceci pour chaque $k = 1, 2, \dots, n$ pour $i > \max(N_1, N_2, \dots, N_n)$ on a

$$|a_i - b| = \left(\sum_{k=1}^n (a_{i,k} - b_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \left(\sum_{k=1}^n (\epsilon/n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \epsilon/\sqrt{n} < \epsilon ;$$

donc $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = b$.

a) \Rightarrow c) . Soit V un voisinage de b et $\rho > 0$ tel que $B(b, \rho) \subset V$; par hypothèse il existe N tel que $|a_i - b| < \rho$ pour $i > N$; donc $a_i \in V$ pour $i > N$.

c) \Rightarrow a) . Soit $\epsilon > 0$ donné ; $B(b, \epsilon)$ est un voisinage de b ; il existe donc N tel que $|a_i - b| < \epsilon$ si $i > N$.

Corollaire. La limite d'une suite convergente est unique.

Démonstration. Pour $n = 1$, le fait est établi par le corollaire du théorème 1.3.8 ; le théorème 1.5.1. b le généralise pour n quelconque.

Théorème 1.5.2. Soit $[a_i] \subset \mathbb{R}^n$, $[b_i] \subset \mathbb{R}^n$, $[\gamma_i] \subset \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $\delta \in \mathbb{R}$. On a

a) $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a, \lim_{i \rightarrow \infty} b_i = b \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} (a_i + b_i) = a + b ;$

b) $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} (\delta a_i) = \delta a ;$

c) $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i = \gamma \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i c = \gamma c ;$

d) $[\gamma_i]$ borné, $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0 \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i a_i = 0$

e) $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i = 0$, $[a_i]$ borné $\Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i a_i = 0$

f) $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i = \gamma$, $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i a_i = \gamma a ;$

g) $\gamma_i \neq 0 \forall i \in \mathbb{N}$, $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i = \gamma \neq 0$, $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma_i} a_i = \frac{1}{\gamma} a .$

Démonstration. a) Soit $\epsilon > 0$ donné ; par hypothèse $\exists N_1$ et N_2
 $\rightarrow |a_i - a| < \epsilon/2$ pour $i > N_1$ et $|b_i - b| < \epsilon/2$ pour $i > N_2$;
 pour $i > \max(N_1, N_2)$ on a $|(a_i + b_i) - (a + b)| \leq |a_i - a| +$
 $|b_i - b| < \epsilon$; donc $\lim_{i \rightarrow \infty} (a_i + b_i) = a + b$.

b) Si $\delta = 0$, l'affirmation est triviale ; supposons
 $\delta \neq 0$ et soit $\epsilon > 0$ donné ; par hypothèse $\exists N \exists |a_i - a| < \epsilon/|\delta|$
 pour $i > N$; donc pour $i > N$: $|\delta a_i - \delta a| = |\delta| |a_i - a| < \epsilon$;
 donc $\lim_{i \rightarrow \infty} \delta a_i = \delta a$.

c) Démonstration analogue à b) .

d) Par hypothèse, $\exists M \in \mathbb{R}$ avec $|\gamma_i| < M \forall i \in \mathbb{N}$.
 Soit $\epsilon > 0$ donné ; par hypothèse, $\exists N \exists |a_i| < \epsilon/M$ pour $i > N$;
 alors pour $i > N$, $|\gamma_i a_i| = |\gamma_i| |a_i| < M \cdot \epsilon/M = \epsilon$; donc
 $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i a_i = 0$.

e) Démonstration analogue à d) .

f) On a $\gamma_i a_i = \gamma_i (a_i - a) + \gamma_i a$; on utilise les
 résultats a), b) et d) ; $[\gamma_i]$ est borné, $\lim_{i \rightarrow \infty} (a_i - a) = 0$, donc
 $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i (a_i - a) = 0$ et l'on a $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i a_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i a = \gamma a$.

g) En tenant compte du résultat f , il suffit de
 montrer que $\lim_{i \rightarrow \infty} 1/\gamma_i = 1/\gamma$; on a

$$\frac{1}{\gamma_i} - \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\gamma_i} \left\{ \frac{\gamma - \gamma_i}{\gamma} \right\} ;$$

il faut montrer que la limite du membre de gauche est nulle ; or
 $\lim_{i \rightarrow \infty} (\gamma - \gamma_i)/\gamma = 0$; il suffit donc (résultat d) de montrer que la
 suite $[1/\gamma_i]$ est bornée ; or, par hypothèse, il existe $\rho > 0$
 tel que $\gamma_i \geq \rho \forall i \in \mathbb{N}$ et par conséquent tel que $\frac{1}{\gamma_i} \leq \frac{1}{\rho} < \infty$.

Théorème 1.5.3. $[a_i] \subset \mathbb{R}^n$ converge $\Leftrightarrow [a_i]$ est de Cauchy.

Démonstration. a) Supposons que $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = b$ et montrons que $[a_i]$ est de Cauchy. Soit $\epsilon > 0$ donné ; $\exists N \exists |a_i - b| < \epsilon/2$ si $i > N$; alors $i, j > N$ implique $|a_i - a_j| \leq |a_i - b| + |b - a_j| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$

b) Supposons $[a_i]$ de Cauchy ; posons $a_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n})$; on vérifie immédiatement que $[a_{i,k}]_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ est de Cauchy pour chaque $k = 1, 2, \dots, n$; d'après le théorème 1.3.9 chacune de ces n suites possède une limite ; soit $b_k = \lim_{i \rightarrow \infty} a_{i,k}$ et $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$; d'après le théorème 1.5.1. $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = b$, donc $[a_i]$ est une suite convergente. Q.E.D.

Théorème 1.5.4. (Bolzano-Weierstrass). Une suite bornée $[a_i] \subset \mathbb{R}^n$ possède une sous-suite convergente .

Démonstration. On utilise le théorème 1.3.10 valable pour des suites dans \mathbb{R} . Notons $a_i = (a_{i,1}, \dots, a_{i,n})$; puisque $[a_i] \subset \mathbb{R}^n$ est bornée il en va de même de chacune des n suites $[a_{i,k}]_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$; $[a_{i,1}]_{i=1}^{\infty}$ possède une sous-suite $[a_{j,1}]_{j=1}^{\infty}$ convergente ; posons $a_j^{(1)} = a_{j,1} \in \mathbb{R}^n$; la suite $[a_{j,2}^{(1)}]_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ possède une sous-suite convergente $[a_{j,2}^{(1)}]_{j=1}^{\infty}$; posons $a_\ell^{(2)} = a_{j_\ell}^{(1)}$; la suite $[a_{\ell,3}^{(2)}]_{\ell=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ possède une sous-suite convergente ; en répétant n fois ce processus d'extraction de sous-suites on obtient une sous-suite $[a_i^{(n)}]_{i=1}^{\infty}$ de la suite initiale $[a_i]$ telle que chacune des n suites $[a_{i,n}^{(n)}]_{i=1}^{\infty}$ converge ; ceci entraîne (théorème 1.5.1) la convergence de la suite $[a_i^{(n)}]_{i=1}^{\infty}$.

Théorème 1.5.5. $A \subset \mathbb{R}^n$ est fermé \iff toute suite convergente $[a_i] \subset A$ converge vers un élément de A .

Démonstration. a) Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ fermé et soit $[a_i] \subset A$ avec $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a$; il faut montrer que $a \in A$. Supposons, par l'absurde que $a \notin A$; soit V un voisinage de a ; $\exists N \exists a_i \in V$ pour $i > N$ (théorème 1.5.1.) ; tout voisinage V contenant un point de A et un point de A^c (le point a précisément), a est point frontière, ce qui est impossible (corollaire du théorème 1.4.8).

b) Soit A non fermé et construisons une suite $[a_i] \subset A$ telle que $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i \notin A$. Puisque A n'est pas fermé, il existe un point frontière a de A n'appartenant pas à A (corollaire du théorème 1.4.8). $\forall i \in \mathbb{N}$, $\exists a_i \in B(a, \frac{1}{i}) \cap A$. Il reste alors à montrer que $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a$; soient $\varepsilon > 0$ donné et $N \in \mathbb{N}$ $1/N < \varepsilon$; alors pour $i > N$ $|a - a_i| < 1/i < 1/N < \varepsilon$. Q.E.D.

I.6. Continuité.

Définition. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application de A dans \mathbb{R}^m . f est continue en $a \in A$ si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta(\epsilon) > 0$ tq $x \in A$ et $|x - a| < \delta(\epsilon)$ implique $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. f est continue si f est continue en tout $a \in A$.

Théorème 1.6.1. Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Les conditions suivantes sont équivalentes : a) f est continue en $a \in A$;
b) pour toute suite $[a_i] \subset A$ avec $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a$, on a $\lim_{i \rightarrow \infty} f(a_i) = f(a)$;
c) pour tout voisinage $W \subset \mathbb{R}^m$ de $f(a)$, il existe un voisinage $V \subset \mathbb{R}^n$ de a tel que $f(V \cap A) \subset W$.

Démonstration. a) \Rightarrow b) . On suppose f continue en a et $[a_i] \subset A$ avec $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a$; il faut montrer que $\lim_{i \rightarrow \infty} f(a_i) = f(a)$. Soit $\epsilon > 0$ donné ; $\overset{i \rightarrow \infty}{\lim} a_i = a$ par hypothèse, $\exists \eta > 0 \exists |x - a| < \eta$, $x \in A$ implique $|f(x) - f(a)| < \epsilon$; d'autre part, $\exists N \exists |a_i - a| < \eta$ si $i > N$; donc $|f(a_i) - f(a)| < \epsilon$ si $i > N$ ce qui signifie $\lim_{i \rightarrow \infty} f(a_i) = f(a)$

b) \Rightarrow c) . Supposons, par l'absurde, b) vrai et c) faux. Dire que c) est faux signifie qu'il existe un voisinage $W \subset \mathbb{R}^m$ de $f(a)$ tel que pour tout voisinage $V \subset \mathbb{R}^n$ de a il existe $x \in V \cap A$ avec $f(x) \notin W$; en particulier $\forall i \in \mathbb{N}$, $\exists a_i \in B(a, 1/i) \cap A$ avec $f(a_i) \notin W$; on vérifie aisément que $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a$; par contre (théorème 1.5.1.) $[f(a_i)]$ ne converge pas vers $f(a)$, contradiction.

c) \Rightarrow a) . On suppose c) vérifié. Montrons que a) est également vérifié ; soit $\epsilon > 0$; il existe V , voisinage de a , tel que $x \in V \cap A$ implique $f(x) \in B(f(a), \epsilon)$; $\exists \eta > 0 \exists B(a, \eta) \subset V$; par conséquent $|x - a| < \eta$, $x \in A$ implique $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ donc f est continue en a .

Théorème 1.6.2. Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et soit $f_k : A \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, m$ les applications telles que $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) \in \mathbb{R}^m \forall x \in A$. Alors f est continue en a si et seulement si les m applications f_1, \dots, f_m sont simultanément continues en a .

Démonstration. On utilise les théorèmes 1.5.1. et 1.6.1. . On a :
 f est continue en $a \iff$ pour toute suite $[a_i] \subset A$ avec $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a$
on a $\lim_{i \rightarrow \infty} f(a_i) = f(a) \iff$ pour toute suite $[a_i] \subset A$ avec $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a$
on a $\lim_{i \rightarrow \infty} f_k(a_i) = f_k(a), k = 1, 2, \dots, m \iff f_1, f_2, \dots, f_m$ sont
simultanément continues en a .

Théorème 1.6.3. Soit $c \in \mathbb{R}^n$. La fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ définie par $f(x) = |x - c|$ est continue.

Démonstration. Montrons que f est continue en un point $a \in \mathbb{R}^n$.
Le théorème 1.4.1. c) donne :

$|f(x) - f(a)| = ||x - c| - |a - c|| \leq |(x - c) - (a - c)| = |x - a|$
donc $|x - a| \leq \epsilon$ implique $|f(x) - f(a)| \leq \epsilon$. Q.E.D.

Définition. Soient A et B deux sous-ensembles de \mathbb{R}^n . On appelle trace de B dans A l'ensemble $B \cap A$.

Théorème 1.6.4. Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application définie sur un sous-ensemble A de \mathbb{R}^n . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) f est continue dans A ;
- b) Pour tout ouvert $W \subset \mathbb{R}^m$, $f^{-1}(W)$ est la trace d'un ouvert de \mathbb{R}^n dans A ;
- c) Pour tout fermé $W' \subset \mathbb{R}^m$, $f^{-1}(W')$ est la trace d'un fermé de \mathbb{R}^n dans A .

Démonstration. a) \Rightarrow c) Soit $W' \subset \mathbb{R}^m$ un sous-ensemble fermé, et notons \bar{B} la fermeture de $f^{-1}(W')$ (dans \mathbb{R}^n). On a $\bar{B} \cap A \supset f^{-1}(W')$. Or, étant donné $b \in \bar{B} \cap A$, il existe une suite $[b_i] \subset f^{-1}(W')$ qui converge vers b . Puisque f est continue, $[f(b_i)]$ converge vers $f(b)$ donc $f(b) \in W'$. Par conséquent $b \in f^{-1}(W')$, d'où $f^{-1}(W') = \bar{B} \cap A$.

c) \Rightarrow b) Soit $W \subset \mathbb{R}^m$ un sous-ensemble ouvert, et notons $W' = W^c$. Par hypothèse, on a $f^{-1}(W') = \overline{f^{-1}(W')} \cap A$. Notons $Q = \overline{f^{-1}(W')}$. Si $a \in f^{-1}(W)$, alors $a \notin f^{-1}(W') = \overline{f^{-1}(W')} \cap A$, donc $a \notin \overline{f^{-1}(W')}$. Ainsi $f^{-1}(W) \subset Q \cap A$. Soit maintenant $b \in Q \cap A$. On a $b \notin f^{-1}(W')$ donc $b \in f^{-1}(W) = \overline{f^{-1}(W')} \cap A$ et par conséquent $b \in f^{-1}(W) = \bigcup_A (f^{-1}(W'))$. Ainsi $f^{-1}(W) = Q \cap A$.

b) \Rightarrow a) Etant donné un point $x \in A$ quelconque, soit V un voisinage de $f(x)$ et $\tilde{B}(f(x), \rho) \subset V$ une boule ouverte centrée en $f(x)$. Par b) on peut écrire $f^{-1}(\tilde{B}) = Q \cap A$, où Q est un ouvert de \mathbb{R}^n contenant x , et $f(Q \cap A) = \tilde{B} \subset V$. On en conclut que f est continue en x grâce au théorème 1.6.1. Q.E.D.

Corollaire.

(i) Soit A un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$. Alors f est continue si et seulement si pour tout ouvert $W \subset \mathbb{R}^m$, $f^{-1}(W)$ est ouvert.

(ii) Soit A un fermé de \mathbb{R}^n et $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$. Alors f est continue si et seulement si pour tout fermé $W' \subset \mathbb{R}^m$, $f^{-1}(W')$ est fermé.

(iii) En particulier :

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est continue \Leftrightarrow L'image inverse de tout ouvert est ouverte
 \Leftrightarrow L'image de tout fermé est fermée.

Démonstration. (i) et (ii) sont évidents. Comme \mathbb{R}^n est à la fois ouvert et fermé, (iii) résulte de (i) et de (ii).

Théorème 1.6.5. Soient $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $g : B \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ avec $f(A) \subset B$ et $h : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$ définie par $h(x) = g(f(x))$, $x \in A$. Supposons f continue en a et g continue en $f(a)$; alors h est continue en a .

Démonstration. On utilise le théorème 1.6.1. Soit $Z \subset \mathbb{R}^p$ un voisinage de $h(a)$; puisque g est continue en $f(a)$, il existe $W \subset \mathbb{R}^m$ voisinage de $f(a)$ tel que $g(W \cap B) \subset Z$; puisque f est continue en a , il existe $V \subset \mathbb{R}^n$ voisinage de a tel que $f(V \cap A) \subset W$; puisque $f(A) \subset B$ on aura $f(V \cap A) \subset W \cap B$ et $h(V \cap A) = g(f(V \cap A)) \subset g(W \cap B) \subset Z$. Q.E.D.

Des théorèmes 1.5.2. et 1.6.1. on déduit immédiatement le théorème qui suit.

Théorème 1.6.6. Soient f et $g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continues en $a \in A$; soit $\lambda \in \mathbb{R}$

a) Les fonctions $f + g$ et λg de A dans \mathbb{R}^m sont continues en a ;

b) Si $m = 1$, la fonction $f \cdot g$ de A dans \mathbb{R} est continue en a ; si, de plus, $g(x) \neq 0 \forall x \in A$, alors la fonction f/g de A dans \mathbb{R} est continue en a .

Définition. Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et soit a un point d'accumulation de A (appartenant ou non à A). On dira que $c \in \mathbb{R}^m$ est la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ tel que $0 < |x - a| < \delta$, $x \in A$, implique $|f(x) - c| < \varepsilon$ on écrira alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$.

Théorème 1.6.7. Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et soit a un point d'accumulation de A . Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$

b) pour toute suite $[a_i] \subset A$ telle que $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a$

et $a_i \neq a \forall i \in \mathbb{N}$ on a $\lim_{i \rightarrow \infty} f(a_i) = c$.

Démonstration.

a) \Rightarrow b) Supposons $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ et soit $[a_i] \subset A$, $a_i \neq a \forall i \in \mathbb{N}$, $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a$; montrons que $\lim_{i \rightarrow \infty} f(a_i) = c$. Soit $\epsilon > 0$ donné; par hypothèse, il existe $\eta > 0$ tel que $0 < |x - a| < \eta$, $x \in A$ implique $|f(x) - c| < \epsilon$; il existe également N tel que $|a_i - a| < \eta$ pour $i > N$; puisque $a_i \neq a$ on aura $|f(a_i) - c| < \epsilon$ pour $i > N$ et par conséquent $\lim_{i \rightarrow \infty} f(a_i) = c$.

b) \Rightarrow a) Supposons, par l'absurde, que la condition b) soit satisfaite mais que la condition a) ne le soit pas. Dire que la condition a) n'est pas réalisée signifie qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$ il existe x tel que $0 < |x - a| < \eta$, $x \in A$ et $|f(x) - c| \geq \epsilon$; en particulier $\forall i \in \mathbb{N} \exists a_i$ tel que $0 < |x - a_i| < \frac{1}{i}$, $a_i \in A$ et $|f(x) - c| \geq \epsilon$; on vérifie immédiatement que $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a$ mais que la suite $[f(a_i)]_{i=1}^{\infty}$ ne converge pas vers c .

Corollaire. Soient $B \subset A \subset \mathbb{R}^m$, a un point d'accumulation de B , $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $g = f|_B$ la restriction de f à B .

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$, alors $\lim_{y \rightarrow a} g(y) = c$.

Démonstration. Quelle que soit la suite $[y_i]$ de points de B qui converge vers a , on a $g(y_i) = f(y_i)$ et par conséquent $\lim_{i \rightarrow \infty} g(y_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(y_i) = c$. Donc $\lim_{y \rightarrow a} g(y) = c$. Q.E.D.

Théorème 1.6.8. Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et soit a un point d'accumulation de A . La limite de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow a$, si elle existe, est unique.

Démonstration. La limite d'une suite est unique. Il suffit donc, d'après le théorème 1.6.7, de montrer qu'il existe une suite $[a_i] \subset A$ telle que $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a$ et $a_i \neq a \forall i \in \mathbb{N}$. Puisque a est un point d'accumulation le voisinage $B(a, 1/i)$ de a ($i \in \mathbb{N}$) contient une infinité de point de A donc au moins un point $a_i \neq a$; on vérifie immédiatement que $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a$.

Théorème 1.6.9. Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et soit $a \in A$ un point d'accumulation de A . Alors f est continue en a si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Démonstration. a) Supposons f continue en a ; soit $\epsilon > 0$ donné; $\exists \delta \exists |x - a| < \delta, x \in A$ implique $|f(x) - f(a)| < \epsilon$; par conséquent $0 < |x - a| < \delta, x \in A$ implique $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ ce qui signifie que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

b) Supposons que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$; soit $\epsilon > 0$ donné; $\exists \delta \exists 0 < |x - a| < \delta, x \in A$ implique $|f(x) - f(a)| < \epsilon$; pour $x = a$, on a $|f(x) - f(a)| = 0 < \epsilon$; donc $|x - a| < \delta, x \in A$ implique $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ ce qui signifie que f est continue en a .

Des théorèmes 1.5.2. et 1.6.7. on déduit immédiatement le théorème qui suit.

Théorème 1.6.10. Soient f et $g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$; soit a un point d'accumulation de A ; on suppose $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$,

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = d$; soit encore $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$a) \lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = c + d; \lim_{x \rightarrow a} (\lambda f)(x) = \lambda c.$$

$$b) \text{ Si } m = 1, \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = cd; \text{ de plus}$$

si $g(x) \neq 0 \forall x \in A$ et si $d \neq 0$, alors $\lim_{x \rightarrow a} (f/g)(x) = c/d$.

I.7. Compacts. Continuité uniforme.

Définition. Une famille $\{O_i\}_{i \in I}$ où tous les O_i sont des ouverts de \mathbb{R}^n est un recouvrement ouvert de $A \subset \mathbb{R}^n$ si $A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$

Théorème 1.7.1. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- a) A est borné et fermé ;
- b) de toute suite $[a_i] \subset A$, on peut extraire une sous-suite convergeant vers un élément a de A ;
- c) de tout recouvrement ouvert de A on peut extraire un recouvrement fini de A , c'est-à-dire une sous-famille ne comportant qu'un nombre fini d'éléments .

Démonstration. a) \Rightarrow b) On suppose A borné et fermé et soit $[a_i] \subset A$; cette suite est bornée et possède donc par le théorème de Bolzano-Weierstrass (théorème 1.5.4) une sous-suite qui converge vers un point a ; puisque A est fermé, $a \in A$ (théorème 1.5.5).

b) \Rightarrow c) On suppose que A possède la propriété b). Soit $\{O_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de A . Considérons un élément $x \in A$ et l'ensemble des boules (non vides) de centre x et contenues dans au moins un des ouverts O_i du recouvrement ; il existe au moins une telle boule puisque x appartient à l'un des O_i au moins ; soit $E_x \subset \mathbb{R}$ l'ensemble de tous les rayons de ces boules ; si cet ensemble est borné on pose $\rho(x) = \sup E_x$; si cet ensemble n'est pas borné, on pose $\rho(x) = 1$; x pouvant être un élément quelconque de A , on a en fait défini une application de A dans \mathbb{R} qui à x fait correspondre $\rho(x) > 0$. Nous pouvons maintenant décrire un processus d'extraction. Soit $a_1 \in A$; on considère la boule $B(a_1, \rho(a_1)/2) = B_1$; si $A \subset B_1$, le processus est terminé ; sinon $\exists a_2 \in A \cap B_1^c$ et soit alors $B_2 = B(a_2, \rho(a_2)/2)$; si $A \subset B_1 \cup B_2$ le processus est terminé ; sinon $\exists a_3 \in A \cap (B_1 \cup B_2)^c$ et soit alors $B_3 = B(a_3, \rho(a_3)/2)$; si $A \subset B_1 \cup B_2 \cup B_3$ le processus est terminé ; sinon il existe $a_4 \in A \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3)^c$ etc.

Nous envisageons deux alternatives. 1 cas. Le processus s'arrête après n pas ; alors $A \subset B_1 \cup B_2 \cup B_3 \dots \cup B_n$; par construction il existe un ouvert O_{i_k} du recouvrement qui contient B_k , de sorte que la sous-famille finie $\{O_{i_k}\}_{k=1, \dots, n}$ recouvre A : $A \subset O_{i_1} \cup O_{i_2} \dots \cup O_{i_n}$. 2 cas. Le processus est infini ; montrons que cette hypothèse conduit à une contradiction et qu'elle doit par conséquent être exclue ; le processus infini définit une suite $[a_i]_{i=1}^{\infty}$ dont on peut extraire, par hypothèse, une sous-suite $[a_{i_k}]_{k=1}^{\infty}$ convergent vers un point $a \in A$; cette sous-suite est de Cauchy (théorème 1.5.3), d'où l'on conclut facilement que $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_{i_{k+1}} - a_{i_k}| = 0$; par construction $\rho(a_{i_k}) / 2 \leq |a_{i_{k+1}} - a_{i_k}|$ et par conséquent $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(a_{i_k}) = 0$. Soit N_1 et N_2 tels que $|a_{i_k} - a| < \rho(a)/8$ pour $k > N_1$ et $\rho(a_{i_k}) < \min(1, \rho(a))/8$ pour $k > N_2$; soit $j \in \mathbb{N} \exists j > \max(N_1, N_2)$; on vérifie immédiatement (théorème 1.4.2 a) la relation $B(a_{i_j}, \rho(a)/4) \subset B(a, \rho(a)/2)$; d'autre part il existe $i \in I$ tel que $B(a, \rho(a)/2) \subset O_{i_j}$ et par conséquent $B(a_{i_j}, \rho(a)/4) \subset O_{i_j}$ cette dernière relation implique, par définition même de $\rho(a_{i_j})$ que $\rho(a_{i_j}) \geq \min(1, \rho(a)/4) \geq \min(1, \rho(a))/4$ ce qui contredit puisque $j > N_2$, la relation $\rho(a_{i_k}) < \min(1, \rho(a))/8$.

c) \implies a) On suppose que A jouit de la propriété c) . Montrons d'abord que A est borné ; considérons la famille $\{B(x, 1)\}_{x \in A}$ qui est manifestement un recouvrement ouvert de A ; par hypothèse, on peut extraire une famille finie correspondant à des centres a_1, a_2, \dots, a_n , on a donc $A \subset \bigcup_{i=1}^n B(a_i, 1)$ et par conséquent $|x| < (\max_{i=1..n} |a_i|) + 1 \forall x \in A$; donc A est borné. Montrons encore que A est fermé ; soit $a \in A^c$; il faut montrer que A^c est un voisinage de a ; soit $C_i = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| > \frac{1}{i}\}$; C_i est ouvert (théorème 1.4.4 d) ; d'autre part $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ est \mathbb{R}^n

entier moins le point a qui n'appartient pas à A ; donc $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est un recouvrement ouvert de A dont on peut, par hypothèse, extraire un recouvrement fini $C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_j}$; soit $i_j > i_{j-1} > \dots > i_1$; alors $A \subset C_{i_j}$ et $a \in B(a, 1/i_j) \subset C_{i_j}^c \subset A^c$ ce qui montre bien que A^c est un voisinage de a .

Définition. A est un compact de \mathbb{R}^n s'il satisfait à l'une des propriétés a), b) ou c) du théorème 1.7.1.

Corollaire du théorème 1.7.1. Un sous-ensemble fermé d'un ensemble compact est compact.

Démonstration. Un sous-ensemble d'un ensemble borné est borné.

Des théorèmes 1.7.1, 1.4.4, 1.4.7, 1.4.9, on obtient le théorème suivant.

Théorème 1.7.2. Soit $a \in \mathbb{R}^n$, $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$. Les ensembles $\{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| \leq \rho\}$ et $\{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| = \rho\}$ sont compacts.

Théorème 1.7.3. Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continue, A compact ; alors $f(A) \subset \mathbb{R}^m$ est compact.

Démonstration. Soit $\{O_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $f(A)$, et \hat{O}_i un ouvert de \mathbb{R}^n tel que $f^{-1}(O_i) = \hat{O}_i \cap A$ (théorème 1.6.4). La famille $\{\hat{O}_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de A dont on peut extraire un sous-recouvrement fini (théorème 1.7.1) noté $\{\hat{O}_{i_k}\}$. Il en résulte que la famille finie $\{O_{i_k}\}$ recouvre déjà $f(A)$. Q.E.D

Corollaire. Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continue, A compact. Alors $f(A)$ est borné.

Théorème 1.7.4. Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, A compact non vide. Alors f prend son maximum et son minimum sur A , c'est-à-dire: il existe a et $b \in A$ tels que $f(a) \geq f(x)$ et $f(b) \leq f(x) \forall x \in A$.

Démonstration. L'image $f(A)$ est compacte, donc fermée et bornée, donc $m = \sup f(A)$ et $m' = \inf f(A)$ existent. Comme par définition ce sont des points frontières, ils appartiennent à $f(A)$ (corollaire du théorème 1.4.8). Il existe donc a tel que $f(a) = \sup f(A)$ et b tel que $f(b) = \inf f(A)$. Q.E.D.

Théorème 1.7.5. Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continue, injective, A compact. Alors $f^{-1} : f(A) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.

Démonstration. L'image inverse par f^{-1} d'un fermé W est l'image directe par f du fermé W . Or $W \subset A$ est compact (corollaire du théorème 1.7.1), son image par f est compacte (théorème 1.7.3) donc fermée. Par conséquent f^{-1} est continue (corollaire du théorème 1.6.4).

Théorème 1.7.6. (Lebesgue) Etant donné un sous-ensemble compact $A \subset \mathbb{R}^n$ et un recouvrement ouvert de A , il existe un nombre $\rho > 0$ tel que pour tout $x \in A$, la boule $B(x, \rho)$ est contenue dans l'un au moins des ouverts du recouvrement.

Démonstration. Soit $\{O_j\}_{j \in I}$ un recouvrement de A . Quelque soit $x \in A$, il existe une boule $B(x, \rho(x))$ contenue dans l'un des O_j au moins. Du recouvrement $\{B(x, \rho(x)/2)\}_{x \in A}$ on peut extraire, par hypothèse, un sous-recouvrement fini $\{B(x_i, \rho(x_i)/2)\}$. Soit $\rho = \inf_i (\rho(x_i)/2)$, et $x \in A$ un élément quelconque. Il existe un i tel que $x \in B(x_i, \rho(x_i)/2)$ et par conséquent tel que $B(x, \rho) \subset B(x_i, \rho(x_i))$. Par construction $B(x_i, \rho(x_i))$ est contenue dans l'un des O_j et le théorème est démontré.

Définition. Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. f est uniformément continue si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta(\epsilon) > 0$ indépendant de $a \in A$ tel que $|x - a| < \delta(\epsilon)$, $x \in A$ implique $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Remarque. La continuité de f (dite parfois continuité simple) s'exprime de la façon suivante :

$\forall \epsilon > 0$, $\forall a \in A$, $\exists \eta(\epsilon, a) > 0$ $\exists |x - a| < \eta(\epsilon, a)$, $x \in A$ implique $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Théorème 1.7.7. Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continue, A compact. Alors f est uniformément continue.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$; puisque f est continue, $\forall a \in A$, $\exists \eta(\epsilon, a) > 0$ tel que $x \in A$, $|x - a| < \eta(\epsilon, a)$ implique $|f(x) - f(a)| < \epsilon/2$. La famille $\{B(a, \eta(\epsilon, a)/2)\}_{a \in A}$ forme un recouvrement ouvert de A (théorème 1.4.4 c) d'où l'on peut extraire un recouvrement fini correspondant aux centres a_1, a_2, \dots, a_p ; ainsi $A \subset \bigcup_{i=1}^p B(a_i, \eta(\epsilon, a_i)/2)$. Posons $\delta(\epsilon) = (\min_{i=1,2,\dots,p} \eta(\epsilon, a_i))/2$ soit a et $x \in A$, $|x - a| < \delta(\epsilon)$; il existe $j \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq j \leq p$ tel que $a \in B(a_j, \eta(\epsilon, a_j)/2)$; alors $x \in B(a_j, \eta(\epsilon, a_j)/2)$ et par conséquent

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f(a_j)| + |f(a_j) - f(a)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

Q.E.D.

Définition. Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$; soit $E \subset \mathbb{R}_+$ l'ensemble des valeurs δ telles que soit définie la quantité

$$\omega(\delta) = \sup_{\substack{|x-a| \leq \delta \\ x, a \in A}} |f(x) - f(a)| ;$$

$\omega : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est le module de continuité de f .

Théorème 1.7.8. Soient $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\omega(\delta)$ le module de continuité de f . f est uniformément continue si et seulement si $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta) = 0$.

Démonstration. On remarque d'abord que l'expression $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta)$ n'a de sens que si 0 est un point d'accumulation du domaine E de définition de ω ; or il est clair que si $0 < \delta_1 < \delta_2$ et que si ω est défini en δ_2 , alors ω est aussi défini en δ_1 ; donc 0 est point d'accumulation de E si et seulement si E contient un élément positif.

a) Supposons d'abord que f est uniformément continue ; soit $\epsilon > 0$ donné ; $\exists \bar{\delta} \exists |x - a| < \bar{\delta}, x, a \in A$ implique $|f(x) - f(a)| < \epsilon/2$; cela signifie en particulier que $\omega(\bar{\delta}/2) = \sup_{\substack{|x-a| \leq \bar{\delta}/2 \\ x, a \in A}} |f(x) - f(a)| \leq \sup_{\substack{|x-a| < \bar{\delta} \\ x, a \in A}} |f(x) - f(a)| \leq \epsilon/2 < \epsilon$; donc ω est défini pour $\bar{\delta}/2 > 0$; par ailleurs, ω est manifestement une fonction monotone croissante c'est-à-dire $\omega(\delta_1) \leq \omega(\delta_2)$ si $\delta_1 \leq \delta_2$; donc $\omega(\delta) < \epsilon$ si $0 < \delta < \bar{\delta}/2$; ceci prouve que $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta) = 0$.

b) Supposons que le domaine de définition de ω contienne l'intervalle $[0, \alpha]$ avec $\alpha > 0$ et supposons $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta) = 0$. Soit $\epsilon > 0$; il existe $\bar{\delta}$ tel que $0 < \delta < \bar{\delta}$ implique $\omega(\delta) < \epsilon$, en particulier $\omega(\bar{\delta}/2) < \epsilon$ et par conséquent $|x - a| < \bar{\delta}/2$, $x, a \in A$ implique $|f(x) - f(a)| < \epsilon$; f est donc uniformément continue.

I.8. Séries.

Définitions. Soit $[a_i]_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ une suite. A cette suite on associe la suite $[S_m]_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ des sommes partielles où $S_m = \sum_{i=1}^m a_i$. L'expression $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ est une série. La série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge vers $a \in \mathbb{R}^n$ si $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = a$; on écrit alors $a = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$; a est la somme de la série. La série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge absolument si la série de nombres non négatifs $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ converge.

Des théorèmes 1.5.1. et 1.5.2. on déduit immédiatement le théorème suivant.

Théorème 1.8.1. Soient $[a_i] \subset \mathbb{R}^n$, $[b_i] \subset \mathbb{R}^n$, $a_i = (a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$, $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- a) $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = c$ si et seulement si $\sum_{i=1}^{\infty} a_{i_k} = c_k$ pour $k = 1, 2, \dots, n$.
- b) Si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ et $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ sont des séries convergentes, alors $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i$ et $\sum_{i=1}^{\infty} (\lambda a_i) = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} a_i$

De même le théorème 1.5.3. implique le théorème suivant.

Théorème 1.8.2. (critère de Cauchy). Soit $[a_i] \subset \mathbb{R}^n$. Alors $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge si et seulement si $\forall \epsilon > 0 \exists N$ tel que $|\sum_{i=j}^k a_i| < \epsilon$ pour $k > j > N$.

Corollaire 1. Si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge, alors $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0$.

Démonstration. $\forall \epsilon > 0, \exists N \rightarrow |\sum_{i=j}^{j+1} a_i| = |a_j| < \epsilon$; donc $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = 0$

Remarque. La propriété $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0$ est une condition nécessaire mais non suffisante de convergence.

Ainsi, la série harmonique dans \mathbb{R} , $\sum_{i=1}^{\infty} 1/i$ diverge, bien que son terme général $1/i$ converge vers 0 lorsque $i \rightarrow \infty$.

Corollaire 2. (séries alternées). Soit $[a_i] \subset \mathbb{R}$ telle que
 1) $a_i \cdot a_{i+1} \leq 0 \forall i \in \mathbb{N}$, 2) $|a_{i+1}| \leq |a_i| \forall i \in \mathbb{N}$, 3) $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0$
 Alors la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge.

Démonstration. Les conditions 1) et 2) impliquent que
 $|\sum_{i=j}^k a_i| \leq |a_j|$ pour $k > j$; la condition 3) montre alors que le critère de Cauchy est satisfait.

Corollaire 3. (comparaison de séries). Soient $[a_i] \subset \mathbb{R}^n$, $[c_i] \subset \mathbb{R}_+$ telles que 1) $|a_i| < c_i \forall i \in \mathbb{N}$, 2) $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ converge.
 Alors $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ donné. Puisque $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ converge,
 $\exists N \exists \exists \sum_{i=j}^k c_i < \epsilon$ pour $k > j > N$; mais alors $|\sum_{i=j}^k a_i| \leq \sum_{i=j}^k c_i < \epsilon$
 donc la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ satisfait au critère de Cauchy et converge.
 En particulierisant le corollaire 3 du cas $c_i = |a_i|$, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 4. Une série absolument convergente converge.

Définition. Soit $[a_i] \subset \mathbb{R}^n$. La série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ est bornée si la suite $[S_m]_{m=1}^{\infty}$ des sommes partielles $S_m = \sum_{i=1}^m a_i$ est bornée.

Théorème 1.8.3. Soit $[a_i] \subset \mathbb{R}$ avec $a_i > 0$; alors la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge si et seulement si elle est bornée.
 De plus $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sup_{m \in \mathbb{N}} (\sum_{i=1}^m a_i)$.

Démonstration. En effet la suite des sommes partielles est monotone croissante. Si elle converge, elle est bornée ; si elle est bornée, elle est majorée et donc converge (théorème 1.3.4) ; l'égalité est également une conséquence du théorème 1.3.4.

Théorème 1.8.4. Soit $[a_i] \subset \mathbb{R}^n$, $a_i = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$.

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ est absolument convergente si et seulement si les n séries $\sum_{i=1}^{\infty} a_{i_k}$ (dans \mathbb{R}), $k = 1, 2, \dots, n$, sont absolument convergentes.

Démonstration. a) Supposons que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge absolument ; $\sum_{i=1}^{\infty} |a_{i_k}|$ converge puisque $|a_{i_k}| \leq |a_i| \equiv c_i$ et que $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ converge (corollaire 3 du théorème 1.8.2).

b) Supposons que $\sum_{i=1}^{\infty} |a_{i_k}|$ converge pour $k = 1, 2, \dots, n$; en désignant par $\ell_k \in \mathbb{R}^n$ l'élément dont toutes les composantes sont nulles sauf la k ème qui vaut 1, on a $a_i = \sum_{k=1}^n a_{i_k} \ell_k$;

par conséquent $|a_i| \leq \sum_{k=1}^n |a_{i_k}| |\ell_k| = \sum_{k=1}^n |a_{i_k}|$. La série

$\sum_{i=1}^{\infty} (\sum_{k=1}^n |a_{i_k}|)$ est convergente (théorème 1.8.1 b) ; donc la série

$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ converge (corollaire 3 du théorème 1.8.2). Q.E.D.

Considérons $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijective ; une telle application est appelée une permutation de \mathbb{N} . Soit $[a_i] \subset \mathbb{R}^n$; considérons les séries $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ et $\sum_{i=1}^{\infty} a_{p(i)}$; on dira que la seconde série est obtenue à partir de la première par permutation des termes

Théorème 1.8.5. Soient $[a_i] \subset \mathbb{R}^n$ et $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijectif. Si la série

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge absolument, alors la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_{p(i)}$ converge et

l'on a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_{p(i)}$.

Démonstration. D'après le théorème 1.8.1. on peut se limiter au cas $n = 1$ c'est-à-dire $a_i \in \mathbb{R}$.

Cas particulier. On suppose tout d'abord que $a_i \in \mathbb{R}_+$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Soit $S_m = \sum_{i=1}^m a_i$, $T_m = \sum_{i=1}^m a_{p(i)}$; puisque p est une bijection,

pour chaque $i \in \mathbb{N}$, il existe $k_i \in \mathbb{N}$ tel que $\{p(1), p(2), \dots, p(k_i)\} \subset \{1, 2, 3, \dots, k_i\}$; alors $T_i \leq S_{k_i}$ et (théorème 1.3.4)

$$T_i \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} S_{k_j} \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} S_j = \sum_{j=1}^{\infty} a_j, \quad i = 1, 2, \dots;$$

ainsi $\sum_{i=1}^{\infty} a_{p(i)}$ est bornée donc convergente (théorème 1.8.3) et

l'on a (théorème 1.3.4)

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{p(i)} = \sup_{i \in \mathbb{N}} T_i \leq \sum_{j=1}^{\infty} a_j; \quad (1)$$

posons $b_i = a_{p(i)}$ et soit $q: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ l'application inverse de p

on aura $a_i = a_{p(q(i))} = b_{q(i)}$; on sait que $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ converge; en

appliquant à $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ le même raisonnement qu'auparavant à $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$

$$\text{on obtient } \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} b_{q(i)} \leq \sum_{i=1}^{\infty} b_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_{p(i)} \quad (2)$$

de (1) et (2), on obtient $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_{p(i)}$.

Cas général. Les a_i sont des éléments quelconques de \mathbb{R} .

Posons $a_i^+ = a_i$ et $a_i^- = 0$ si $a_i \geq 0$; posons $a_i^+ = 0$ et

$a_i^- = -a_i$ si $a_i < 0$; on a $a_i = a_i^+ - a_i^-$; puisque $0 \leq a_i^+ \leq |a_i|$

et $0 \leq a_i^- \leq |a_i| \quad \forall i \in \mathbb{N}$, les séries $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^+$ et $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^-$ convergent

chacune de ces deux séries entre dans le cadre du cas particulier en utilisant de plus le théorème 1.8.1. b on obtient

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^+ - \sum_{i=1}^{\infty} a_i^- = \sum_{i=1}^{\infty} a_{p(i)}^+ - \sum_{i=1}^{\infty} a_{p(i)}^- = \sum_{i=1}^{\infty} a_{p(i)} \quad \text{Q.E.D.}$$

Corollaire. Soit $[a_i] \subset \mathbb{R}^n$, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ convergeant absolument, et soit $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijectif. Alors la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_{p(i)}$ converge absolument.

Démonstration. D'après le théorème 1.8.5 on a : $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| = \sum_{i=1}^{\infty} |a_{p(i)}$

Théorème 1.8.6. Soit $[a_i] \subset \mathbb{R}^n$. Si pour toute bijection $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_{p(i)}$ converge, alors la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge absolument.

Démonstration. Les théorèmes 1.8.1. et 1.8.4. permettent de se limiter au cas $n = 1$, c'est-à-dire de supposer que $a_i \in \mathbb{R}$.

Supposons que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ ne converge pas absolument et montrons qu'il existe une bijection $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\sum_{i=1}^{\infty} a_{p(i)}$ ne converge pas en fait nous allons construire une bijection p telle que $\sum_{i=1}^{\infty} a_{p(i)}$

ne soit pas bornée, donc non convergente. Soit $\mathbb{N}_1 = \{i \in \mathbb{N} : a_i \geq 0\}$
 $\mathbb{N}_2 = \{i \in \mathbb{N} : a_i < 0\}$; pour $i \in \mathbb{N}_1$, posons $a_i^+ = a_i$, $a_i^- = 0$;
 pour $i \in \mathbb{N}_2$, posons $a_i^+ = 0$, $a_i^- = -a_i$; l'une au moins des deux séries $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^+$ et $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^-$ ne converge pas, sinon la série $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ serait égale à $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i^+ + a_i^-) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^+ + \sum_{i=1}^{\infty} a_i^-$ et convergerait donc,

ce qui est contraire à l'hypothèse; supposons, par exemple, que

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^+$ ne converge pas; cela signifie (théorème 1.8.3) que la suite

des sommes partielles n'est pas bornée; on construit $\sum_{i=1}^{\infty} a_{p(i)}$ de

la façon suivante; on prend d'abord m_1 termes de la série donnée

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ correspondant aux m_1 premiers éléments de \mathbb{N}_1 de façon

à ce que leur somme soit > 1 ; on prend ensuite un élément de la

série donnée correspondant au premier élément de \mathbb{N}_2 ; on prend

ensuite m_2 éléments de la série donnée correspondant aux m_2

éléments suivants de \mathbb{N}_1 de façon à ce que la somme des $m_1 + m_2 + 1$ termes déjà définis soit ≥ 2 ; on prend ensuite le terme de la série correspondant au 2ème élément de \mathbb{N}_2 ; puis m_3 éléments de la série donnée correspondant aux m_3 éléments suivants de \mathbb{N}_1 de façon à ce que la somme des $m_1 + m_2 + m_3 + 2$ termes déjà définis soit ≥ 3 etc... On obtient ainsi une série non bornée déduite de la série donnée par permutation. Q.E.D.

Considérons une quantité $a_{ij} \in \mathbb{R}^n$ dépendant des deux indices i et $j \in \mathbb{N}$; il s'agit, en fait d'une application $\mu : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ avec $\mu(i,j) = a_{ij}$. Il existe (théorème 1.2.2) une bijection p de \mathbb{N} dans \mathbb{N}^2 . Supposons que pour toute bijection $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$ avec $p(k) = (r(k), s(k))$ la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_{r(k),s(k)}$ converge ; d'après les théorèmes 1.8.4. et 1.8.5., toutes ces séries auront alors la même limite $a \in \mathbb{R}^n$; dans ces conditions et dans ces conditions seulement, on dira que la série double $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}$ converge vers a et l'on écrira $a = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}$.

Remarque. D'après cette définition de la convergence d'une série double, si $\sum_{i,j} a_{ij}$ converge, alors (théorème 1.8.5) $\sum_{i,j} |a_{ij}|$ converge aussi ; on peut exprimer ceci en disant qu'une série double convergente est nécessairement absolument convergente.

Théorème 1.8.7. a) $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}$ converge $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \right)$ existe
 $\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}| \right)$ existe

b) Si $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}$ existe, alors $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} =$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \right).$$

Démonstration. On utilisera systématiquement le théorème 1.8.3.

a) Montrons : $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}$ converge $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$ converge.

(on omettra désormais les parenthèses redondantes). Supposons que $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}$ converge; soit $p: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$ $p(k) = (r(k), s(k))$, une bijection. Considérons la quantité $\sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{j=1}^{\beta} a_{ij}$; il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{j=1}^{\beta} |a_{ij}| \leq \sum_{k=1}^N |a_{r(k),s(k)}| \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|;$$

on utilise le théorème 1.8.1. b et l'on a successivement :

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{j=1}^{\beta} |a_{ij}| \right) &= \sum_{i=1}^{\alpha} \left\{ \lim_{\beta \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\beta} |a_{ij}| \right\} = \sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}| \\ \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}| \quad ; \quad (1) \end{aligned}$$

cette dernière relation démontre en particulier que

$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$ existe. Réciproquement, supposons que $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$ soit définie. Considérons, pour la bijection p définie plus haut, l'expression $\sum_{k=1}^N |a_{r(k),s(k)}|$; il existe α et β tels que

$$\sum_{k=1}^N |a_{r(k),s(k)}| \leq \sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{j=1}^{\beta} |a_{ij}| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|;$$

on en déduit que $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{r(k),s(k)}|$ converge, que $\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|$ converge avec $\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{r(k),s(k)}| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$. (2)

b) Montrons que si $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}$ existe, alors $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$.

Le théorème 1.8.1. a) nous permet de nous limiter

au cas $n = 1$ c'est-à-dire de supposer que $a_{ij} \in \mathbb{R}$; posons $a_{ij}^+ = a_{ij}$ et $a_{ij}^- = 0$ si $a_{ij} \geq 0$ et $a_{ij}^+ = 0$, $a_{ij}^- = -a_{ij}$ si $a_{ij} < 0$. On remarque que les relations (1) et (2) établissent la relation désirée lorsque $a_{ij} \in \mathbb{R}_+$. On a alors, en utilisant le théorème 1.8.1. b) :

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}^+ - \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}^- = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^+ - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^- = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}.$$

Corollaire. Soit $[a_i] \subset \mathbb{R}$, $[b_j] \subset \mathbb{R}$. Si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ et $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ convergent absolument, on a $(\sum_{i=1}^{\infty} a_i) (\sum_{j=1}^{\infty} b_j) = \sum_{i,j=1}^{\infty} (a_i b_j)$

Démonstration. Grâce au théorème 1.8.1. b), on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \right) b_j = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} (a_i b_j) ;$$

le même calcul appliqué aux suites $[|a_i|]$ et $[|b_j|]$ montre que la quantité $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |a_i b_j|$ est définie ; par conséquent (théorème 1.8.7)

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} (a_i b_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} (a_i b_j) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j \right).$$

I.9. Convergence ponctuelle et uniforme. Convergence normale.

Définitions. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$; considérons pour $i \in \mathbb{N}$ les fonctions $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}^m$; on a ainsi une suite $[f_i]_{i=1}^{\infty}$ qui formellement est une application de \mathbb{N} dans l'espace des fonctions de A dans \mathbb{R}^m . La suite $[f_i]$ converge ponctuellement ou simplement vers $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ si $\forall x$ la suite $[f_i(x)] \subset \mathbb{R}^m$ converge vers $f(x)$; on aura donc convergence ponctuelle si $\forall \epsilon > 0$ et $\forall x \in A$, $\exists N(\epsilon, x) \ni |f_i(x) - f(x)| < \epsilon$ pour $i > N(\epsilon, x)$. La suite $[f_i]$ converge uniformément vers f si $\forall \epsilon > 0$, $\exists M(\epsilon)$, (indépendant de x) tel que $|f_i(x) - f(x)| < \epsilon$ pour $i > M(\epsilon)$ et ceci pour tout $x \in A$. Suivant que la suite converge ponctuellement ou uniformément on écrira " $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i = f$ ponctuellement" ou " $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i = f$ uniformément"

Il est évident que la convergence uniforme implique la convergence ponctuelle.

Définition. Soit $[f_i]_{i=1}^{\infty}$ une suite de fonctions $A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. La série $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ converge ponctuellement ou uniformément selon que la suite des sommes partielles $[S_j]$, avec $S_j = \sum_{i=1}^j f_i$, converge ponctuellement ou uniformément.

Théorème 1.9.1. (Critère de Cauchy). Soit $[f_i]$ une suite de fonctions de $A \subset \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R}^m . La suite converge uniformément vers une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ si et seulement si $\forall \epsilon > 0$, $\exists N(\epsilon)$ tel que $|f_i(x) - f_j(x)| < \epsilon \forall x \in A$ et pour $i, j > N(\epsilon)$.

Démonstration. a) Supposons que le critère de Cauchy soit satisfait et montrons qu'il existe $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i = f$ uniformément. Construisons d'abord f ; soit $\epsilon > 0$ donné ; il existe par hypothèse $N(\epsilon)$ tel que $|f_i(x) - f_j(x)| < \epsilon$ si $i, j > N(\epsilon)$ et ceci pour tout $x \in A$; pour chaque $x \in A$, $[f_i(x)]_{i=1}^{\infty}$ est donc une suite dans \mathbb{R}^m satisfaisant au critère de Cauchy (théorème 1.5.3) ; appelons $f(x)$ la limite de cette suite ; $f(x)$ définit clairement

une fonction de A dans \mathbb{R}^m et l'on a $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i = f$ ponctuellement.
 Il reste à montrer que la convergence est uniforme ; soit $\epsilon > 0$ donné ; il existe $M(\epsilon) \exists |f_i(x) - f_j(x)| < \epsilon/2$ si $i, j > M(\epsilon)$; pour x fixe, en faisant tendre $i \rightarrow \infty$, on a. (théorèmes 1.6.1., 1.6.3., 1.6.6. a) :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |f_i(x) - f_j(x)| = |(\lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x)) - f_j(x)| = |f(x) - f_j(x)| \leq \epsilon/2 < \epsilon;$$

cette relation est vraie pour tout $x \in A$ et tout $j > M(\epsilon)$; on a donc $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i = f$ uniformément.

b) Supposons que $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i = f$ uniformément et montrons que le critère de Cauchy est satisfait ; soit $\epsilon > 0$ donné ; $\exists N(\epsilon) \exists |f_i(x) - f(x)| < \epsilon/2 \forall x \in A$ si $i > N(\epsilon)$; alors pour $i, j > N(\epsilon)$ on a $\forall x \in A$:

$$|f_i(x) - f_j(x)| \leq |f_i(x) - f(x)| + |f(x) - f_j(x)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon ;$$

le critère de Cauchy est donc satisfait.

Définition. Soit la suite $[f_i]$ de fonctions de $A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. La série $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ converge normalement s'il existe une suite

$[c_i] \subset \mathbb{R}$ telle que a) $|f_i(x)| \leq c_i \forall x \in A$,

b) la série $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ converge.

Théorème 1.9.2. Une série convergant normalement converge uniformément.

Démonstration. Il suffit (théorème 1.9.1) de montrer que la suite des sommes partielles $[S_p]$ avec $S_p = \sum_{i=1}^p f_i$ satisfait au critère de Cauchy. Soit $\epsilon > 0$ donné ; $\exists N(\epsilon) \exists \sum_{i=j}^k c_i < \epsilon$ si $k > j > N(\epsilon)$

(théorème 1.8.2) ; on a alors pour $k > j > N(\epsilon)$ et pour tout $x \in A$

$$|S_k(x) - S_j(x)| = \left| \sum_{i=j+1}^k f_i(x) \right| \leq \sum_{i=j+1}^k |f_i(x)| \leq \sum_{i=j+1}^k c_i < \epsilon .$$

Théorème 1.9.3. Une suite f_i de fonctions continues de $A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ convergeant uniformément converge vers une fonction continue.

Démonstration. On suppose les f_i continues et soit $f = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i$ uniformément. Montrons que f est continue en un point arbitraire $a \in A$. Soit $\epsilon > 0$ donné. Puisque la suite converge uniformément, $\exists N \exists |f(x) - f_N(x)| < \epsilon/3 \forall x \in A$; puisque f_N est continue en a $\exists \delta > 0 \exists |x - a| < \delta$ implique $|f_N(x) - f_N(a)| < \epsilon/3$; alors $x \in A$, $|x - a| < \delta$ implique

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon;$$

ainsi donc f est continue en a .

I.10. Connexité. Connexité simple. Domaine étoilé.

Définition. Soit $a, b \in \mathbb{R}^n$. Le segment $[a,b]$ est l'ensemble des points de la forme $a + \lambda(b-a) \in \mathbb{R}^n$ lorsque λ parcourt l'intervalle $[0,1] \subset \mathbb{R}$. Un ensemble fini de segments de la forme $[a_1, a_2], [a_2, a_3], [a_3, a_4] \dots [a_{n-2}, a_{n-1}], [a_{n-1}, a_n]$ est un contour polygonal reliant a_1 à a_n .

Définition. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. A est connexe si pour toute paire de points $a, b \in A$, il existe un contour polygonal reliant a à b et dont tous les segments sont dans A .

Lemme. Soient $A \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $p \in A$. Soient $P = \{x \in A : \text{il existe un contour polygonal reliant } p \text{ à } x \text{ et dont tous les segments sont dans } A\}$ et Q le complémentaire de P dans A . Alors P et Q sont ouverts.

Démonstration. a) Montrons que P est ouvert. Soit $a \in P$; il existe un contour polygonal $[p, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_n, a]$ reliant p à a et dont tous les segments sont dans A . Puisque A est ouvert, il existe $\rho > 0 \exists B(a, \rho) \subset A$; soit $x \in B(a, \rho)$; alors $[a, x] \subset A$ et le contour polygonal $[p, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_n, a], [a, x]$ relie p à x et tous les segments sont contenus dans A ; donc $x \in P$; donc $B(a, \rho) \subset P$; P est voisinage de a ; d'où P est ouvert.

b) Montrons que Q est ouvert. Si $Q = \emptyset$, Q est ouvert (théorème 1.4.4. a). Supposons $Q \neq \emptyset$ et soit $a \in Q$; puisque A est ouvert, $\exists \rho > 0 \ B(a, \rho) \subset A$; soit $x \in B(a, \rho)$; $x \in Q$ sans quoi le contour polygonal qui relierait p à x pourrait être prolongé par le segment $[x, a]$ ce qui signifierait que $a \in P$ ce qui est impossible; donc $B(a, \rho) \subset Q$; Q est voisinage de a , d'où Q est ouvert. Q.E.D.

Théorème 1.10.1. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. A est connexe si et seulement si les relations $A = O_1 \cup O_2$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, O_1 et O_2 ouverts, impliquent que O_1 ou O_2 est vide.

Démonstration. a) Soit A connexe. Supposons, par l'absurde, qu'il existe deux ouverts O_1 et O_2 disjoints, ouverts, non vides tels que $A = O_1 \cup O_2$; soit $a \in O_1$, $b \in O_2$ et un contour polygonal $[a_1, a_2] [a_2, a_3] \dots [a_{n-1}, a_n]$ tel que $[a_i, a_{i+1}] \subset A$ $i=1, 2, \dots, n-1$, où l'on a posé $a = a_1$ et $b = a_n$. L'un des segments au moins, par exemple $[a_j, a_{j+1}]$ a une intersection non vide avec O_1 et avec O_2 . En effet, si $[a_i, a_{i+1}] \cap O_2 = \emptyset$ pour $i = 1, \dots, n-2$, alors $a_{n-1} \in O_1$ donc $[a_{n-1}, a_n] \cap O_1 \neq \emptyset$ et $[a_{n-1}, a_n] \cap O_2 \neq \emptyset$. Soit $f : [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $f(\lambda) = a_j + \lambda(a_{j+1} - a_j)$; f est continue; d'autre part, il existe λ_1 et $\mu_1 \in [0, 1]$ avec $f(\lambda_1) \in O_1$ et $f(\mu_1) \in O_2$; supposons, pour fixer les idées que $\lambda_1 < \mu_1$; soit $\omega_2 = (\lambda_1 + \mu_1)/2$; si $f(\omega_2) \in O_1$ posons $\lambda_2 = \omega_2$, $\mu_2 = \mu_1$; si $f(\omega_2) \in O_2$ posons $\lambda_2 = \lambda_1$, $\mu_2 = \omega_2$; soit ensuite $\omega_3 = (\lambda_2 + \mu_2)/2$; si $f(\omega_3) \in O_1$ posons $\lambda_3 = \omega_3$, $\mu_3 = \mu_2$; si $f(\omega_3) \in O_2$ posons $\lambda_3 = \lambda_2$, $\mu_3 = \omega_3$; en poursuivant ce processus on définit les suites $[\lambda_i] \subset [0, 1]$ et $[\mu_i] \subset [0, 1]$ ayant les propriétés suivantes :

a) $f(\lambda_i) \in O_1$, $f(\mu_i) \in O_2$ $\forall i \in \mathbb{N}$,

b) $\lambda_i < \mu_j$ $\forall i, j \in \mathbb{N}$,

c) $[\lambda_i]$ est une suite monotone croissante et $[\mu_i]$ est une suite monotone décroissante,

d) $\mu_i - \lambda_i = (\mu_1 - \lambda_1)/2^{i-1}$;

on en déduit (théorèmes 1.3.4. et 1.5.2.) que $\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_i \equiv$

$c \in [0, 1]$; puisque f est continue $\lim_{i \rightarrow \infty} f(\lambda_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(\mu_i) = f(c)$

supposons que $f(c) \in O_1$; alors il existe (théorème 1.5.1) N

tel que $f(\mu_i) \in O_1$ pour $i > N$ ce qui contredit le fait que

$f(\mu_i) \in O_2$ $\forall i \in \mathbb{N}$.

Q.E.D.

b) Supposons que les relations $A = O_1 \cup O_2$, O_1 et O_2 disjoints ouverts impliquent que l'un au moins des O_i est vide et montrons que A est connexe. Soient $p \in A$ et $P : \{x \in A : \text{il existe un contour polygonal reliant } p \text{ à } x \text{ et dont tous les segments sont dans } A\}$; Soit Q le complémentaire de P dans A ; d'après le lemme P et Q sont ouverts; or $p \in P$; $P \neq \emptyset$ c'est-à-dire $P = A$; p étant un point arbitraire de A , A est connexe, Q.E.D.

Définition. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, connexe. A est simplement connexe si pour toute application continue $f : [0,1] \rightarrow A$ avec $f(0) = f(1)$ il existe une application continue

$g : [0,1] \times [0,1] \rightarrow A$ telle que

$$1) g(t,1) = f(t) \quad \forall t \in [0,1]$$

$$2) g(0,\alpha) = g(1,\alpha) \quad \forall \alpha \in [0,1]$$

$$3) g(t_1,0) = g(t_2,0) \quad \forall t_1, t_2 \in [0,1]$$

Explication. L'image de f représente un contour fermé dans A ; α est un paramètre; pour chaque α fixe, l'image de g lorsque t varie est également un contour fermé; pour $\alpha = 0$ ce contour se réduit à un point de A ; lorsque α varie de 1 à 0 le contour initial défini par f se "déforme de façon continue" (g est continue!) en un point. Ainsi A connexe est simplement connexe "si tout contour fermé dans A peut être déformé de façon continue et en restant dans A en un point de A ". Dans le plan euclidien rapporté aux axes de coordonnées x et y , la couronne $A = \{(x,y) : 1 < x^2 + y^2 < 3\}$ est connexe mais n'est pas simplement connexe; en effet "on voit" que le contour fermé d'équation $x^2 + y^2 = 2$ ne peut pas être déformé de façon continue en un point de A et en restant dans A .

Définition. $A \subset \mathbb{R}^n$ ouvert est étoilé s'il existe $a \in A$ tel que le segment $[a,x] \subset A \quad \forall x \in A$.

Théorème 1.10.2. Un domaine étoilé est simplement connexe.

Démonstration. Soit A ouvert $\subset \mathbb{R}^n$ et $a \in A$ tels que $[a,x] \subset A \quad \forall x \in A$. Montrons d'abord que A est connexe ; soit $b, c \in A$; alors $[b,a] \subset A$ $[a,c] \subset A$ et le contour $[b,a]$, $[a,c]$ relie b à c . Montrons ensuite que A est simplement connexe ; soit $f : [0,1] \rightarrow A$ continue avec $f(0)=f(1)$; posons $g(t,\alpha) = a + \alpha(f(t)-a)$; puisque A est étoilé, $g(t,\alpha) \in A$ si $0 \leq t, \alpha \leq 1$; les conditions 1), 2), 3) de la connexité simple sont également satisfaites ; il reste donc à vérifier que g est continue sur l'ensemble $[0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$. Soit $[(t_i, \alpha_i)]_{i=1}^{\infty} \subset [0,1] \times [0,1]$ une suite convergeant vers $[\bar{t}, \bar{\alpha}]$; on aura (théorème 1.5.1. b) $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \bar{t}$, $\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i = \bar{\alpha}$; f étant continue, on aura (théorèmes 1.5.2. et 1.6.1.) $\lim_{i \rightarrow \infty} g(t_i, \alpha_i) = a + \alpha(f(\bar{t}) - a) = g(\bar{t}, \bar{\alpha})$; donc (théorème 1.6.1.) \bar{g} est continue.

Q.E.D.

II. ANALYSE VECTORIELLE

II.1. Fonctions $C^k(A)$

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Convenons pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$ de l'équivalence des notations $f(x)$ et $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Si A est un voisinage de $a \in A$, c'est-à-dire s'il existe $\rho > 0$ avec $B(a, \rho) \subset A$, on pose,

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k+h, a_{k+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_k, \dots, a_n)}{h};$$

l'expression dont on prend la limite est une fonction définie sur l'ensemble $\{h \in \mathbb{R} : (a_1, \dots, a_{k-1}, a_k+h, a_{k+1}, \dots, a_n) \in A, h \neq 0\} \subset \mathbb{R}$; on dira que la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x_k} f(a)$ existe ou qu'elle est définie si cette limite existe.

Définition. Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, A ouvert. f est de classe $C^m(A)$ (on écrit $f \in C^m(A)$) si toutes les dérivées partielles de f d'ordre $1, 2, \dots, m$ existent pour tout $x \in A$ et définissent des applications continues de A dans \mathbb{R} . $f \in C^0(A)$ signifie que f est continue sur A . Si $A = \mathbb{R}^n$, on écrira C^m au lieu de $C^m(\mathbb{R}^n)$.

Lemme. Soient A, B_1, B_2 des ouverts de \mathbb{R}^n avec $\bar{A} \subset B_1, \bar{A} \subset B_2$; soient $g_1 : B_1 \rightarrow \mathbb{R}, g_2 : B_2 \rightarrow \mathbb{R}$; on suppose que $g_1 \in C^m(B_1), g_2 \in C^m(B_2)$ et que $g_1(x) = g_2(x)$ pour $x \in A$. Alors g_1 et g_2 sont égales sur \bar{A} ainsi que toutes leurs dérivées partielles d'ordre m au plus.

Démonstration. D'après le corollaire du théorème I.6.7, les dérivées partielles d'ordre 1 de g_1 et g_2 sont égales sur A ; par induction, il en va de même pour toutes les dérivées d'ordre m au plus. Soit $h_1 : B_1 \rightarrow \mathbb{R}$ et $h_2 : B_2 \rightarrow \mathbb{R}$ une même dérivée partielle d'ordre $\leq m$ de

g_1 et g_2 respectivement et soit $a \in \bar{A}$. Il existe $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \subset A$ avec $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a$. On a $h_1(a_i) = h_2(a_i)$, $i \in \mathbb{N}$; puisque h_1 et h_2 sont continues on aura $h_1(a) = \lim_{i \rightarrow \infty} h_1(a_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} h_2(a_i) = h_2(a)$. Q.E.D.

Le lemme justifie la définition suivante.

Définition. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ ouvert; $f : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $C^m(\bar{A})$ (on écrira $f \in C^m(\bar{A})$) s'il existe une extension g de f définie sur un ouvert $B \supset \bar{A}$ de classe $C^m(B)$. Les dérivées partielles de f (d'ordre $\leq m$) sont définies comme étant les restrictions des dérivées correspondantes de g à \bar{A} .

Théorème II.1.1. Soit $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f continue. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) $f \in C^1([a, b])$;
- b) la restriction g de f à $]a, b[$ est de classe $C^1(]a, b[)$ et les quantités $\lim_{x \rightarrow a} g'(x)$, $\lim_{x \rightarrow b} g'(x)$ existent.

Démonstration. a) \Rightarrow b) ; c'est une conséquence immédiate des définitions.

b) \Rightarrow a) ; soit $u = \lim_{x \rightarrow a} g'(x)$, $v = \lim_{x \rightarrow b} g'(x)$;

on définit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par les relations :

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x), \quad x \in [a, b], \\ h(x) &= f(a) + u(x-a), \quad x < a, \\ h(x) &= f(b) + v(x-b), \quad x > b; \end{aligned}$$

il suffit alors de montrer que $h \in C^1$; seuls les points a et b présentent des difficultés ; montrons qu'au point b , 1) h est dérivable, 2) h' est continue ; ces conditions seront établies si l'on montre que $h'(b) = v$; soit $\epsilon > 0$ donné ; il existe $\delta > 0$ tel que $|h'(x) - v| < \epsilon$ si

$b - \delta < x < b$; pour $x > b$ on a

$$\left| \frac{h(x) - h(b)}{x - b} - v \right| = 0 ; \quad (1)$$

pour $b - \delta < x < b$ on a, en utilisant le théorème des accroissements finis : $h(x) - h(b) = h'(\bar{x})(x-b)$, $\bar{x} \in]b-\delta, b[$ et par conséquent

$$\left| \frac{h(x) - h(b)}{x - b} - v \right| = |h'(\bar{x}) - v| < \varepsilon ; (2)$$

de (1) et (2) , on obtient

$$\left| \frac{h(x) - h(b)}{x - b} - v \right| < \varepsilon \quad \text{si} \quad 0 < |x-b| < \delta .$$

Q.E.D.

Définition. Soient $A \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert ou l'adhérence d'un ouvert, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ avec $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$; f est de classe $C^k(A)$ si les m applications $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe $C^k(A)$.

II.2. Espace affine - Champs scalaires et vectoriels

On suppose connue la notion du vecteur tridimensionnel caractérisé par sa longueur, sa direction et son sens. On désignera un vecteur par une lettre minuscule latine surmontée d'une flèche. $\vec{a} \cdot \vec{b}$ désigne le produit scalaire de \vec{a} et \vec{b} , $\vec{a} \wedge \vec{b}$ désigne le produit vectoriel de \vec{a} et \vec{b} , $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ désigne le produit mixte de \vec{a} , \vec{b} et \vec{c} , $|\vec{a}|$ désigne la longueur de \vec{a} .

E désigne l'espace affine euclidien tridimensionnel. Rappelons simplement que E est un ensemble de points ; à deux points P et Q on fait correspondre un vecteur noté \vec{PQ} ; réciproquement à $P \in E$ et à un vecteur \vec{a} correspond de façon univoque $Q \in E$ tel que $\vec{PQ} = \vec{a}$.

On convient de choisir une fois pour toutes dans E un point particulier O appelé origine. Un point P est alors entièrement caractérisé par le vecteur \vec{OP} appelé rayon vecteur et noté \vec{r} . On convient également de choisir une fois pour toutes trois vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ orthogonaux, de longueur 1 et d'orientation directe, formant le triplet fondamental ; x, y, z désigneront les composantes du rayon vecteur \vec{r} selon le triplet fondamental, c'est-à-dire $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$ (figure 1). Pour un vecteur \vec{a} quelconque, a_x, a_y, a_z désigneront les composantes selon $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

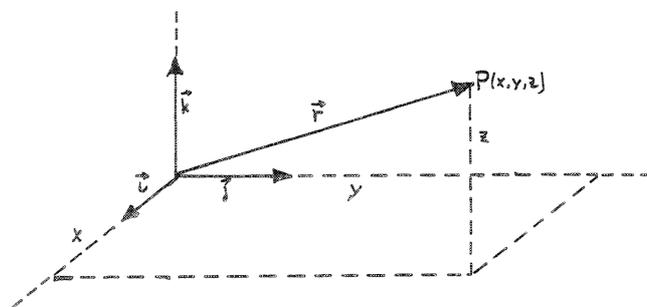


Figure 1

L'adoption d'une origine et d'un triplet fondamental nous permet d'associer à chaque point $P \in E$ l'élément $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ défini par la relation $\vec{OP} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$; en fait on définit ainsi une bijection $\mu : E \rightarrow \mathbb{R}^3$. Puisque $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont orthogonaux et de longueur 1 on aura $|\mu(P) - \mu(Q)| = |\vec{PQ}|$ pour $P, Q \in E$. L'application μ permet d'introduire sur E les notions topologiques définies au chapitre I sur \mathbb{R}^n ; $A \subset E$ est ouvert ou fermé selon que $\mu(A)$ est ouvert ou fermé; $\{P_i\}_{i=1}^{\infty} \subset E$ converge vers Q si $\{\mu(P_i)\}_{i=1}^{\infty}$ converge vers $\mu(Q)$ etc... On peut vérifier que ces notions sont indépendantes du choix particulier de l'origine et du triplet fondamental.

Soit $A \subset E$. Une application $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée un champ scalaire. En posant $f(P) = g(\mu(P))$, f induit l'application $g : \mu(A) \rightarrow \mathbb{R}$. Par la suite on identifiera f et g et l'on utilisera indifféremment les notations $f(P), f(\vec{OP}), f(\vec{r}), f(x, y, z)$ pour désigner la valeur de f en P . Par définition f est de classe $C^m(A)$ si g est de classe $C^m(\mu(A))$.

Une application \vec{v} de A dans l'espace des vecteurs est un champ vectoriel; à un point P de A correspond le vecteur $\vec{v}(P)$; en posant $\vec{v}(P) = \vec{i}v_x(P) + \vec{j}v_y(P) + \vec{k}v_z(P)$, on définit en fait trois champs scalaires v_x, v_y, v_z ; comme pour les champs scalaires, on adoptera indifféremment les notations $\vec{v}(P), \vec{v}(\vec{r}), \vec{v}(\vec{OP}), \vec{v}(x, y, z)$; par définition, \vec{v} est de classe $C^m(A)$ si les trois champs scalaires v_x, v_y et v_z sont simultanément de classe $C^m(A)$.

Notation. Pour une fonction $f(x, y, z)$ on désignera les dérivées partielles par les notations $\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f, \partial_x \partial_x f, \partial_x \partial_y f, \partial_y \partial_y f$ etc...

II.3. Arcs. Intégrales curvilignes

Considérons trois applications $x(t), y(t), z(t)$ du segment $[a,b]$ dans \mathbb{R} ; $\vec{r}(t) = \vec{i}x(t) + \vec{j}y(t) + \vec{k}z(t)$ définit une application de $[a,b]$ dans E ; $\vec{r}(t)$ est par définition de classe $C^m[a,b]$ si $x(t), y(t), z(t)$ sont de classe $C^m[a,b]$ et l'on pose

$$\vec{r}^{(k)}(t) = \vec{i}x^{(k)}(t) + \vec{j}y^{(k)}(t) + \vec{k}z^{(k)}(t), \quad k \leq m.$$

Définition. Un sous-ensemble $\Gamma \subset E$ est un arc lisse si Γ est l'image d'un segment $[a,b]$ par une application $\vec{r}(t) = \vec{i}x(t) + \vec{j}y(t) + \vec{k}z(t), t \in [a,b]$, jouissant des propriétés :

- a) l'application est injective,
- b) $\vec{r}(t) \in C^1[a,b]$ et $\vec{r}'(t) \neq 0, t \in [a,b]$,

et si, de plus :

- c) Γ est muni d'une orientation, c'est-à-dire d'un sens de parcours.

On dit que $t \in [a,b] \mapsto \vec{r}(t)$ est une paramétrisation de Γ . Dans la suite, lorsqu'on considère un arc lisse Γ et une paramétrisation $t \mapsto \vec{r}(t)$ de Γ , on suppose toujours, sauf mention explicite du contraire

- 1) que $t \mapsto \vec{r}(t)$ est de classe C^1 avec $\vec{r}'(t) \neq 0$,
- 2) que l'orientation de Γ correspond au sens du parcours donné par $\vec{r}(t)$ pour des valeurs croissantes du paramètre.

Le vecteur $\vec{u}(t) = \vec{r}'(t)/|\vec{r}'(t)|$ est donc la tangente unité orientée en t . Les points P_0 et P_1 définis par $\vec{OP}_0 = \vec{r}(a), \vec{OP}_1 = \vec{r}(b)$ sont respectivement l'origine et l'extrémité de Γ .

Remarque. Γ est compact. En effet l'application $\gamma : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ est continue ; puisque $[a,b]$ est compact, l'image de $[a,b]$ par γ est compacte (théorème I.7.3).

Le théorème qui suit est donné sans démonstration.

Théorème II.3.1. Soit Γ un arc lisse admettant les paramétrisations $\vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$ et $\vec{\rho}(\tau)$, $\tau \in [\alpha, \beta]$ satisfaisant toutes deux aux conditions énoncées plus haut. Alors il existe une application $\varphi : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ telle que $\vec{r}(t) = \vec{\rho}(\varphi(t))$, $t \in [a, b]$ et jouissant des propriétés :

- 1) φ est bijective,
- 2) $\varphi(a) = \alpha$, $\varphi(b) = \beta$,
- 3) $\varphi \in C^1[a, b]$ avec $\varphi'(t) > 0$, $t \in [a, b]$.

Théorème II.3.2. Soit f un champ scalaire de classe C^0 , Γ un arc lisse admettant la paramétrisation $\vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$ et $\vec{\rho}(\tau)$, $\tau \in [\alpha, \beta]$. Alors

$$\int_a^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt = \int_\alpha^\beta f(\vec{\rho}(\tau)) |\vec{\rho}'(\tau)| d\tau .$$

Démonstration. $\vec{r}(t) = \vec{\rho}(\varphi(t))$ où φ est une fonction jouissant des propriétés énoncées au théorème 1.

Par le changement de variables, $\tau = \varphi(t)$ le second membre devient :

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta f(\vec{\rho}(\tau)) |\vec{\rho}'(\tau)| d\tau &= \int_a^b f(\vec{\rho}(\varphi(t))) |\vec{\rho}'(\tau)| \varphi'(t) dt \\ &= \int_a^b f(\vec{\rho}(\varphi(t))) |\vec{\rho}'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)| dt = \int_a^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt . \end{aligned}$$

Le théorème II.3.2 justifie la définition suivante.

Définition. Soit f un champ scalaire de classe C^0 , Γ un arc lisse admettant la paramétrisation $\vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$. L'intégrale de f le long de Γ est l'expression notée

$$\int_\Gamma f ds \text{ définie par}$$

$$\int_\Gamma f ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt .$$

Remarque. Pour que $\int_{\Gamma} f ds$ soit définie, il n'est pas nécessaire que f soit définie et continue dans E entier ; il suffit que f soit définie et continue sur Γ .

Théorème II.3.3. Soit f un champ scalaire continu, Γ un arc lisse de paramétrisation $\vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$. Soit $N \in \mathbb{N}$, $h = (b - a)/N$, $t_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, N$.

Alors
$$\int_{\Gamma} f ds = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} f(\vec{r}(t_i)) |\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)|.$$

Remarque. Le théorème II.3.3 se laisse généraliser aisément pour des décompositions plus générales de Γ .

Lemme. Soit p et $q \geq 0$. Alors $|\sqrt{p} - \sqrt{q}| \leq \sqrt{|p - q|}$.

Démonstration. On peut supposer $p > q$. On a alors :

$$\sqrt{p} - \sqrt{q} = \frac{p - q}{\sqrt{p} + \sqrt{q}} \leq \frac{p - q}{\sqrt{p}} \leq \frac{p - q}{\sqrt{p - q}} = \sqrt{p - q}.$$

Démonstration du théorème II.3.3.

Posons $\vec{r}(t) = \vec{i}x(t) + \vec{j}y(t) + \vec{k}z(t)$;

le théorème des accroissements finis permet d'écrire :

$$|\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)| = h(x'^2(\xi_i) + y'^2(\eta_i) + z'^2(\zeta_i))^{\frac{1}{2}},$$

où $\xi_i, \eta_i, \zeta_i \in]t_i, t_{i+1}[$; d'après le lemme, on a pour

$$g_i = |\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)| - h|\vec{r}'(t_i)|$$

$$|g_i| \leq h((x'^2(\xi_i) - x'^2(t_i)) + (y'^2(\eta_i) - y'^2(t_i)) + (z'^2(\zeta_i) - z'^2(t_i)))^{\frac{1}{2}};$$

en désignant par ω_x, ω_y et ω_z les modules de continuité de x'^2, y'^2 et z'^2 on a

$$|g_i| \leq h(\omega_x(h) + \omega_y(h) + \omega_z(h))^{\frac{1}{2}};$$

posons $Q(N) = h \sum_{i=0}^{N-1} f(\vec{r}(t_i)) |\vec{r}'(t_i)|$ et $R(N) = \sum_{i=0}^{N-1} f(\vec{r}(t_i)) g_i$;

on a
$$\sum_{i=0}^{N-1} f(\vec{r}(t_i)) |\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)| = Q(N) + R(N) ,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Q(N) = \int_a^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt ;$$

cette dernière relation est une conséquence de la définition même de l'intégrale de Riemann. Il suffit donc, pour achever la démonstration, de montrer que $\lim_{N \rightarrow \infty} R(N) = 0$; f est continu sur le compact Γ ; f est donc $N \rightarrow \infty$ borné (corollaire du théorème I.7.3) ; soit M tel que $|f(P)| \leq M$, $P \in \Gamma$; on a alors

$$|R(N)| \leq MNh(\omega_x(h) + \omega_y(h) + \omega_z(h))^{\frac{1}{2}} ,$$

$$|R(N)| \leq M(b-a)(\omega_x(h) + \omega_y(h) + \omega_z(h))^{\frac{1}{2}} ;$$

lorsque $N \rightarrow \infty$, $h = 1/N \rightarrow 0$; x'^2 , y'^2 , z'^2 étant des fonctions continues sur le compact $[a, b]$ sont uniformément continues et l'on a (théorème I.7.7) : $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_x(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \omega_y(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \omega_z(h) = 0$ et par conséquent $\lim_{N \rightarrow \infty} R(N) = 0$. Q.E.D.

Définition. Soit Γ un arc lisse, $\vec{u} = \vec{i}u_x + \vec{j}u_y + \vec{k}u_z$ sa tangente unité orientée, f un champ scalaire continu, \vec{v} un champ vectoriel continu. On pose

$$\int_{\Gamma} f dx = \int_{\Gamma} f u_x ds ,$$

$$\int_{\Gamma} f dy = \int_{\Gamma} f u_y ds ,$$

$$\int_{\Gamma} f dz = \int_{\Gamma} f u_z ds ,$$

$$\int_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} \vec{v} \cdot \vec{u} ds ,$$

$$\int_{\Gamma} \vec{v} ds = \vec{i} \int_{\Gamma} v_x ds + \vec{j} \int_{\Gamma} v_y ds + \vec{k} \int_{\Gamma} v_z ds ,$$

$$\int_{\Gamma} \vec{v} \wedge d\vec{r} = \int_{\Gamma} \vec{v} \wedge \vec{u} ds .$$

Soit $\vec{r}(t) = \vec{i}x(t) + \vec{j}y(t) + \vec{k}z(t)$, $t \in [a, b]$ une paramétrisation de Γ ; on a

$$\vec{u}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} = \vec{i} \frac{x'(t)}{|\vec{r}'(t)|} + \vec{j} \frac{y'(t)}{|\vec{r}'(t)|} + \vec{k} \frac{z'(t)}{|\vec{r}'(t)|} ;$$

des définitions, on déduit immédiatement :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f dx &= \int_a^b f(\vec{r}(t)) x'(t) dt , \\ \int_{\Gamma} f dy &= \int_a^b f(\vec{r}(t)) y'(t) dt , \\ \int_{\Gamma} f dz &= \int_a^b f(\vec{r}(t)) z'(t) dt , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{r} &= \int_{\Gamma} v_x dx + \int_{\Gamma} v_y dy + \int_{\Gamma} v_z dz = \int_a^b \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt , \\ \int_{\Gamma} \vec{v} ds &= \vec{i} \int_a^b v_x(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt + \vec{j} \int_a^b v_y(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt \\ &\quad + \vec{k} \int_a^b v_z(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt , \\ \int_{\Gamma} \vec{v} \wedge d\vec{r} &= \int_a^b \vec{v}(\vec{r}(t)) \wedge \vec{r}'(t) dt . \end{aligned}$$

Règle. Pour calculer une intégrale curviligne, c'est-à-dire pour la transformer en une intégrale ordinaire

- 1) on exprime l'intégrand en fonction du paramètre,
- 2) on pose $ds = |\vec{r}'(t)| dt$, $d\vec{r} = \vec{r}'(t) dt$, $dx = x'(t) dt$, $dy = y'(t) dt$ ou $dz = z'(t) dt$,
- 3) on remplace le symbole Γ par les limites a et b de variation du paramètre.

Remarque. Les intégrales $\int_{\Gamma} f ds$ et $\int_{\Gamma} \vec{v} ds$ ne dépendent pas de l'orientation de Γ . Par contre les intégrales $\int_{\Gamma} f dx$, $\int_{\Gamma} f dy$, $\int_{\Gamma} f dz$, $\int_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{r}$ et $\int_{\Gamma} \vec{v} \wedge d\vec{r}$ changent de signe si l'on change l'orientation de Γ .

Définitions. Soient $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ n arcs lisses, P_0, P_1, \dots, P_n , $n+1$ points tels que P_{i-1} et P_i soient respectivement l'origine et l'extrémité de Γ_i . L'union de $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ est un arc Γ ; les orientations de $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ induisent une orientation sur Γ . L'arc Γ est fermé si $P_0 = P_n$. L'arc Γ est simple si la relation $P \in \Gamma_i \cap \Gamma_j$ entraîne $j = i+1$ et $P = P_i$ ou bien $i = 0$, $j = n$ et $P = P_0 = P_n$. Si f est un champ scalaire continu, on pose

$$\int_{\Gamma} f ds = \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} f ds ;$$

on définit de la même façon sur l'arc Γ les autres types d'intégrales curvilignes. Finalement $\int_{\Gamma} ds$ est la longueur de Γ .

Théorème II.3.4. Soit Γ un arc de longueur L , f et \vec{v} des champs scalaire et vectoriel continus. On a

- a) $\left| \int_{\Gamma} f ds \right| \leq \int_{\Gamma} |f| ds \leq L \max_{P \in \Gamma} |f(P)|$,
- b) $\left| \int_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{r} \right| \leq \int_{\Gamma} |\vec{v}| ds \leq L \max_{P \in \Gamma} |\vec{v}(P)|$,
- c) $\left| \int_{\Gamma} \vec{v} ds \right| \leq \int_{\Gamma} |\vec{v}| ds \leq L \max_{P \in \Gamma} |\vec{v}(P)|$,
- d) $\left| \int_{\Gamma} \vec{v} \wedge d\vec{r} \right| \leq \int_{\Gamma} |\vec{v}| ds \leq L \max_{P \in \Gamma} |\vec{v}(P)|$.

Démonstration. On se ramène aisément au cas particulier où Γ est lisse. Soit $\vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$ une paramétrisation de Γ . On remarque que les fonctions $f(P)$ et $\vec{v}(P)$ étant continues sur le compact Γ prennent leur maximum sur Γ (théorème I.7.4). Montrons a) :

$$\left| \int_{\Gamma} f ds \right| = \left| \int_a^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt \right| \leq \int_a^b |f(\vec{r}(t))| |\vec{r}'(t)| dt = \int_{\Gamma} |f| ds ;$$

$$\left| \int_{\Gamma} f ds \right| \leq \int_a^b |f(\vec{r}(t))| |\vec{r}'(t)| dt \leq \max_{t \in [a, b]} |f(\vec{r}(t))| \int_a^b |\vec{r}'(\tau)| d\tau =$$

$$= L \max_{P \in \Gamma} |f(P)| ;$$

l'inégalité b) se déduit de a) en remarquant que

$|\vec{v} \cdot \vec{u}| \leq |\vec{v}|$ où \vec{u} est le vecteur tangent unité. Démontrons c) ; posons $\vec{a} = \int_{\Gamma} \vec{v} ds$; si $\vec{a} = \vec{0}$, la relation est évidente ;

Supposons $\vec{a} \neq \vec{0}$ et soit $\vec{b} = \vec{a}/|\vec{a}|$; \vec{b} est un vecteur unité et l'on a

$$|\vec{a}| = \vec{b} \cdot \vec{a} = \int_{\Gamma} \vec{b} \cdot \vec{v} ds \leq \int_{\Gamma} |\vec{b} \cdot \vec{v}| ds \leq \int_{\Gamma} |\vec{v}| ds \leq L \max_{P \in \Gamma} |\vec{v}(P)| ;$$

finalement d) est une conséquence de c) si l'on remarque que $|\vec{v} \wedge \vec{u}| \leq |\vec{v}|$.

II.4. Morceaux de surface. Surfaces fermées. Intégrale de surface

Considérons trois applications $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ d'un ensemble $D \subset \mathbb{R}^2$ dans \mathbb{R}^3 ;
 $\vec{r}(u,v) = \vec{i}x(u,v) + \vec{j}y(u,v) + \vec{k}z(u,v)$ définit une application de D dans \mathbb{R}^3 ; $\vec{r}(u,v)$ est, par définition, de classe $C^m(D)$ si $x(u,v)$, $y(u,v)$ et $z(u,v)$ sont simultanément de classe $C^m(D)$; on pose $\partial_u \vec{r}(u,v) = \vec{i}\partial_u x(u,v) + \vec{j}\partial_u y(u,v) + \vec{k}\partial_u z(u,v)$, $\partial_v \vec{r}(u,v) = \vec{i}\partial_v x(u,v) + \vec{j}\partial_v y(u,v) + \vec{k}\partial_v z(u,v)$, $\partial_u \partial_u \vec{r}(u,v) = \vec{i}\partial_u^2 x(u,v) + \dots$ etc...

Définition. Un ensemble $D \subset \mathbb{R}^2$ est régulier si

- 1) D est l'adhérence d'un ensemble ouvert borné,
- 2) la frontière de D est un arc fermé simple.

Définitions. Un sous-ensemble $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ est un morceau de surface lisse si Σ est l'image d'un ensemble régulier D par l'application $\vec{r}(u,v) = \vec{i}x(u,v) + \vec{j}y(u,v) + \vec{k}z(u,v)$, $(u,v) \in D$, jouissant des propriétés :

- a) L'application est injective
- b) $\vec{r}(u,v) \in C^1(D)$ et $\partial_u \vec{r}(u,v) \wedge \partial_v \vec{r}(u,v) \neq \vec{0}$, $(u,v) \in D$;
- c) de plus, une orientation est définie sur Σ par le choix de l'une des faces de Σ , appelée "face extérieure", par opposition à l'autre face appelée "face intérieure".

$\vec{r}(u,v)$ est une paramétrisation de Σ . L'image de la frontière de D est, par définition, la frontière de Σ ; c'est un arc simple. Le vecteur $\partial_u \vec{r} \wedge \partial_v \vec{r}$ est un vecteur normal à Σ . On supposera toujours, lorsque l'on considère une paramétrisation $\vec{r}(u,v)$ de Σ que les conditions a) et b) sont satisfaites et que, de plus, le vecteur $\partial_u \vec{r} \wedge \partial_v \vec{r}$ est dirigé vers l'extérieur ; le vecteur unité

$$\vec{n} = \frac{\partial_u \vec{r} \wedge \partial_v \vec{r}}{|\partial_u \vec{r} \wedge \partial_v \vec{r}|} = \vec{i}\alpha + \vec{j}\beta + \vec{k}\gamma$$

est le vecteur normal orienté.

Remarque. Un morceau de surface Σ lisse est compact. En effet D est borné, fermé, donc compact ; soit $\mu : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\mu(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$; μ est une application continue, donc l'image de D par μ est compacte (théorème I.7.3).

Le théorème qui suit sera énoncé sans démonstration.

Théorème II.4.1. Soit Σ un morceau de surface lisse admettant les paramétrisations $\vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$ et $\vec{\rho}(\mu,v)$, $(\mu,v) \in \Delta$ satisfaisant toutes deux aux conditions énoncées plus haut. Alors il existe une application $\omega : D \rightarrow \Delta$, $\omega(u,v) = (\varphi(u,v), \psi(u,v))$ telle que $\vec{r}(u,v) = \vec{\rho}(\varphi(u,v), \psi(u,v))$, $(u,v) \in D$, et jouissant des propriétés :

- 1) ω est bijective,
- 2) l'image de la frontière de D est la frontière de Δ ,
- 3) $\omega \in C^1(D)$ avec

$$\text{Det} \begin{pmatrix} \partial_u \varphi(u,v) & \partial_u \psi(u,v) \\ \partial_v \varphi(u,v) & \partial_v \psi(u,v) \end{pmatrix} > 0 \quad (u,v) \in D.$$

Théorème II.4.2. Soit f un champ scalaire continu, Σ un morceau de surface lisse admettant les paramétrisations $\vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$ et $\vec{\rho}(\mu,v)$, $(\mu,v) \in \Delta$. Alors

$$\iint_D f(\vec{r}(u,v)) |\partial_u \vec{r} \wedge \partial_v \vec{r}| du dv = \iint_\Delta f(\vec{\rho}(\mu,v)) |\partial_\mu \vec{\rho} \wedge \partial_\nu \vec{\rho}| d\mu d\nu.$$

Démonstration. On a $\vec{r}(u,v) = \vec{\rho}(\varphi(u,v), \psi(u,v))$ où $\varphi(u,v)$ et $\psi(u,v)$ jouissent des propriétés énoncées au théorème II.4.1. ;

$$\begin{aligned}
\partial_u \vec{r} \wedge \partial_v \vec{r} &= (\partial_u \vec{\rho} \cdot \partial_u \varphi + \partial_v \vec{\rho} \cdot \partial_u \psi) \wedge (\partial_u \vec{\rho} \cdot \partial_v \varphi + \partial_v \vec{\rho} \cdot \partial_v \psi) \\
&= \partial_u \vec{\rho} \wedge \partial_v \vec{\rho} (\partial_u \varphi \cdot \partial_v \psi) + (\partial_v \vec{\rho} \wedge \partial_u \vec{\rho}) (\partial_u \psi \cdot \partial_v \varphi) \\
&= \partial_u \vec{\rho} \wedge \partial_v \vec{\rho} (\partial_u \varphi \cdot \partial_v \psi - \partial_u \psi \cdot \partial_v \varphi) \\
&= \partial_u \vec{\rho} \wedge \partial_v \vec{\rho} \cdot J \left(\frac{\varphi, \psi}{u, v} \right) ;
\end{aligned}$$

en effectuant le changement de variables $\mu = \varphi(u, v)$,
 $v = \psi(u, v)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Delta} f(\vec{\rho}(\mu, v)) |\partial_\mu \vec{\rho}(\mu, v) \wedge \partial_v \vec{\rho}(\mu, v)| d\mu dv \\
&= \iint_D f(\vec{\rho}(\varphi(u, v), \psi(u, v))) |\partial_\mu \vec{\rho}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \wedge \partial_v \vec{\rho}(\varphi(u, v), \psi(u, v))| \cdot \\
&\quad \cdot J \left(\frac{\varphi, \psi}{u, v} \right) dudv \\
&= \iint_D f(\vec{r}(u, v)) |\partial_u \vec{r}(u, v) \wedge \partial_v \vec{r}(u, v)| dudv .
\end{aligned}$$

Le théorème II.4.2. justifie la définition suivante.

Définition. Soit f un champ scalaire continu,
 Σ un morceau de surface lisse admettant la paramétrisation
 $\vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$. L'intégrale de f sur Σ est l'expres-
sion notée $\iint_{\Sigma} f d\sigma$ définie par

$$\iint_{\Sigma} f d\sigma = \iint_D f(\vec{r}(u, v)) |\partial_u \vec{r} \wedge \partial_v \vec{r}| dudv .$$

L'expression $\iint_{\Sigma} d\sigma$ est l'aire de Σ .

Remarque. Pour que $\iint_{\Sigma} f d\sigma$ soit définie, il n'est
pas nécessaire que f soit définie et continue dans E en-
tier ; il suffit que f soit définie et continue sur Σ .

Interprétation de l'intégrale de surface.

1. Soit Σ un morceau de surface lisse admettant la paramétrisation $\vec{r}(u,v) = \vec{i}u + \vec{j}v$, $(u,v) \in D$; en fait Σ est un morceau de surface situé dans le plan xy et "identique" à D ; on a $|\partial_u \vec{r} \wedge \partial_v \vec{r}| = 1$. Si $f(x,y)$ est une fonction définie dans le plan xy on aura

$$\iint_{\Sigma} f d\sigma = \iint_D f(u,v) du dv ,$$

c'est-à-dire que l'intégrale de surface est tout simplement l'intégrale double ordinaire.

2. Soit Σ un morceau de surface lisse admettant la paramétrisation $\vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in D = \{(u,v) : 0 \leq u,v \leq 1\}$.

$A = \int_0^1 \int_0^1 |\partial_u \vec{r} \wedge \partial_v \vec{r}| du dv$ est l'aire de Σ . Considérons

une décomposition de D en N^2 carrés égaux de côté $h = 1/N$; soit $u_i = ih$, $v_j = jh$, $i,j = 0, \dots, N$; par définition même de l'intégrale de Riemann on a

$$A = \lim_{h \rightarrow 0} h^2 \sum_{i,j=0}^{N-1} |\partial_u \vec{r}(u_i, v_j) \wedge \partial_v \vec{r}(u_i, v_j)| ;$$

la quantité $h^2 |\partial_u \vec{r}(u_i, v_j) \wedge \partial_v \vec{r}(u_i, v_j)|$ admet une interprétation géométrique simple ; considérons l'image Σ_{ij} du carré $u_i \leq u \leq u_{i+1}$, $v_j \leq v \leq v_{j+1}$ (figure 2) ;

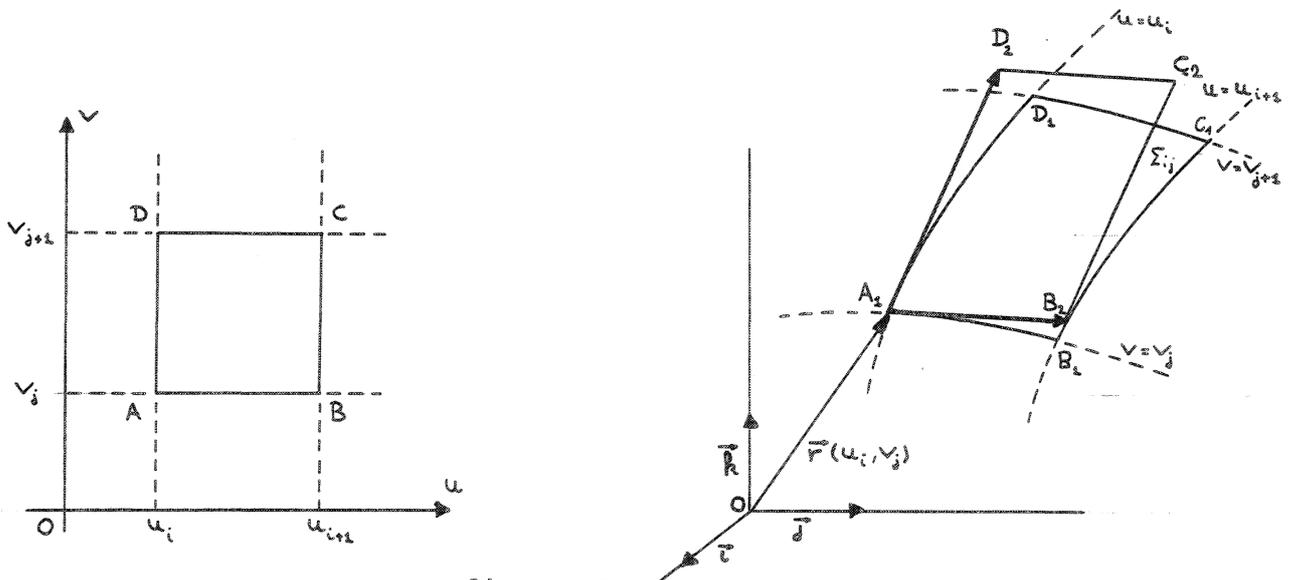


figure 2

A_1, B_1, C_1 et D_1 sont respectivement les images de A, B, C, D ; A_1 et B_1 sont situés sur un arc image de la droite $v = v_j$ et appelé ligne de coordonnée v_j ; en fait la frontière de Σ_{ij} est formée de parties des lignes de coordonnées $u = u_i, u = u_{i+1}, v = v_j, v = v_{j+1}$; la ligne de coordonnée u_i admet la représentation paramétrique $\vec{r}(u_i, v)$, u_i fixe, v variable ; considérons le développement de Taylor appliqué à chaque composantes de $\vec{r}(u, v)$; on a, en se limitant aux deux premiers termes

$$\vec{r}(u_i, v_{j+1}) = \vec{r}(u_i, v_j) + h \partial_v \vec{r}(u_i, v_j) ;$$

pour h "petit" l'extrémité D_2 de $\vec{r}(u_i, v_j) + h \partial_v \vec{r}(u_i, v_j)$ est voisine de D_1 , l'extrémité B_2 du vecteur $\vec{r}(u_i, v_j) + h \partial_u \vec{r}(u_i, v_j)$ est voisine de B_1 (approximation du premier ordre) ; la quantité $h^2 |\partial_u \vec{r}(u_i, v_j) \wedge \partial_v \vec{r}(u_i, v_j)|$ est l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\partial_u \vec{r}(u_i, v_j)$ et $\partial_v \vec{r}(u_i, v_j)$, parallélogramme "voisin" de Σ_{ij} .

3. Soit Σ un morceau de surface lisse admettant la paramétrisation $\vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$, et f un champ scalaire continu au voisinage de Σ . Considérons une décomposition de D en "petits" morceaux réguliers D_1, D_2, \dots, D_n et soit Σ_i l'image de D_i . Soit $(u_i, v_i) \in D_i$ et P_i l'image de (u_i, v_i) . On a

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} f d\sigma &= \iint_D f(\vec{r}(u, v)) |\partial_u \vec{r} \wedge \partial_v \vec{r}| du dv = \sum_{i=1}^N \iint_{D_i} f(\vec{r}(u, v)) |\partial_u \vec{r} \wedge \partial_v \vec{r}| du dv \\ &\doteq \sum_{i=1}^N f(r(u_i, v_i)) \iint_{D_i} |\partial_u \vec{r} \wedge \partial_v \vec{r}| du dv = \sum_{i=1}^N f(P_i) A_i \end{aligned}$$

où A_i est l'aire de Σ_i .

Définition. Soit Σ un morceau de surface lisse, \vec{n} sa normale orientée, f un champ scalaire continu, \vec{v} un champ vectoriel continu ; on pose

$$\iint_{\Sigma} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_{\Sigma} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma ,$$

$$\iint_{\Sigma} \vec{v} d\sigma = \vec{i} \iint_{\Sigma} v_x d\sigma + \vec{j} \iint_{\Sigma} v_y d\sigma + \vec{k} \iint_{\Sigma} v_z d\sigma ,$$

$$\iint_{\Sigma} \vec{v} \wedge d\vec{\sigma} = \iint_{\Sigma} \vec{v} \wedge \vec{n} d\sigma ,$$

$$\iint_{\Sigma} f d\vec{\sigma} = \iint_{\Sigma} f \vec{n} d\sigma .$$

Soit $\vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$ une paramétrisation de Σ ; on a $\vec{n}(u,v) = (\partial_u \vec{r} \wedge \partial_v \vec{r}) / |\partial_u \vec{r} \wedge \partial_v \vec{r}|$; on déduit immédiatement des définitions :

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} &= \iint_D \vec{v}(\vec{r}(u,v)) \cdot (\partial_u \vec{r} \wedge \partial_v \vec{r}) dudv = \\ &= \iint_D [\vec{v}(\vec{r}(u,v)), \partial_u \vec{r}(u,v), \partial_v \vec{r}(u,v)] dudv , \end{aligned}$$

$$\iint_{\Sigma} \vec{v} d\sigma = \iint_D \vec{v}(\vec{r}(u,v)) |\partial_u \vec{r} \wedge \partial_v \vec{r}| dudv ,$$

$$\iint_{\Sigma} \vec{v} \wedge d\vec{\sigma} = \iint_D \vec{v}(\vec{r}(u,v)) \wedge (\partial_u \vec{r}(u,v) \wedge \partial_v \vec{r}(u,v)) dudv$$

$$\iint_{\Sigma} f d\vec{\sigma} = \iint_D f(\vec{r}(u,v)) (\partial_u \vec{r}(u,v) \wedge \partial_v \vec{r}(u,v)) dudv .$$

Règle. Pour calculer une intégrale de surface, c'est-à-dire pour la transformer en une intégrale ordinaire

- 1) on exprime l'intégrand en fonction des paramètres,
- 2) on pose $d\sigma = |\partial_u \vec{r} \wedge \partial_v \vec{r}| dudv$ ou $d\vec{\sigma} = \partial_u \vec{r} \wedge \partial_v \vec{r} dudv$,
- 3) on remplace le signe Σ par le domaine de variation des paramètres.

Remarque. les intégrales $\iint_{\Sigma} f d\sigma$ et $\iint_{\Sigma} \vec{v} d\sigma$ ne dépendent

pas de l'orientation de Σ ; par contre, les intégrales

$\iint_{\Sigma} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma}$ et $\iint_{\Sigma} \vec{v} \wedge d\vec{\sigma}$ sont multipliées par -1 si l'on change

l'orientation de Σ .

Définition. Un sous-ensemble $\Sigma \subset E$ est un morceau de surface si

- 1) Σ est l'image d'un ensemble régulier $D \subset \mathbb{R}^2$ par une application continue et injective,
- 2) Σ est orienté par le choix d'une face privilégiée,
- 3) $\Sigma = \bigcup_{i=1}^n \Sigma_i$ où les Σ_i sont des morceaux de surface lisses tels que si $P \in \Sigma_i \cap \Sigma_j$ $i \neq j$, alors P appartient à la frontière de Σ_i et à la frontière de Σ_j .

Par définition, la frontière de Σ est l'image de la frontière de D .

Définition. Un sous-ensemble $S \subset E$ est une surface fermée si

- 1) S est l'image par une application continue et injective de la sphère unité dans \mathbb{R}^3 d'équation $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$,
- 2) S est orientée par le choix d'une face privilégiée,
- 3) $S = \bigcup_{i=1}^n \Sigma_i$ où les Σ_i sont des morceaux de surface lisses tels que si $P \in \Sigma_i \cap \Sigma_j$ $i \neq j$, alors P appartient à la frontière de Σ_i et à la frontière de Σ_j .

Convention. A moins qu'on ne spécifie explicitement le contraire, l'orientation d'une surface fermée est définie de telle sorte que la normale orientée soit la normale extérieure à la surface.

Définition. Une intégrale de surface du type $\iint f d\sigma$, $\iint \vec{v} \cdot d\vec{\sigma}$, $\iint \vec{v} d\sigma$, $\iint f d\vec{\sigma}$, $\iint \vec{v} \wedge d\vec{\sigma}$ portant sur un morceau de surface Σ ou sur une surface fermée S est définie comme la somme des intégrales correspondantes portant sur les morceaux de surface lisses qui composent Σ ou S .

La démonstration du théorème qui suit est similaire à celle du théorème II.3.4.

Théorème II.4.3. Soit Σ un morceau de surface ou une surface fermée d'aire A , f et \vec{v} des champs scalaire et vectoriel continus. On a

$$a) \left| \iint_{\Sigma} f d\sigma \right| \leq \iint_{\Sigma} |f| d\sigma \leq A \max_{P \in \Sigma} |f(P)|,$$

$$b) \left| \iint_{\Sigma} \vec{v} d\sigma \right| \leq \iint_{\Sigma} |\vec{v}| d\sigma \leq A \max_{P \in \Sigma} |\vec{v}(P)|,$$

$$c) \left| \iint_{\Sigma} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} \right| \leq \iint_{\Sigma} |\vec{v}| d\sigma \leq A \max_{P \in \Sigma} |\vec{v}(P)|,$$

$$d) \left| \iint_{\Sigma} \vec{v} \wedge d\vec{\sigma} \right| \leq \iint_{\Sigma} |\vec{v}| d\sigma \leq A \max_{P \in \Sigma} |\vec{v}(P)|,$$

$$e) \left| \iint_{\Sigma} f d\vec{\sigma} \right| \leq \iint_{\Sigma} |f| d\sigma \leq A \max_{P \in \Sigma} |f(P)|.$$

Exemple. Il est bien connu que la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ admet la paramétrisation

$$\vec{r}(\theta, \varphi) = \vec{i} \sin \theta \cos \varphi + \vec{j} \sin \theta \sin \varphi + \vec{k} \cos \theta;$$

θ et φ représentent la colatitute et la longitude (figure 3).

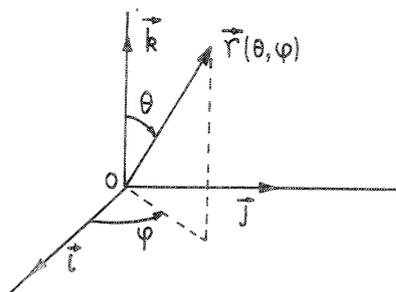
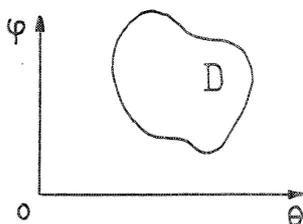


figure 3

Pour qu'un morceau de surface soit défini, il faut préciser l'ensemble D de variation de θ et φ et l'orientation ; décidons que l'orientation corresponde à la normale extérieure.

On a

$$\begin{aligned} \partial_{\theta} \vec{r}(\theta, \varphi) \wedge \partial_{\varphi} \vec{r}(\theta, \varphi) &= \\ \text{Det} \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & 0 \end{pmatrix} & \\ = \vec{i}\sin^2\theta\cos\varphi + \vec{j}\sin^2\theta\sin\varphi + \vec{k}\sin\theta\cos\theta &= \sin\theta \vec{r}(\theta, \varphi) ; \end{aligned}$$

de par sa signification géométrique θ varie entre 0 et π , donc $\sin\theta$ est positif ; ainsi $\partial_{\theta} \vec{r} \wedge \partial_{\varphi} \vec{r}$ a bien la direction de la normale extérieure ce qui signifie que la convention relative aux choix des paramètres et à l'orientation est satisfaite ; si l'on avait choisi l'orientation inverse, il aurait fallu choisir les paramètres (φ, θ) et non (θ, φ) ; on a la relation

$$|\partial_{\theta} \vec{r}(\theta, \varphi) \wedge \partial_{\varphi} \vec{r}(\theta, \varphi)| = \sin\theta .$$

Calculons, par exemple, l'aire A de la demi-sphère supérieure Σ ; le domaine D de variation est le rectangle $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq \varphi \leq \pi$; on obtient

$$\begin{aligned} A &= \iint_{\Sigma} d\sigma = \iint_D |\partial_{\theta} \vec{r} \wedge \partial_{\varphi} \vec{r}| d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin\theta = 2\pi . \end{aligned}$$

II.5. Angle solide

Soit Σ un morceau de surface ou une surface fermée.
 \vec{r} désigne le rayon vecteur dont l'extrémité est sur Σ ,
 $r = |\vec{r}|$. L'intégrale

$$\omega(\Sigma) = \iint_{\Sigma} \frac{1}{r^3} \vec{r} \cdot d\vec{\sigma} \quad (1)$$

est par définition, l'angle solide sous lequel Σ est vu de l'origine O .

Pour interpréter ce résultat, considérons une décomposition de Σ en "petits" morceaux partiels ; soient π l'un d'eux, P un point de π , π' le morceau de surface intercepté sur la sphère unité, centrée à l'origine, par le cône de sommet O et admettons la frontière de π comme directrice, π'' le morceau de surface intercepté par le même cône sur la sphère centrée à l'origine passant par P (figure 4). Soient encore $\vec{r} = \vec{OP}$, $r = |\vec{r}|$, $S(\pi)$, $S(\pi')$, $S(\pi'')$ les aires de π , π' , π'' ;

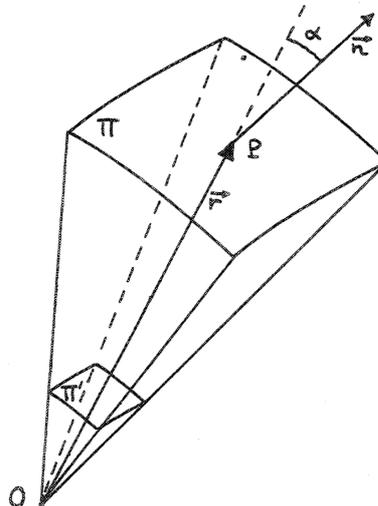


figure 4

par raison d'homothétie on a $S(\pi') = \frac{1}{r^2} S(\pi'')$;
d'autre part, puisque π et π'' sont "petits" on peut considérer ces morceaux comme plans ; puisque les génératrices du cône sont perpendiculaires à π'' , π'' est assimilé à la

projection orthogonale de π ; on a donc approximativement

$$S(\pi') \doteq S(\pi) \cos \alpha = \frac{1}{r} S(\pi) \vec{r} \cdot \vec{n}$$

où α est l'angle de \vec{r} et \vec{n} ; on peut donc écrire

$$S(\pi') \doteq \frac{1}{r} \vec{r} \cdot \vec{n} S(\pi) ;$$

en sommant cette relation sur tous les morceaux partiels qui composent Σ et en "passant à la limite" on obtient

$$S(\Sigma') = \iint_{\Sigma} \frac{1}{r} \vec{r} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\Sigma} \frac{1}{r} \vec{r} \cdot d\vec{\sigma} = \omega(\Sigma) ,$$

où Σ' désigne le morceau de surface intercepté sur la sphère unité centrée à l'origine par le cône admettant pour directrice la frontière de Σ .

Essayons de retrouver ce résultat de manière plus rigoureuse. Plaçons-nous dans le cas particulier où tout rayon issu de l'origine ne coupe Σ qu'en un point au plus ; on peut alors choisir comme paramètres de Σ les angles θ (colatitute) et φ (longitude) (figure 3) ; soit Δ le domaine de variation de θ et φ , en posant $r(\theta, \varphi) = |\vec{r}(\theta, \varphi)|$, on a

$$\vec{r}(\theta, \varphi) = r(\theta, \varphi) \vec{v}(\theta, \varphi) ,$$

$$\vec{v}(\theta, \varphi) = \vec{i} \sin \theta \cos \varphi + \vec{j} \sin \theta \sin \varphi + \vec{k} \cos \theta ,$$

$$(\theta, \varphi) \in \Delta ;$$

on a supposé implicitement que $\partial_{\theta} \vec{r} \wedge \partial_{\varphi} \vec{r}$ avait la même direction que \vec{n} ; on remarque d'autre part que l'extrémité du vecteur \vec{v} décrit précisément Σ' . On a

$$\begin{aligned} \omega(\Sigma) &= \iint_{\Delta} \frac{1}{r} \vec{r} \cdot (\partial_{\theta} \vec{r} \wedge \partial_{\varphi} \vec{r}) d\theta d\varphi \\ &= \iint_{\Delta} \frac{1}{r} [\vec{r}, \partial_{\theta} \vec{r}, \partial_{\varphi} \vec{r}] d\theta d\varphi ; \end{aligned}$$

$$[\vec{r}, \partial_{\theta} \vec{r}, \partial_{\varphi} \vec{r}] = r[\vec{v}, \vec{v} \partial_{\theta} r + r \partial_{\theta} \vec{v}, \vec{v} \partial_{\varphi} r + r \partial_{\varphi} \vec{v}] ;$$

on utilise les propriétés du produit mixte ; on soustrait du second argument le premier argument multiplié par $\partial_\theta \vec{r}$; on soustrait du troisième argument le premier argument multiplié par $\partial_\varphi \vec{r}$; on obtient

$$[\vec{r}, \partial_\theta \vec{r}, \partial_\varphi \vec{r}] = r^3 [\vec{v}, \partial_\theta \vec{v}, \partial_\varphi \vec{v}] =$$

$$r^3 \text{Det} \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi & \sin\theta \sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta \cos\varphi & \cos\theta \sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\theta \sin\varphi & \sin\theta \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} = r^3 \sin\theta ,$$

$$\omega(\Sigma) = \iint_{\Delta} \sin\theta d\theta d\varphi ;$$

mais nous savons (exemple en fin du paragraphe II.4) que sur Σ' on a $d\sigma = \sin\theta d\theta d\varphi$; par conséquent, le membre de droite de cette équation représente l'aire $S(\Sigma')$. Q.E.D.

Remarque. Pour obtenir ce dernier résultat, il a fallu supposer que $\partial_\theta \vec{r} \wedge \partial_\varphi \vec{r}$ a la même orientation que \vec{n} , ou, ce qui revient au même que l'angle de \vec{n} et \vec{r} est aigu ; si cet angle est obtus, l'angle solide est négatif ; plus généralement, la contribution à l'intégrale (1) sur la portion de Σ où $\vec{n} \cdot \vec{r} \geq 0$ est positive ; la contribution sur la portion de Σ où $\vec{n} \cdot \vec{r} \leq 0$ est négative.

Cas particuliers. Σ est une surface fermée (normale orientée dirigée vers l'extérieur). Si l'origine est à l'intérieur de Σ , alors la surface interceptée sur la sphère unité est la sphère entière ; l'angle solide vaut donc 4π (l'argument est clair si tout rayon issu de l'origine coupe Σ en un point ; cependant, même si cette condition n'est pas vérifiée, c'est-à-dire si certains rayons coupent Σ en plusieurs points, le résultat est encore exact). Si l'origine est à l'extérieur, on considère le cône tangent à Σ ;

il divise Σ en deux parties Σ_1 et Σ_2 (figure 5) ;
l'aire de la surface interceptée par le cône sur la sphère
unité est, en valeur absolue, l'angle solide sous lequel
on voit Σ_1 ou Σ_2 ; cependant ces deux angles solides sont
de signe opposé ; par conséquent, l'angle solide sous lequel
 Σ est vu est nul.

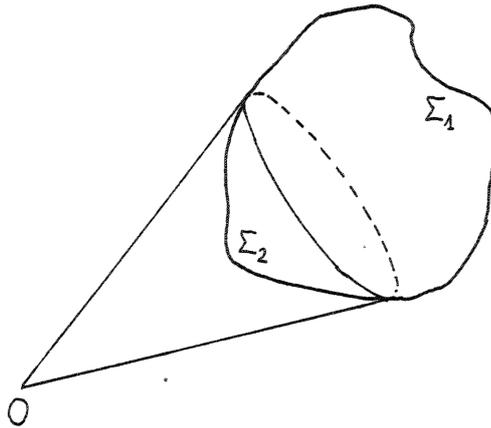


figure 5

II.6. Gradient, dérivée dans une direction

Dans ce paragraphe, A désigne un ouvert de E .

Définition. Soit f un champ scalaire de classe $C^1(A)$;

$$\vec{\text{grad}} f(x,y,z) = \vec{i} \partial_x f(x,y,z) + \vec{j} \partial_y f(x,y,z) + \vec{k} \partial_z f(x,y,z)$$

est le gradient de f au point (x,y,z) . Le gradient est un opérateur qui fait correspondre au champ scalaire f le champ vectoriel $\vec{\text{grad}} f$.

Théorème II.5.1. Soit P_0 un point de la surface de niveau Σ définie par l'équation $f(P) = C$ (C constante) ; on suppose f de classe $C^1(A)$, Σ lisse et $\vec{\text{grad}} f(P_0) \neq 0$; $\vec{\text{grad}} f(P_0)$ est alors normal à Σ .

Démonstration. Soit $\vec{r}(u,v) = \vec{i}x(u,v) + \vec{j}y(u,v) + \vec{k}z(u,v)$ une représentation paramétrique de Σ , $\vec{OP}_0 = \vec{r}(u_0, v_0)$. On a identiquement en u et v :

$$f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = C ;$$

en dérivant les deux membres de cette relation en (u_0, v_0) par rapport à u , on obtient :

$$\begin{aligned} & \partial_x f(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0)) \partial_u x(u_0, v_0) \\ & + \partial_y f(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0)) \partial_u y(u_0, v_0) \\ & + \partial_z f(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0)) \partial_u z(u_0, v_0) = 0 , \\ & \vec{\text{grad}} f(\vec{r}(u_0, v_0)) \cdot \partial_u \vec{r}(u_0, v_0) = 0 ; \end{aligned} \tag{1}$$

de même en dérivant par rapport à v , on a

$$\vec{\text{grad}} f(\vec{r}(u_0, v_0)) \cdot \partial_v \vec{r}(u_0, v_0) = 0 ; \tag{2}$$

$\partial_u \vec{r}(u_0, v_0)$ et $\partial_v \vec{r}(u_0, v_0)$ sont des vecteurs indépendants du plan tangent à Σ en P_0 ; (1) et (2) expriment que $\overrightarrow{\text{grad}} f(P_0)$ est perpendiculaire à ce plan. Q.E.D.

Dérivée dans une direction. Soient f un champ scalaire de classe $C^1(A)$ et \vec{s} un vecteur donné de longueur 1. La dérivée de f au point $P(x, y, z)$ dans la direction de \vec{s} est définie par l'expression

$$\begin{aligned} \frac{df(x, y, z)}{ds} &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x + \lambda s_x, y + \lambda s_y, z + \lambda s_z) - f(x, y, z)}{\lambda} \\ &= \left. \frac{d}{d\lambda} f(x + \lambda s_x, y + \lambda s_y, z + \lambda s_z) \right|_{\lambda = 0}; \end{aligned}$$

en appliquant la règle de dérivation des fonctions composées cette expression devient

$$\partial_x f(x, y, z) \cdot s_x + \partial_y f(x, y, z) \cdot s_y + \partial_z f(x, y, z) \cdot s_z = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \vec{s},$$

d'où le résultat

$$\frac{df(P)}{ds} = \overrightarrow{\text{grad}} f(P) \cdot \vec{s}. \quad (2a)$$

Cas particuliers.

1) $\vec{s} = \vec{i}$, c'est-à-dire $s_x = 1, s_y = 0, s_z = 0$

$$\frac{d}{ds} f(P) = \partial_x f(P);$$

de même $\partial_y f, \partial_z f$ sont les dérivées de f dans les directions \vec{j} et \vec{k} .

2) \vec{s} est la normale \vec{n} à la surface de niveau passant par P et dirigée dans le sens des valeurs croissantes de f ; on a donc $\frac{df(P)}{dn} > 0$ (on admet implicitement que la surface de niveau admet un plan tangent en P et que $\frac{df(P)}{dn} \neq 0$; la relation (2a) et le théorème II.6.1 permettent alors d'écrire

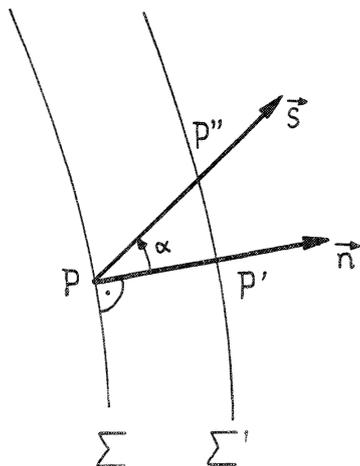
$$\frac{df(P)}{dn} = \overrightarrow{\text{grad}} f(P) \cdot \vec{n} = |\overrightarrow{\text{grad}} f(P)|$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(P) = \frac{d}{dn} f(P) \vec{n} \quad ; \quad (3)$$

en remplaçant dans (2a), on obtient

$$\frac{df(P)}{ds} = \frac{d}{dn} f(P) (\vec{n} \cdot \vec{s}) = \frac{d}{dn} f(P) \cos \alpha \quad , \quad (4)$$

où α est l'angle défini par \vec{n} et \vec{s} . Cette relation peut être également obtenue géométriquement ; soit Σ la surface de niveau passant par P de constante C ($f(P) = C$), Σ' une surface de niveau "voisine" correspondant à la constante $C' > C$; soient P' et P" les intersections des rayons de direction \vec{n} et \vec{s} issus de P avec Σ' ; on a (figure 6)



$$\frac{d}{dn} f(P) \doteq \frac{C' - C}{|PP''|} \quad ,$$

$$\frac{d}{ds} f(P) \doteq \frac{C' - C}{|PP''|} \quad ,$$

$$|PP'| \doteq |PP''| \cos \alpha$$

et, par conséquent,

$$\frac{d}{ds} f(P) \doteq \frac{d}{dn} f(P) \frac{|PP'|}{|PP''|} \doteq \frac{d}{dn} f(P) \cos \alpha \quad ;$$

figure 6

en faisant tendre C' vers C , on "voit" que l'on peut remplacer dans cette dernière relation, le signe \doteq par un signe d'égalité.

Caractère intrinsèque du gradient. La définition du gradient que nous avons adoptée semble dépendre du triplet fondamental adopté ; Supposons que $(\vec{p}, \vec{q}, \vec{t})$ soit un autre triplet direct de vecteurs orthogonaux de longueur 1 :

$$\vec{r} = \vec{i}_x + \vec{j}_y + \vec{k}_z = \vec{p}_\xi + \vec{q}_\eta + \vec{t}_\zeta ;$$

un même champ scalaire $\varphi(\vec{r})$ est décrit par la fonction $f(x,y,z)$ dans le premier système de coordonnées et par la fonction $g(\xi,\eta,\zeta)$ dans le second (il n'est plus possible d'identifier, comme nous le faisons habituellement le champ avec sa fonction représentative dans le système x,y,z) ; il n'est pas certain, à priori, que les deux vecteurs correspondant à un même point \vec{r}

$$\begin{aligned} & \vec{i} \partial_x f(x,y,z) + \vec{j} \partial_y f(x,y,z) + \vec{k} \partial_z f(x,y,z) , \\ & \vec{p} \partial_\xi g(\xi,\eta,\zeta) + \vec{q} \partial_\eta g(\xi,\eta,\zeta) + \vec{t} \partial_\zeta g(\xi,\eta,\zeta) \end{aligned}$$

soient identiques. La relation (3) permet cependant de l'affirmer (on laisse de côté les hypothèses restrictives que nous avons énoncées pour obtenir (3)) ; en effet les notions de surface de niveau, de normale à une surface et de dérivée dans une direction sont indépendantes du repère.

Théorème II.6.2. Soit f un champ scalaire de classe $C^1(A)$, $\Gamma \subset A$ un arc d'origine P_0 et d'extrémité P_1 . On a

$$\int_{\Gamma} \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{r} = f(P_1) - f(P_0) .$$

Démonstration. Soit $\vec{r}(t) = \vec{i}_x(t) + \vec{j}_y(t) + \vec{k}_z(t)$, $a \leq t \leq b$ une représentation paramétrique de Γ . On a

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{r} = \\ & = \int_a^b \{ \partial_x f(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + \partial_y f(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + \\ & \quad + \partial_z f(x(t), y(t), z(t)) z'(t) \} dt \\ & = \int_a^b \frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t)) dt = f(x(b), y(b), z(b)) - f(x(a), y(a), z(a)) \\ & = f(P_1) - f(P_0) . \end{aligned}$$

Théorème II.6.3. Si \vec{v} est un champ vectoriel de classe $C^0(A)$, les deux propriétés suivantes (relatives au champ \vec{v}) sont équivalentes :

- a) pour tout arc $\Gamma \subset A$, $\int_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{r}$ ne dépend que des extrémités de Γ ,
- b) pour tout arc $\Gamma \subset A$ fermé, $\int_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0$.

Démonstration. a) \Rightarrow b) ; on suppose a) vraie, on veut montrer b) ; soit donc Γ un arc fermé, P_1 et P_2 deux points de Γ , Γ_1 et Γ_2 les deux arcs joignant P_1 à P_2 et composant Γ , Γ_1 ayant la même orientation que Γ (figure 7) ; on a, par hypothèse

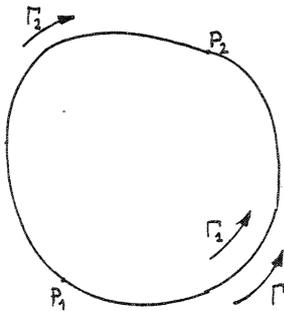


figure 7

$$\int_{\Gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{r} ;$$

puisque Γ_2 a l'orientation opposée de celle de Γ_1 on a

$$\int_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{r} - \int_{\Gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0$$

Q.E.D.

b) \Rightarrow a) ; on suppose b) vraie, on veut montrer a) ; soit Γ_1 et Γ_2 deux arcs joignant P_1 à P_2 , Γ l'arc fermé composé de Γ_1 , et Γ_2 ayant la même orientation que Γ_1 ; on a par hypothèse

$$\int_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0 ;$$

mais d'autre part :

$$0 = \int_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{r} - \int_{\Gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \int_{\Gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{r} ;$$

Théorème II.6.4. Un champ vectoriel \vec{v} de classe $C^0(A)$ est le gradient d'un champ scalaire f de classe $C^1(A)$ si et seulement si pour tout $\Gamma \subset A$ l'intégrale

$$\int_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{r} \quad (5)$$

ne dépend que des extrémités de Γ .

Démonstration. a) La condition est nécessaire : il faut montrer que si $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} f$, alors (5) ne dépend que des extrémités de Γ ; cette propriété est une conséquence immédiate du théorème II.6.2.

b) La condition est suffisante : il faut montrer que si, pour tout $\Gamma \subset A$, (5) ne dépend que des extrémités de Γ , alors \vec{v} est le gradient d'une fonction f . Pour simplifier la démonstration, nous supposerons de plus que A est connexe. Soit $\widehat{QP} \subset A$ un arc quelconque joignant un point particulier fixe $Q \in A$ à P et considérons la fonction f définie par

$$f(P) = \int_{\widehat{QP}} \vec{v} \cdot d\vec{r} ; \quad (6)$$

$f(P)$ est bien défini, indépendamment du choix de l'arc \widehat{QP} (le choix de la définition de f est suggéré par le théorème II.6.2). Vérifions que $\partial_x f = v_x$; soient $P(x_0, y_0, z_0)$, $P'(x_0 + \Delta x, y_0, z_0)$ et $\widehat{PP'}$ le segment de droite joignant P et P' (figure 8); l'arc $\widehat{PP'}$ admet la représentation paramétrique

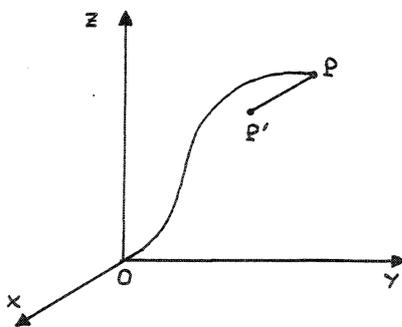


figure 8

$$\vec{r}(t) = \vec{i}t + \vec{j}y_0 + \vec{k}z_0, \quad x_0 \leq t \leq x_0 + \Delta x ;$$

on a :

$$f(P') = \int_{\widehat{QP'}} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{\widehat{QP}} \vec{v} \cdot d\vec{r} + \int_{\widehat{PP'}} \vec{v} \cdot d\vec{r} ,$$

$$f(P') - f(P) = \int_{\widehat{PP'}} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} v_x(t, y_0, z_0) dt ;$$

puisque v_x est continue, on peut appliquer le théorème de la moyenne :

$$f(P') - f(P) = v_x(\bar{t}, y_0, z_0) \Delta x, \quad x_0 < \bar{t} < x_0 + \Delta x ;$$

partant de la définition de $\partial_x f$ on a

$$\partial_x f(P) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(P') - f(P)}{\Delta x} = v_x(x_0, y_0, z_0) ;$$

on obtiendrait de façon semblable $\partial_y f = v_y$, $\partial_z f = v_z$, Q.E.D.

Remarque. Deux champs f et f^* de classe $C^1(A)$, où A est connexe, qui admettent le même gradient différent par une constante ; en effet, soit $g = f - f^*$; on a $\overrightarrow{\text{grad}} g = 0$; soit P_0 et P_1 , deux points quelconques et $\Gamma \subset A$ un arc qui les relie ; on a (théorème II.6.2) :

$$0 = \int_{\Gamma} \overrightarrow{\text{grad}} g \cdot d\vec{r} = g(P_1) - g(P_0) \Rightarrow g(P_0) = g(P_1) ;$$

donc g est bien un champ scalaire constant.

Terminologie. Un champ $\vec{v} \in C^0(A)$ tel que $\int_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0$ pour tout $\Gamma \subset A$ fermé est un champ conservatif. Si $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} f$, on dit que \vec{v} dérive du potentiel f ; dans certaines branches de la physique, on utilise cette expression si $\vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}} f$.

II.7. Rotationnel. Divergence. Laplacien.

Dans ce paragraphe, A désigne un ouvert de E .

Soit \vec{v} un champ vectoriel de classe $C^1(A)$; le champ

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \vec{i}(\partial_y v_z - \partial_z v_y) + \vec{j}(\partial_z v_x - \partial_x v_z) + \vec{k}(\partial_x v_y - \partial_y v_x)$$

est appelé rotationnel du champ \vec{v} . Le rotationnel est un opérateur qui, appliqué au champ vectoriel \vec{v} , fait correspondre le champ vectoriel $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}$. Si $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}(P) = 0$ en tout point $P \in A$, on dit que \vec{v} est irrotationnel. On utilise volontiers la notation symbolique

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \text{Det} \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} .$$

Interprétation mécanique. Soit en un instant particulier \vec{v}_0 la vitesse à l'origine d'un corps solide, $\vec{\omega}$ sa rotation instantanée ; si $\vec{r} = OP = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$, la vitesse $\vec{v}(P)$ du corps solide au point P est donnée par

$$\vec{v}(P) = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{r} ;$$

\vec{v} est un champ vectoriel, calculons son rotationnel :

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \wedge \vec{r} &= \text{Det} \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{pmatrix} \\ &= \vec{i}(\omega_y z - \omega_z y) + \vec{j}(\omega_z x - \omega_x z) + \vec{k}(\omega_x y - \omega_y x) ; \end{aligned}$$

\vec{v}_0 est champ vectoriel constant ; son rotationnel est nul ; on a donc

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \text{Det} \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \omega_y z - \omega_z y & \omega_z x - \omega_x z & \omega_x y - \omega_y x \end{pmatrix} ,$$

$$\text{d'où} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \vec{i}2\omega_x + \vec{j}2\omega_y + \vec{k}2\omega_z = 2\vec{\omega} .$$

Théorème II.7.1. 1) Soit $f \in C^2(A)$, $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} f$.
Alors $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}(P) = \vec{0}$, $\forall P \in A$.

2) Soit A simplement connexe,
 $\vec{v} \in C^1(A)$, $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}(P) = \vec{0}$, $\forall P \in A$. Alors il existe f
tel que $\vec{v}(P) = \overrightarrow{\text{grad}} f(P)$, $P \in A$.

Démonstration. 1) On a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} f &= \vec{i}(\partial_y \partial_z f - \partial_z \partial_y f) \\ &+ \vec{j}(\partial_z \partial_x f - \partial_x \partial_z f) \\ &+ \vec{k}(\partial_x \partial_y f - \partial_y \partial_x f) = 0 . \end{aligned}$$

2) Pour simplifier la démonstration, on suppose que A est étoilé. Soit $Q \in A$ tel que pour tout $P \in A$ le segment $[Q,P]$ est entièrement contenu dans A . Considérons $[Q,P]$ comme un arc d'origine Q , d'extrémité P . Posons

$$f(P) = \int_{[Q,P]} \vec{v} \cdot d\vec{r}$$

et montrons que $\vec{v}(P) = \overrightarrow{\text{grad}} f(P)$, par exemple $v_x(P) = \partial_x f(P)$. Soit $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ et $P(x, y, z)$; l'arc $[Q,P]$ admet la paramétrisation $\vec{r}(t) = \vec{i}(\alpha + t(x-\alpha)) + \vec{j}(\beta + t(y-\beta)) + \vec{k}(\gamma + t(z-\gamma))$, $t \in [0,1]$; en utilisant les relations $\partial_x v_y = \partial_y v_x$, on obtient :

$$f(x, y, z) = \int_0^1 \{v_x(\alpha + t(x-\alpha), \beta + t(y-\beta), \dots)(x-\alpha) + v_y(\dots)(y-\beta) + v_z(\dots)(z-\gamma)\} dt ;$$

$$\begin{aligned} \partial_x f(x, y, z) &= \int_0^1 \{v_x(\dots) + t\{\partial_x v_x(\dots)(x-\alpha) + \partial_x v_y(\dots)(y-\beta) + \partial_x v_z(\dots)(z-\gamma)\}\} dt = \\ &= \int_0^1 \{v_x(\dots) + t\{\partial_x v_x(\dots)(x-\alpha) + \partial_y v_x(\dots)(y-\beta) + \partial_z v_x(\dots)(z-\gamma)\}\} dt = \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{d}{dt} \{tv_x(\alpha+t(x-\alpha), \beta+t(y-\beta), \gamma+t(z-\gamma))\} dt = \\ \{tv_x(\alpha+t(x-\alpha), \beta+t(y-\beta), \gamma+t(z-\gamma))\} \Big|_0^1 = v_x(x,y,z). \quad \text{Q.E.D.}$$

Remarque. Des théorèmes II.6.3, II.6.4 et II.7.1 il résulte que pour un champ \vec{v} de classe $C^1(A)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- \vec{v} est un champ conservatif, c'est-à-dire $\int_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0$ pour tout arc $\Gamma \subset A$ fermé ;
- pour tout arc $\Gamma \subset A$, $\int_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{r}$ ne dépend que des extrémités de Γ ;
- \vec{v} est le gradient d'un champ scalaire ;
- \vec{v} est irrotationnel.

La condition de connexité simple de la deuxième partie du théorème II.7.1 est essentielle. En effet, considérons l'ensemble non simplement connexe $A = \{P(x,y,z) : x^2+y^2 > 0\}$. Le champ

$$\vec{v}(x,y,z) = -\vec{i} \frac{y}{x^2+y^2} + \vec{j} \frac{x}{x^2+y^2}$$

est de classe $C^1(A)$ mais présente des singularités le long de l'axe des z ; on vérifie immédiatement que \vec{v} est irrotationnel ; considérons le cercle Γ de paramétrisation $\vec{r}(t) = \vec{i} \cos t + \vec{j} \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$; on a

$$\int_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi \neq 0.$$

Soit \vec{v} un champ vectoriel de classe $C^1(A)$;

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

est appelé divergence du champ \vec{v} . Soit f un champ scalaire de classe $C^2(A)$;

$$\Delta f = \text{div } \overrightarrow{\text{grad } f} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

est appelé laplacien de f . Soit \vec{v} un champ vectoriel de classe $C^2(A)$;

$$\Delta \vec{v} = \vec{i} \Delta v_x + \vec{j} \Delta v_y + \vec{k} \Delta v_z$$

est appelé laplacien de \vec{v} . La divergence est un opérateur, qui, appliqué au champ vectoriel \vec{v} fait correspondre le champ scalaire $\text{div } \vec{v}$. Le laplacien est un opérateur qui, appliqué au champ scalaire f fait correspondre le champ scalaire Δf ; appliqué au champ vectoriel \vec{v} il fait correspondre le champ vectoriel $\Delta \vec{v}$. Si $\text{div } \vec{v} = 0$ en tout point de A , \vec{v} est dit "à flux conservatif" ou "champ solénoïdal".

Théorème II.7.2. 1) Soit $\vec{u} \in C^2(A)$, $\vec{v} = \text{rot } \vec{u}$.
Alors $\text{div } \vec{v}(P) = 0, \forall P \in A$.

2) Soit A étoilé,
 $\vec{v} \in C^1(A)$, $\text{div } \vec{v}(P) = 0, \forall P \in A$; alors il existe \vec{u}
tel que $\vec{v}(P) = \text{rot } \vec{u}(P), \forall P \in A$.

Démonstration. 1) On a

$$\text{div } \vec{v} = \text{div } \text{rot } \vec{u} = \partial_x (\partial_y u_z - \partial_z u_y) + \partial_y (\partial_z u_x - \partial_x u_z) + \partial_z (\partial_x u_y - \partial_y u_x) = 0.$$

2) Soit $Q \in A$ tel que pour tout $P(x, y, z) \in A$, le segment $[Q, P] \subset A$; sans restriction de généralité, nous pouvons supposer que Q est l'origine O .
Posons

$$\vec{u}(x, y, z) = \int_0^1 t \vec{v}(tx, ty, tz) \wedge (\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) dt$$

et montrons que $\vec{v} = \text{rot } \vec{u}$, par exemple $v_x(x, y, z) = \partial_y u_z(x, y, z) - \partial_z u_y(x, y, z)$; on a

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \vec{i} \int_0^1 (tv_y(tx, ty, tz)z - tv_z(tx, ty, tz)y) dt \\ &+ \vec{j} \int_0^1 (tv_z(tx, ty, tz)x - tv_x(tx, ty, tz)z) dt \\ &+ \vec{k} \int_0^1 (tv_x(tx, ty, tz)y - tv_y(tx, ty, tz)x) dt; \end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse $\partial_x v_x(tx, ty, tz) + \partial_y v_y(tx, ty, tz) + \partial_z v_z(tx, ty, tz) = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \partial_y u_z(x, y, z) - \partial_z u_y(x, y, z) \\
 = & \int_0^1 (t^2 \partial_y v_x(tx, ty, tz)y + tv_x(\quad) - t^2 \partial_y v_y(\quad)x) dt \\
 = & \int_0^1 (t^2 \partial_z v_z(tx, ty, tz)x - t^2 \partial_z v_x(\quad)z - tv_x(\quad)) dt \\
 = & \int_0^1 \{t^2 (\partial_y v_x(tx, ty, tz)y + \partial_z v_x(tx, ty, tz)z + \partial_x v_x(tx, ty, tz)x) \\
 & \quad + 2tv_x(\quad)\} dt \\
 = & \int_0^1 \frac{d}{dt} \{t^2 v_x(tx, ty, tz)\} dt = v_x(x, y, z). \quad \text{Q.E.D.}
 \end{aligned}$$

Remarque. Si $\vec{u} \in C^1(A)$, $f \in C^2(A)$, $\vec{u}^* = \vec{u} + \overrightarrow{\text{grad}} f$, alors $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}(P) = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}^*(P)$, $P \in A$; réciproquement, si A est simplement connexe, si $\vec{u}, \vec{u}^* \in C^1(A)$ et $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}(P) = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}^*(P) \forall P \in A$ alors $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{u} - \vec{u}^*) = 0$ et d'après le théorème II.7.1 il existe f tel que $\vec{u}^* - \vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}} f$.

II.8. Formules relatives aux opérateurs $\overrightarrow{\text{grad}}$, div , $\overrightarrow{\text{rot}}$.

Linéarité. Sans le mentionner explicitement, nous avons déjà utilisé plusieurs fois la linéarité des opérateurs $\overrightarrow{\text{grad}}$, div , $\overrightarrow{\text{rot}}$, Δ . Soient α et β des nombres réels, f, g, \vec{u}, \vec{v} des champs ; on a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}(\alpha f + \beta g) &= \alpha \overrightarrow{\text{grad}} f + \beta \overrightarrow{\text{grad}} g , \\ \text{div}(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) &= \alpha \text{div} \vec{u} + \beta \text{div} \vec{v} , \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) &= \alpha \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} + \beta \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} , \\ \Delta(\alpha f + \beta g) &= \alpha \Delta f + \beta \Delta g , \\ \Delta(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) &= \alpha \Delta \vec{u} + \beta \Delta \vec{v} . \end{aligned}$$

Opérateurs itérés. En faisant agir successivement deux des opérateurs $\overrightarrow{\text{grad}}$, div , $\overrightarrow{\text{rot}}$, on obtient les diverses formules

$$\begin{aligned} \text{div} \overrightarrow{\text{grad}} f &= \Delta f , \\ \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} f &= 0 , \\ \text{div} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} &= 0 , \\ \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} &= \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{v} - \Delta \vec{v} ; \end{aligned}$$

la première formule résulte d'une définition, la seconde du théorème II.7.1, la troisième du théorème II.7.2 ; démontrons la dernière formule :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} &= \vec{i}(\partial_y v_z - \partial_z v_y) + \vec{j}(\partial_z v_x - \partial_x v_z) + \vec{k}(\partial_x v_y - \partial_y v_x) , \\ \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} &= \vec{i}[\partial_y(\partial_x v_y - \partial_y v_x) - \partial_z(\partial_z v_x - \partial_x v_z)] + \vec{j}[\partial_z(\partial_z v_x - \partial_x v_z) - \partial_x(\partial_x v_y - \partial_y v_x)] , \\ &= \vec{i}[\partial_x \partial_y v_y - \partial_y \partial_y v_x - \partial_z \partial_z v_x + \partial_x \partial_z v_z] + \vec{j}[\partial_z(\partial_z v_x - \partial_x v_z) - \partial_x(\partial_x v_y - \partial_y v_x)] , \\ &= \vec{i}[\partial_x(\partial_y v_y + \partial_z v_z) - \partial_y \partial_y v_x - \partial_z \partial_z v_x] + \vec{j}[\partial_z(\partial_z v_x - \partial_x v_z) - \partial_x(\partial_x v_y - \partial_y v_x)] , \\ &= \vec{i}[\partial_x \text{div} \vec{v} - \Delta v_x] + \vec{j}[\partial_y \text{div} \vec{v} - \Delta v_y] + \vec{k}[\partial_z \text{div} \vec{v} - \Delta v_z] , \\ &= \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{v} - \Delta \vec{v} . \end{aligned}$$

Opérateurs agissant sur un produit. On a les combinaisons suivantes :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{grad}}(fg) &= f \overrightarrow{\text{grad}} g + g \overrightarrow{\text{grad}} f , \\ \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{u} \cdot \vec{v}) &= \vec{u} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} + \vec{v} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} ; \\ \text{div}(f\vec{v}) &= f \text{div} \vec{v} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f , \\ \text{div}(\vec{u} \wedge \vec{v}) &= \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} - \vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} , \\ \overrightarrow{\text{rot}}(f\vec{v}) &= f \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} + \overrightarrow{\text{grad}} f \wedge \vec{v} , \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{u} \wedge \vec{v}) &= \vec{u} \text{div} \vec{v} - \vec{v} \text{div} \vec{u} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} ,\end{aligned}$$

on a utilisé la notation

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = u_x \partial_x \vec{v} + u_y \partial_y \vec{v} + u_z \partial_z \vec{v} ;$$

ces différentes formules s'établissent en développant le membre de gauche et le membre de droite puis en les comparant . L'opérateur formel (parce que l'on ne précise pas sur quoi il agit)

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \partial_x + \vec{j} \partial_y + \vec{k} \partial_z$$

est appelé soit "del" ou "nabla". Il permet d'introduire les notations suggestives suivantes :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{grad}} f &= \vec{\nabla} f , \\ \text{div} \vec{v} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{v} , \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{v} , \\ \Delta f &= \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f , \\ \Delta \vec{v} &= (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} ;\end{aligned}$$

Dans ces notations on utilise le caractère vectoriel et le caractère différentiel de $\vec{\nabla}$.

II.9. Théorème de Stokes

Soient Σ un morceau de surface de normale orientée \vec{n} , Γ sa frontière de tangente orientée unité \vec{u} , \vec{m} (en un point P de Γ) le vecteur unité normal à \vec{n} et à \vec{u} et orienté vers l'extérieur de Σ (\vec{m} est un vecteur du plan tangent à Σ en P) (figure 9). On dit que les orientations respectives de Σ et de Γ satisfont à la règle d'Ampère si le triplet $(\vec{m}, \vec{u}, \vec{n})$ est orienté positivement.

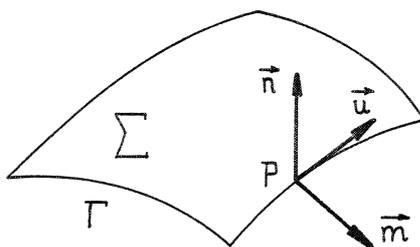


figure 9

Théorème II.9.1. (Stokes)

Soient A un ouvert, $\Sigma \subset A$ un morceau de surface, Γ sa frontière, \vec{w} un champ de classe $C^1(A)$, on suppose que les orientations respectives de Σ et de Γ satisfont à la règle d'Ampère ; on a alors

$$\iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{w} \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\Gamma} \vec{w} \cdot d\vec{r} .$$

La démonstration du théorème de Stokes utilise de façon décisive le théorème de Green-Riemann que nous rappelons maintenant sans preuve.

Théorème II.9.2. (Green-Riemann)

Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ régulier (cf. II.4), C la frontière de D orientée dans le sens trigonométrique positif (en considérant D comme un morceau de surface situé dans le plan xy et de normale \vec{k} , la règle d'Ampère est satisfaite) ;

soit f et $g \in C^1(\bar{D})$; alors

$$\int_C f dx + g dy = \iint_D (\partial_x g - \partial_y f) dx dy .$$

Démonstration du théorème de Stokes.

Soit $\vec{r}(u,v) = \vec{i}x(u,v) + \vec{j}y(u,v) + \vec{k}z(u,v)$,
 $(u,v) \in D$ une paramétrisation de Σ . Pour simplifier la
démonstration nous supposons $x(u,v), y(u,v), z(u,v) \in C^2(D)$.
Nous allons tout d'abord établir la relation suivante :

$$\partial_u \vec{w} \cdot \partial_v \vec{r} - \partial_v \vec{w} \cdot \partial_u \vec{r} = [\overrightarrow{\text{rot}} \vec{w}, \partial_u \vec{r}, \partial_v \vec{r}] ; \quad (1)$$

dans le membre de gauche $\partial_u \vec{w}$ désigne la dérivée partielle
par rapport à u du vecteur $\vec{w}(\vec{r}(u,v))$ considéré comme
fonction de u et v ; dans le membre de droite $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{w}$ est
considéré au point $\vec{r}(u,v)$; il suffit de démontrer chacune
des trois relations

$$\partial_u (\vec{i}w_x) \cdot \partial_v \vec{r} - \partial_v (\vec{i}w_x) \cdot \partial_u \vec{r} = [\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{i}w_x), \partial_u \vec{r}, \partial_v \vec{r}] , \quad (2)$$

$$\partial_u (\vec{j}w_y) \cdot \partial_v \vec{r} - \partial_v (\vec{j}w_y) \cdot \partial_u \vec{r} = [\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{j}w_y), \partial_u \vec{r}, \partial_v \vec{r}] , \quad (3)$$

$$\partial_u (\vec{k}w_z) \cdot \partial_v \vec{r} - \partial_v (\vec{k}w_z) \cdot \partial_u \vec{r} = [\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{k}w_z), \partial_u \vec{r}, \partial_v \vec{r}] , \quad (4)$$

en effet, en additionnant (2), (3), (4) (et en utilisant la
linéarité de la dérivation partielle, du produit mixte et du
rotationnel) on retrouve (1). Vérifions (2) : la règle de
dérivation de fonction de fonctions permet d'écrire

$$\begin{aligned} \partial_u (\vec{i}w_x) &= \vec{i}(\partial_x w_x \cdot \partial_u x + \partial_y w_x \cdot \partial_u y + \partial_z w_x \cdot \partial_u z) , \\ \partial_u (\vec{i}w_x) \cdot \partial_v \vec{r} &= \partial_x w_x \cdot \partial_u x \cdot \partial_v x + \partial_y w_x \cdot \partial_u y \cdot \partial_v x + \partial_z w_x \cdot \partial_u z \cdot \partial_v x , \\ \partial_v (\vec{i}w_x) \cdot \partial_u \vec{r} &= \partial_x w_x \cdot \partial_v x \cdot \partial_u x + \partial_y w_x \cdot \partial_v y \cdot \partial_u x + \partial_z w_x \cdot \partial_v z \cdot \partial_u x , \\ \partial_u (\vec{i}w_x) \cdot \partial_v \vec{r} - \partial_v (\vec{i}w_x) \cdot \partial_u \vec{r} &= \partial_y w_x (\partial_u y \cdot \partial_v x - \partial_v y \cdot \partial_u x) \\ &\quad + \partial_z w_x (\partial_u z \cdot \partial_v x - \partial_v z \cdot \partial_u x) ; \quad (5) \end{aligned}$$

$$\text{rot}(\vec{i}w_x) = \vec{j}\partial_z w_x - \vec{k}\partial_y w_x,$$

$$[\text{rot}(\vec{i}w_x), \partial_u \vec{r}, \partial_v \vec{r}] = \text{Det} \begin{pmatrix} 0 & \partial_z w_x & -\partial_y w_x \\ \partial_u x & \partial_u y & \partial_u z \\ \partial_v x & \partial_v y & \partial_v z \end{pmatrix}; \quad (6)$$

On constate immédiatement l'égalité des membres de droite de (5) et (6).

Nous pouvons maintenant passer à la démonstration proprement dite du théorème de Stokes. Soit C la frontière de D , $u = u(t)$, $v = v(t)$, $a \leq t \leq b$, une paramétrisation de C ; Γ admet alors la paramétrisation $\vec{r}(u(t), v(t))$, $a \leq t \leq b$; le fait que les orientations de \int et Γ satisfont à la règle d'Ampère implique que C est orienté positivement (sens trigonométrique) (figure 10). L'intégrale curviligne le long de Γ peut s'écrire comme intégrale curviligne le long de C ; en effet

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \vec{w} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{w}(\vec{r}(u(t), v(t))) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt \\ &= \int_a^b \vec{w}(\vec{r}(u(t), v(t))) \cdot (\partial_u \vec{r}(u(t), v(t))u'(t) \\ &\quad + \partial_v \vec{r}(u(t), v(t))v'(t)) dt \\ &= \int_C \vec{w} \cdot \partial_u \vec{r} du + \vec{w} \cdot \partial_v \vec{r} dv; \end{aligned}$$

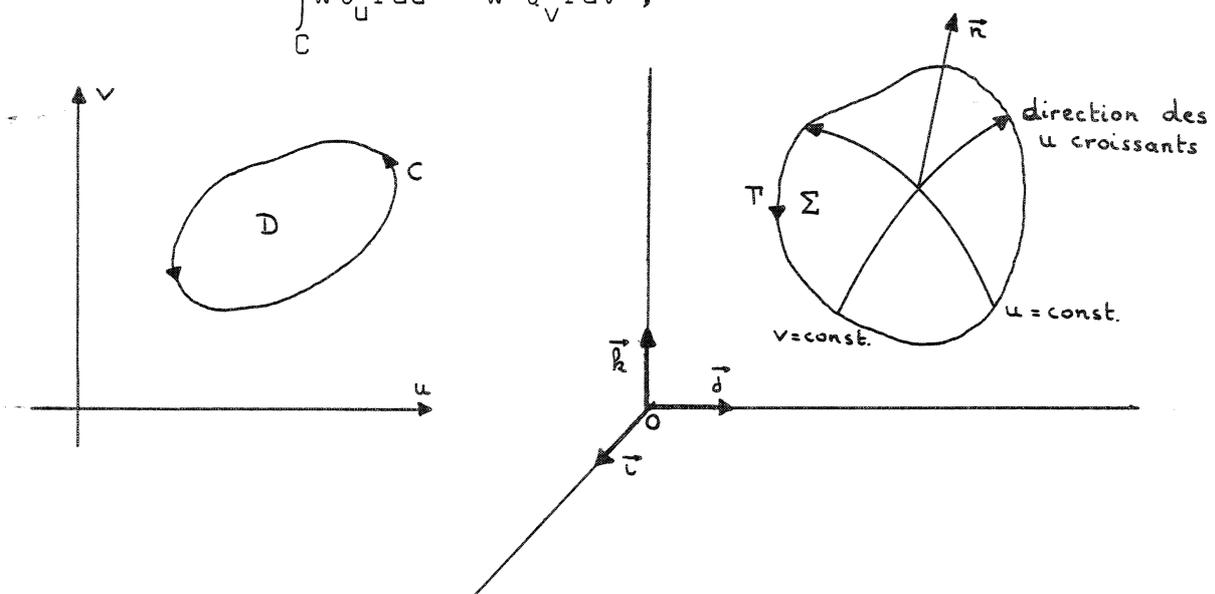


figure 10

dans cette dernière relation $\vec{w} \cdot \partial_u \vec{r}$ est considéré comme une fonction de u et v ($\vec{w}(\vec{r}(u,v)) \cdot \partial_u \vec{r}(u,v)$) ; on peut appliquer la formule de Green-Riemann :

$$\int_{\Gamma} \vec{w} \cdot d\vec{r} = \iint_D (\partial_u (\vec{w} \cdot \partial_v \vec{r}) - \partial_v (\vec{w} \cdot \partial_u \vec{r})) du dv$$

$$= \iint_D (\partial_u \vec{w} \cdot \partial_v \vec{r} - \partial_v \vec{w} \cdot \partial_u \vec{r}) du dv ,$$

car $\vec{w} \cdot \partial_u \partial_v \vec{r} - \vec{w} \cdot \partial_v \partial_u \vec{r} = 0$; on utilise (1) :

$$\int_{\Gamma} \vec{w} \cdot d\vec{r} = \iint_D [\text{rot } \vec{w} \cdot \partial_u \vec{r} \wedge \partial_v \vec{r}] du dv = \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{w} \cdot d\vec{\sigma} . \text{ Q.E.D.}$$

Généralisation. La définition du morceau de surface (II.4) implique que sa frontière comprend un seul arc ; on aimerait également considérer des surfaces ayant des "trous". On parle alors de morceau de surface à frontière multiple ; on suppose simplement qu'un morceau de surface à frontière multiple est constitué d'un nombre fini de morceaux de surfaces ordinaires. Dans la figure 11, le morceau de surface Σ à frontière multiple admet la frontière Γ composée de $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$;

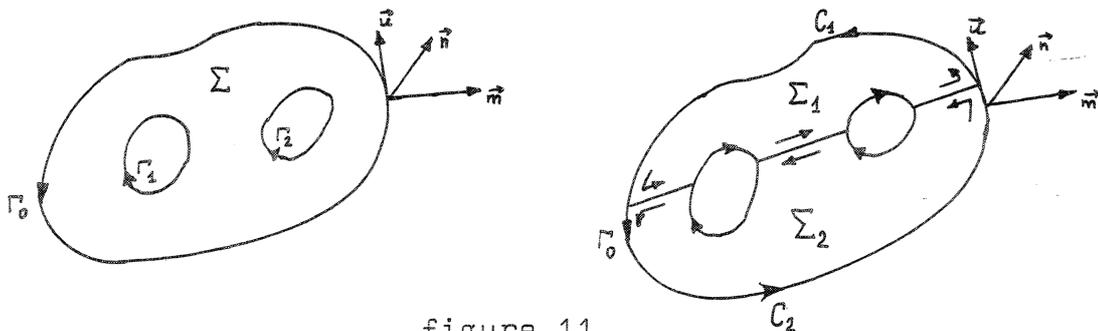


figure 11

d'autre part Σ est constitué des morceaux ordinaires Σ_1 et Σ_2 de frontière C_1 et C_2 . Supposons que les orientations de C_1 et C_2 satisfont à la règle d'Ampère et soit \vec{v} un champ vectoriel ; on peut appliquer le théorème de Stokes à Σ_1 et Σ_2 :

$$\int_{C_1} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_{\Sigma_1} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} \quad ,$$

$$\int_{C_2} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_{\Sigma_2} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} \quad ;$$

le long de leurs parties communes, C_1 et C_2 ont des orientations opposées et les intégrales curvilignes correspondantes s'annulent ; en additionnant ces deux relations, on obtient donc

$$\int_{\Gamma_0} \vec{v} \cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} \quad ;$$

on voit donc que le théorème de Stokes est encore valable pour des morceaux de surface à frontière multiple pour autant que l'intégrale curviligne soit étendue à tous les arcs qui composent la frontière et que l'orientation de chacun de ces arcs satisfasse à la règle d'Ampère.

II.10. Théorèmes du gradient, de la divergence, du rotationnel.

Définition. Un volume est l'adhérence d'un ouvert borné de l'espace euclidien dont la frontière est une surface fermée (II.4).

Lemme fondamental. Soient V un volume, $\vec{n} = \vec{i}\alpha + \vec{j}\beta + \vec{k}\gamma$ la normale extérieure à la frontière S de V , $f \in C^1(V)$.

On a

$$\iiint_V \partial_x f d\tau = \iint_S f \alpha d\sigma, \quad (1)$$

$$\iiint_V \partial_y f d\tau = \iint_S f \beta d\sigma, \quad (2)$$

$$\iiint_V \partial_z f d\tau = \iint_S f \gamma d\sigma. \quad (3)$$

Démonstration. Nous allons démontrer (3), (1) et (2) pouvant s'établir de façon analogue. Supposons d'abord que S ne soit coupé qu'en deux points au plus par toute parallèle à l'axe Oz (figure 12) ; S se décompose en deux morceaux de surface Σ_1 (partie supérieure) et Σ_2 (partie inférieure) d'équations respectives

$$z = \varphi_1(x, y) \quad \text{et} \quad z = \varphi_2(x, y), \quad (x, y) \in D;$$

D est la projection commune de Σ_1 et Σ_2 sur le plan xy .

On a sur Σ_1 :

$$\vec{r}(x, y) = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}\varphi_1(x, y),$$

$$\partial_x \vec{r} \wedge \partial_y \vec{r} = -\vec{i}\partial_x \varphi_1 - \vec{j}\partial_y \varphi_1 + \vec{k},$$

$$d\sigma = ((\partial_x \varphi_1)^2 + (\partial_y \varphi_1)^2 + 1)^{\frac{1}{2}} dx dy;$$

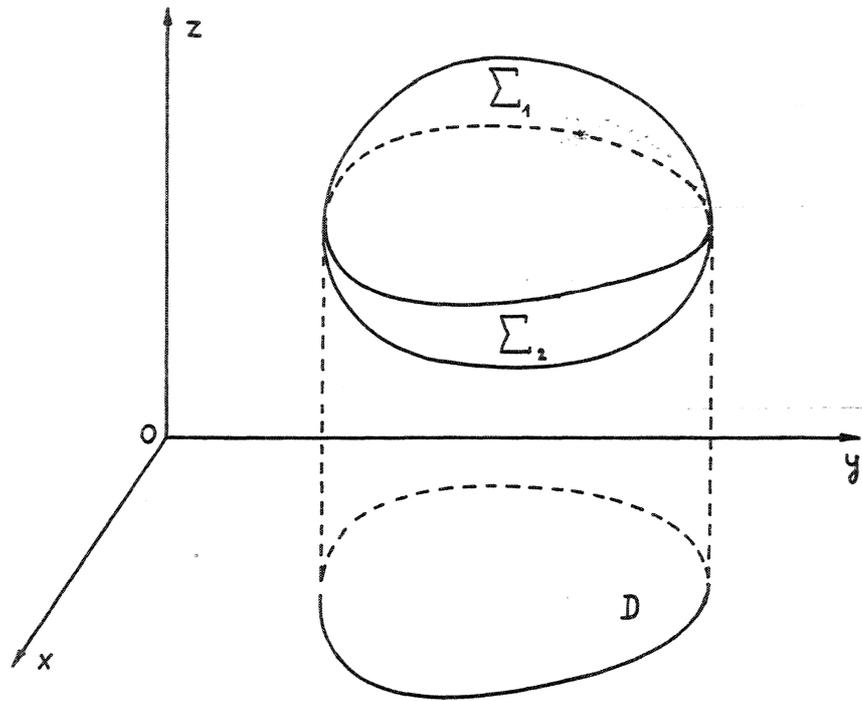


figure 12

on remarque que $(\partial_x \vec{r} \wedge \partial_y \vec{r}) \cdot \vec{k} > 0$, et puisque $\vec{n} \cdot \vec{k} > 0$ sur Σ_1 , il s'en suit que $\partial_x \vec{r} \wedge \partial_y \vec{r}$ a bien la direction de \vec{n} ; on a donc

$$\gamma = \frac{1}{((\partial_x \varphi_1)^2 + (\partial_y \varphi_1)^2 + 1)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\iint_{\Sigma_1} f \gamma d\sigma = \iint_D f(x, y, \varphi_1(x, y)) dx dy;$$

on peut effectuer le même calcul pour Σ_2 ; on aura de nouveau $(\partial_x \vec{r} \wedge \partial_y \vec{r}) \cdot \vec{k} > 0$ mais puisque $\vec{n} \cdot \vec{k} < 0$ sur Σ_2 , $\partial_x \vec{r} \wedge \partial_y \vec{r}$ a la direction opposée de celle de \vec{n} ; on a alors

$$\gamma = \frac{-1}{((\partial_x \varphi_2)^2 + (\partial_y \varphi_2)^2 + 1)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\iint_{\Sigma_2} f \gamma d\sigma = - \iint_D f(x, y, \varphi_2(x, y)) dx dy,$$

et, par conséquent,

$$\iint_S f \gamma d\sigma = \iint_{\Sigma_1} f \gamma d\sigma + \iint_{\Sigma_2} f \gamma d\sigma = \iint_D \{f(x, y, \varphi_1(x, y)) - f(x, y, \varphi_2(x, y))\} dx dy$$

mais on peut écrire, en vertu du théorème fondamental du calcul différentiel

$$f(x, y, \varphi_1(x, y)) - f(x, y, \varphi_2(x, y)) = \int_{\varphi_2(x, y)}^{\varphi_1(x, y)} \partial_z f(x, y, z) dz$$

$$\iint_S f \gamma d\sigma = \iint_D \left(\int_{\varphi_2(x, y)}^{\varphi_1(x, y)} \partial_z f(x, y, z) dz \right) dx dy = \iiint_V \partial_z f(x, y, z) dx dy dz .$$

Pour traiter le cas général, on divise le volume V en un nombre fini de volumes partiels V_1, V_2, \dots, V_m pour chacun desquels la démonstration effectuée est valable. Soit S_1, S_2, \dots, S_n leurs frontières ; on a

$$\begin{aligned} \iiint_V \partial_z f d\tau &= \sum_{i=1}^m \iiint_{V_i} \partial_z f d\tau , \\ \iint_S f \gamma d\sigma &= \sum_{i=1}^m \iint_{S_i} f \gamma d\sigma ; \end{aligned}$$

pour établir cette dernière relation, on remarque que si S_i et S_j ont une partie commune Σ , leurs normales sont opposées sur Σ , leurs γ sont égaux en valeur absolue sur Σ mais de signes opposés, et par conséquent les deux intégrales relatives à Σ s'annulent.

Soient V un volume admettant pour frontière la surface fermée S (normale extérieure), f et \vec{V} des champs de classe $C^1(V)$. On a :

Théorème II.10.1.(gradient)

$$\iint_S f d\vec{\sigma} = \iiint_V \overrightarrow{\text{grad}} f d\tau .$$

Théorème II.10.2. (divergence)

$$\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{v} \, d\tau \quad .$$

Théorème II.10.3. (rotationnel)

$$\iint_S d\vec{\sigma} \wedge \vec{v} = \iiint_V \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{v} \, d\tau \quad ;$$

(on pose, par définition, $\iint_S d\vec{\sigma} \wedge \vec{v} = -\iint_S \vec{v} \wedge d\vec{\sigma}$) .

Démonstrations. Les théorèmes sont des conséquences immédiates des affirmations (1), (2), (3) du lemme fondamental. Démontrons le théorème du gradient :

$$\begin{aligned} \iint_S f d\vec{\sigma} &= \vec{i} \iint_S f \alpha d\sigma + \vec{j} \iint_S f \beta d\sigma + \vec{k} \iint_S f \gamma d\sigma \\ &= \vec{i} \iiint_V \partial_x f d\tau + \vec{j} \iiint_V \partial_y f d\tau + \vec{k} \iiint_V \partial_z f d\tau \\ &= \iiint_V \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \, d\tau \quad ; \end{aligned}$$

démontrons le théorème de la divergence :

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} &= \iint_S (v_x \cdot \alpha + v_y \cdot \beta + v_z \cdot \gamma) d\sigma \\ &= \iiint_V (\partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z) d\tau = \iiint_V \operatorname{div} \vec{v} \cdot d\tau \quad ; \end{aligned}$$

démontrons le théorème du rotationnel

$$\begin{aligned} \iint_S d\vec{\sigma} \wedge \vec{v} &= \iint_S \vec{n} \wedge \vec{v} d\sigma \\ &= \vec{i} \iint_S (\beta v_z - \gamma v_y) d\sigma + \vec{j} \iint_S (\gamma v_x - \alpha v_z) d\sigma + \vec{k} \iint_S (\alpha v_y - \beta v_x) d\sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \vec{i} \iiint_V (\partial_y v_z - \partial_z v_y) d\tau + \vec{j} \iiint_V (\partial_z v_x - \partial_x v_z) d\tau \\
&+ \vec{k} \iiint_V (\partial_x v_y - \partial_y v_x) d\tau = \iiint_V \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} d\tau . \quad \text{Q.E.D.}
\end{aligned}$$

Généralisation. Jusqu'à présent, V a toujours désigné un volume dont la frontière est une surface fermée. Nous appelons volume à frontière multiple un volume présentant un certain nombre de cavités ; on supposera que le volume à frontière multiple peut se décomposer en un nombre fini de volumes admettant pour frontière une surface fermée. Considérons, pour fixer les idées, le cas d'un volume V , comprenant deux cavités (figure 13) ; S_0, S_1, S_2 désignent les trois composantes de la frontière de V ; on peut décomposer V en deux parties V_1 et V_2 de frontières Σ_1 et Σ_2 , respectivement. Soit \vec{v} un champ vectoriel ; le théorème de la divergence s'applique à V_1 et à V_2 :

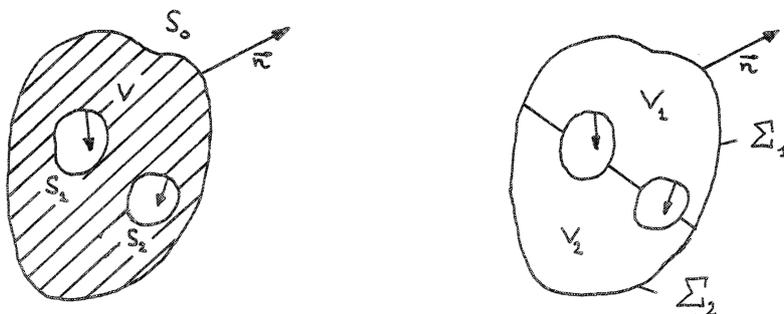


figure 13

$$\iiint_{V_1} \text{div } \vec{v} d\tau = \iint_{\Sigma_1} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} ,$$

$$\iiint_{V_2} \text{div } \vec{v} d\tau = \iint_{\Sigma_2} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} ;$$

sur les parties communes à Σ_1 et Σ_2 , les normales respectives sont opposées ; les intégrales correspondantes s'annulent ; en additionnant ces deux relations, on obtient donc

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{v} \, d\tau = \iint_{S_0} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} + \iint_{S_1} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} + \iint_{S_2} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} ;$$

ainsi le théorème de la divergence est encore valable pour des volumes à frontière multiple pour autant que les intégrales de surface soient étendues à toutes les parties de la frontière de V ; la normale est toujours dirigée vers l'extérieur de V (ce qui signifie, pour une concavité, que la normale est dirigée vers l'intérieur de la concavité). Il en est de même pour les théorèmes du gradient et du rotationnel.

Exemple

Soit V un volume de frontière S , $0 \notin S$; il s'agit de calculer (\vec{r} est le rayon vecteur)

$$I = \iint_S \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{\sigma} .$$

Premier cas : $0 \notin V$; le champ \vec{v} défini comme restriction de \vec{r}/r^3 à V est de classe $C^1(V)$ et l'on peut appliquer le théorème de la divergence :

$$I = \iiint_V \operatorname{div} \vec{v} \, d\tau ;$$

montrons que $\operatorname{div} v = 0$ et par conséquent $I = 0$; en utilisant les formules de II.8, on obtient successivement :

$$\operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{r^3} \operatorname{div} \vec{r} + \vec{r} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \frac{1}{r^3} ;$$

$$\operatorname{div} \vec{r} = 3$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r^3} = -3 r^{-5} \vec{r}$$

$$\text{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = 0 .$$

Deuxième cas : $0 \in V$ (cependant $0 \notin S$) ; $r^{-3} \vec{r}$ n'est pas de classe $C^1(V)$ à cause de la singularité à l'origine ; soit $\rho > 0$ tel que la sphère de centre O et de rayon ρ soit entièrement dans V et $V' = \{P \in V : |\vec{OP}| \geq \rho\}$. La frontière de V' est formée de S et de la surface $S' = \{P : |\vec{OP}| = \rho\}$ (figure 14) ;

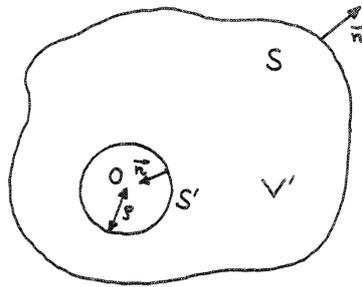


figure 14

La restriction \vec{v} de $r^{-3} \vec{r}$ à V' est de classe $C^1(V')$ et l'on peut appliquer le théorème de la divergence généralisé aux volumes à frontière multiple ; puisque $\text{div} \vec{v} = 0$, on obtient

$$I = \iint_S r^{-3} \vec{r} \cdot d\vec{\sigma} = - \iint_{S'} r^{-3} \vec{r} \cdot d\vec{\sigma} ;$$

on est donc ramené au calcul de l'intégrale sur S' ; sur S' on a : $\vec{n} = -\vec{r}/r$; $r = \rho = \text{constante}$;

$$\iint_{S'} r^{-3} \vec{r} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_{S'} r^{-3} \vec{r} \cdot \vec{n} \, d\sigma = - \iint_{S'} r^{-2} \, d\sigma = -4\pi ;$$

ainsi $I = 4\pi$, résultat qui confirme celui obtenu au paragraphe II.4 .

II.11. Définition intrinsèque des opérateurs $\overrightarrow{\text{grad}}$, $\overrightarrow{\text{div}}$, $\overrightarrow{\text{rot}}$.

Lors de la définition du gradient nous avons mentionné le problème de la dépendance de ces opérateurs du triplet fondamental choisi. Soit $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ un second triple de vecteurs orthogonaux de longueur 1 et d'orientation directe ; posons

$$\vec{r} = \vec{i}_x + \vec{j}_y + \vec{k}_z = \vec{p}_\xi + \vec{q}_\eta + \vec{r}_\zeta ;$$

soit \vec{v} un champ vectoriel de classe $C^1(D)$ où D est l'ouvert de définition de \vec{v} ;

$$\begin{aligned} \vec{v}(\vec{r}) &= \vec{i}v_x(x,y,z) + \vec{j}v_y(x,y,z) + \vec{k}v_z(x,y,z) \\ &= \vec{p}v_\xi(\xi,\eta,\zeta) + \vec{q}v_\eta(\xi,\eta,\zeta) + \vec{r}v_\zeta(\xi,\eta,\zeta) ; \end{aligned}$$

considérons l'opération divergence ; il s'agit de savoir si en un même point on a

$$\begin{aligned} &\partial_x v_x(x,y,z) + \partial_y v_y(x,y,z) + \partial_z v_z(x,y,z) \\ &= \partial_\xi v_\xi(\xi,\eta,\zeta) + \partial_\eta v_\eta(\xi,\eta,\zeta) + \partial_\zeta v_\zeta(\xi,\eta,\zeta). \end{aligned}$$

Nous allons démontrer, à l'aide des théorèmes du gradient, de la divergence et du rotationnel que ces opérations sont effectivement intrinsèques, c'est-à-dire indépendantes du repère orthonormal direct de base.

Définition. Soit $F(V)$ une fonction à valeurs réelles définie sur l'ensemble des volumes V contenus dans un ouvert D ; par exemple pour des champs fixes f et $\vec{v} \in C^0(D)$, $F(V) = \iiint_V f d\tau$, $F(V) = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{\sigma}$ où S est la frontière de V . Soit $Q \in D$; on écrit

$$\lim_{V \rightarrow Q} \frac{1}{\tau} F(V) = a$$

si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $V \subset \{P : |\vec{QP}| < \delta\} \cap D$ entraîne

$$\left| \frac{1}{\tau} F(V) - a \right| < \epsilon$$

où τ désigne la mesure de V .

Si $\vec{F}(V)$ est un vecteur fonction du volume V variable, on définit $\lim_{V \rightarrow Q} \tau^{-1} \vec{F}(V)$ composante par composante.

Lemme. Soit f et \vec{v} des champs définis sur l'ouvert D et continus au point $Q \in D$; alors

$$\lim_{V \rightarrow Q} \frac{1}{\tau} \iiint_V f d\tau = f(Q) ;$$

$$\lim_{V \rightarrow Q} \frac{1}{\tau} \iiint_V \vec{v} d\tau = \vec{v}(Q) .$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ donné ; puisque f est continu en Q , il existe $\delta > 0$ tel que $f(Q) - \epsilon < f(P) < f(Q) + \epsilon$ pour $|\overrightarrow{QP}| < \delta$; soit $V \subset \{P : |\overrightarrow{QP}| < \delta\} \cap D$; on a

$$(f(Q) - \epsilon) \iiint_V d\tau < \iiint_V f d\tau < (f(Q) + \epsilon) \iiint_V d\tau ;$$

en divisant par τ , mesure de V , on obtient :

$$\left| \frac{1}{\tau} \iiint_V f d\tau - f(Q) \right| < \epsilon ;$$

le cas vectoriel se ramène au cas scalaire en procédant par composantes.

Théorème II.11.1. Soit D un ouvert, f et $\vec{v} \in C^1(D)$, $Q \in D$; alors

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(Q) = \lim_{V \rightarrow Q} \frac{1}{\tau} \iint_S f d\vec{\sigma} \quad (1)$$

$$\text{div } \vec{v}(Q) = \lim_{V \rightarrow Q} \frac{1}{\tau} \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} \quad (2)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}(Q) = \lim_{V \rightarrow Q} \frac{1}{\tau} \iint_S d\vec{\sigma} \wedge \vec{v} \quad (3)$$

où S représente la frontière de V .

Remarque. Il est facile de vérifier que les membres de droite des relations (1), (2), (3) sont indépendants du triplet fondamental ; il en va par conséquent de même des membres de gauche ; (1), (2) et (3) peuvent être adoptées comme des définitions de $\overrightarrow{\text{grad}}$, div , $\overrightarrow{\text{rot}}$; ce seront des définitions intrinsèques.

Démonstration du théorème II.11.1.

Nous nous contenterons de démontrer (1) puisque (2) et (3) s'établissent de façon similaire à l'aide du lemme et des théorèmes de la divergence et du rotationnel (théorèmes II.10.2 et II.10.3). On utilise successivement le lemme et le théorème II.10.1 du gradient :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(Q) = \lim_{V \rightarrow Q} \frac{1}{\tau} \iiint_V \overrightarrow{\text{grad}} f \, d\tau = \lim_{V \rightarrow Q} \frac{1}{\tau} \iint_S f d\vec{\sigma} \quad .$$

Remarque. Le caractère intrinsèque du gradient et de la divergence implique celui de l'opérateur laplacien.

II.12. Formules de Green. Fonctions harmoniques.

Soit V un volume de frontière S , f et $g \in C^2(V)$; en utilisant les formules du paragraphe II.8., on a

$$\operatorname{div}(f \overrightarrow{\operatorname{grad}} g) = f\Delta g + \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} g ;$$

en appliquant le théorème de la divergence on a

$$\iint_S f \overrightarrow{\operatorname{grad}} g \cdot d\vec{\sigma} = \iiint_V f\Delta g \, d\tau + \iiint_V \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} g \, d\tau ; \quad (1)$$

si \vec{n} est la normale extérieure à V , $\overrightarrow{\operatorname{grad}} g \cdot \vec{n}$ est la dérivée $\frac{dg}{dn}$ de g dans la direction \vec{n} (paragraphe II.6) et l'on peut écrire

$$\iint_S f \overrightarrow{\operatorname{grad}} g \cdot d\vec{\sigma} = \iint_S f \overrightarrow{\operatorname{grad}} g \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_S f \frac{dg}{dn} \, d\sigma ;$$

finalement (1) devient

$$\iiint_V f\Delta g \, d\tau = \iint_S f \frac{dg}{dn} \, d\sigma - \iiint_V \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} g \, d\tau ; \quad (2)$$

c'est la première formule de Green. En permutant les rôles de f et g dans (2), on obtient

$$\iiint_V g\Delta f \, d\tau = \iint_S g \frac{df}{dn} \, d\sigma - \iiint_V \overrightarrow{\operatorname{grad}} g \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \, d\tau ;$$

en soustrayant de (2) on obtient la seconde formule de Green :

$$\iiint_V (f\Delta g - g\Delta f) \, d\tau = \iint_S (f \frac{dg}{dn} - g \frac{df}{dn}) \, d\sigma . \quad (3)$$

Remarque. Les relations (2) et (3) sont encore valables pour des volumes à frontière multiple pour autant que l'on prenne en considération toutes les parties de la frontière avec la normale extérieure au volume.

Définition. Un champ $f \in C^2(V)$ est dit harmonique si en tout point P de V

$$\Delta f(P) = 0$$

Exemple. Le champ

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{r}$$

est harmonique dans tout volume qui ne contient pas l'origine. En effet, on a

$$\begin{aligned} \partial_x \frac{1}{r} &= -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cdot 2x, \\ \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r} &= -\frac{\vec{r}}{r^3}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\Delta \frac{1}{r} = \text{div} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r} = 0;$$

nous avons utilisé un résultat obtenu dans l'exemple de la fin du paragraphe II.10.

Théorème II.12.1. Soit f harmonique dans la sphère de centre P et de rayon R , de frontière S ; on a

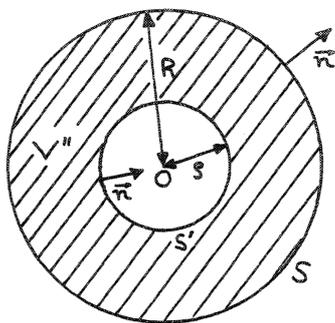
$$f(P) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_S f d\sigma.$$

Remarque. Le théorème exprime que la valeur au centre est la "moyenne" des valeurs sur la frontière de la sphère.

Démonstration. Sans restriction de généralité on peut supposer que P coïncide avec l'origine (en effet, une fonction harmonique sur laquelle on effectue une translation des coordonnées reste harmonique). Soit V la sphère de centre O , de rayon R ; on ne peut appliquer la seconde formule de Green (3) à cette sphère si $g = \frac{1}{r}$; en effet, g possède une singularité à l'origine et n'est, par conséquent, pas de classe C^2 dans V . "Isolons" cette singularité en retranchant de V la sphère V' de centre O , de rayon $\rho < R$, de frontière S' . La frontière du volume résultant V'' comporte les deux parties S et S' ; \vec{n} , la normale orientée sera extérieure à V'' (figure 15). Appliquons (3) à V'' , f harmonique, $g = \frac{1}{r}$;

puisque $\Delta f = \Delta g = 0$ dans V'' , il reste

$$\iint_S \left(f \frac{dg}{dn} - g \frac{df}{dn} \right) d\sigma + \iint_{S'} \left(f \frac{dg}{dn} - g \frac{df}{dn} \right) d\sigma = 0 ; \quad (5)$$



on a :

$$\begin{aligned} \iint_S g \frac{df}{dn} d\sigma &= \frac{1}{R} \iint_S \frac{df}{dn} d\sigma = \frac{1}{R} \iint_S \overrightarrow{g \text{ grad } f} \cdot \vec{d\sigma} \\ &= \frac{1}{R} \iiint_V \text{div } \overrightarrow{g \text{ grad } f} d\tau = 0 ; \end{aligned}$$

figure 15

là, on a utilisé le fait que g est constant sur S , que l'on peut appliquer le théorème de la divergence pour V et $\overrightarrow{g \text{ grad } f}$ et que $\Delta f = 0$; de même on obtient

$$\iint_{S'} g \frac{df}{dn} d\sigma = \frac{1}{\rho} \iint_{S'} \frac{df}{dn} d\sigma = \frac{1}{\rho} \iint_{S'} \overrightarrow{g \text{ grad } f} \cdot \vec{d\sigma} = -\frac{1}{\rho} \iiint_{V'} \text{div } \overrightarrow{g \text{ grad } f} d\tau = 0 ;$$

le signe du dernier terme provient du fait que \vec{n} est dirigé vers l'intérieur de V' . Selon (4), on a

$$\iint_S f \frac{dg}{dn} d\sigma = \iint_S f \left(-\frac{\vec{r}}{r^3} \right) \cdot \vec{n} d\sigma = - \iint_S f \frac{1}{r^2} d\sigma = \frac{-1}{R^2} \iint_S f d\sigma ;$$

en tenant compte de l'orientation de la normale, on aura de même

$$\iint_{S'} f \frac{dg}{dn} d\sigma = \frac{1}{\rho^2} \iint_{S'} f d\sigma ;$$

en remplaçant ces relations dans (5) on obtient

$$\frac{1}{R^2} \iint_S f d\sigma = \frac{1}{\rho^2} \iint_{S'} f d\sigma ;$$

soit $\epsilon > 0$ donné; à cause de la continuité de f en O , il existe $\rho > 0$ tel que $|f(P) - f(O)| < \epsilon$ pour $P \in S'$; on a successivement

$$\frac{1}{4\pi R^2} \iint_S f d\sigma - f(O) = \frac{1}{4\pi \rho^2} \iint_{S'} f d\sigma - f(O) ;$$

puisque $\iint_{S'} d\sigma = 4\pi\rho^2$, on a :

$$\left| \frac{1}{4\pi R^2} \iint_S f d\sigma - f(O) \right| = \frac{1}{4\pi\rho^2} \left| \iint_{S'} (f-f(O)) d\sigma \right| < \frac{\varepsilon}{4\pi\rho^2} \iint_{S'} d\sigma = \varepsilon ;$$

ce résultat étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en conclut

$$f(O) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_S f d\sigma \quad . \quad \text{Q.E.D.}$$

Lemme. Soit f harmonique dans la sphère de centre P , de rayon R , de frontière S . Si $f(P) \geq f(Q)$ pour tout $Q \in S$, alors $f(P) = f(Q)$ pour tout Q de S .

Démonstration. Soit $f(P) = a$; d'après le dernier théorème, on a alors

$$f(P) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_S f d\sigma \leq \frac{1}{4\pi R^2} \iint_S a d\sigma = \frac{a}{4\pi R^2} \iint_S d\sigma = a = f(P) ;$$

si en un point Q de S , $f(Q)$ est strictement inférieur à a , alors l'inégalité devient une inégalité stricte et l'on a une contradiction; donc f est égal à a sur S .

A l'aide du lemme nous pouvons aisément démontrer le fameux "principe du maximum et du minimum des fonctions harmoniques".

Théorème II.12.2. (Principe du maximum et du minimum des fonctions harmoniques).

Une fonction harmonique f dans un volume V de frontière S prend son maximum et son minimum sur S ; c'est-à-dire, il existe $\bar{Q} \in S$, $\underline{Q} \in S$ tels que pour tout $P \in V$ on ait

$$f(\underline{Q}) \leq f(P) \leq f(\bar{Q}) .$$

Démonstration. Démontrons le théorème pour le maximum. Soit \bar{P} un point de V où f prend son maximum. Si $\bar{P} \in S$, il n'y a rien à démontrer; supposons donc que \bar{P} n'appartienne pas à S . Soit W la plus grande sphère de

centre P contenue dans V ; sa frontière Σ a au moins un point en commun T avec S (figure 16) ; d'après le lemme précédent $f(T) = f(\bar{P})$ et par conséquent f prend aussi son maximum en T qui appartient à S . Q.E.D.

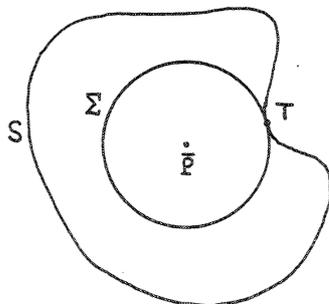


figure 16

Corollaire. Soit V un volume de frontière S et g une fonction donnée définie sur S . Il existe alors, au plus, une fonction f harmonique dans V égale à g sur S .

Démonstration. Soient f_1 et f_2 deux fonctions harmoniques dans V , égales à g sur S . La fonction $h = f_1 - f_2$ est harmonique dans V , nulle sur S . D'après le principe du maximum et du minimum, le maximum et le minimum de h dans V sont tous deux égaux à 0 ; donc h est identiquement nulle. Q.E.D.

II.13. Coordonnées curvilignes orthogonales.

Pour des raisons de commodité, dans ce paragraphe, le triplet fondamental $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sera noté $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$; de même les coordonnées x, y, z seront notées x_1, x_2, x_3 ; ainsi le rayon vecteur s'exprime désormais de la façon suivante

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^3 \vec{p}_i x_i$$

Soit Y un autre espace tridimensionnel rapporté aux coordonnées cartésiennes y_1, y_2, y_3 ; pour distinguer Y de l'espace euclidien E considéré jusqu'à maintenant, on peut appeler Y l'"espace de paramètres" et E l'"espace géométrique". (figure 17). Soient $A \subset Y$ et $B \subset E$ des ouverts, $f : A \rightarrow B$ une application bijective et $g : B \rightarrow A$ l'application inverse de f ; en notations de composantes, f est définie par les trois relations

$$x_1 = f_1(y_1, y_2, y_3) , x_2 = f_2(y_1, y_2, y_3) , x_3 = f_3(y_1, y_2, y_3) ,$$

tandis que g est définie par

$$y_1 = g_1(x_1, x_2, x_3) , y_2 = g_2(x_1, x_2, x_3) , y_3 = g_3(x_1, x_2, x_3) ;$$

nous faisons, une fois pour toutes, l'hypothèse que les fonctions f_1, f_2, f_3 ainsi que les fonctions g_1, g_2, g_3 sont respectivement de classe $C^1(A)$ et $C^1(B)$.

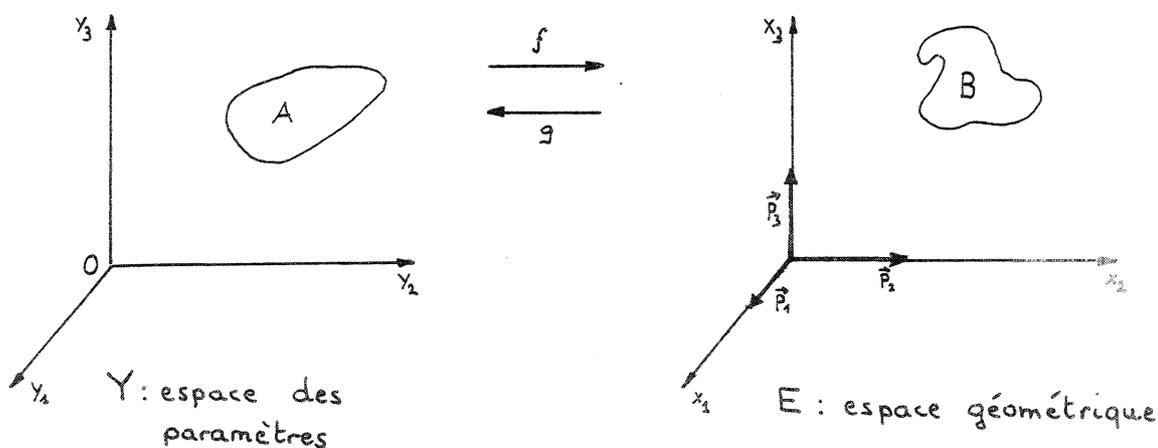


figure 17

Considérons $Q \in A$ de coordonnées (C_1, C_2, C_3) ; soit, pour $i = 1, 2, 3$, Π_i le plan d'équation $y_i = C_i$; soient d_1 la droite d'équations $y_2 = C_2, y_3 = C_3$, d_2 la droite d'équations $y_1 = C_1, y_3 = C_3$ et d_3 la droite d'équations $y_1 = C_1, y_2 = C_2$ (figure 18) ; soient $P = f(Q)$, Σ_i l'image par f de $\Pi_i \cap A$, Γ_i l'image par f de $d_i \cap A$; Σ_i est appelé "surface de coordonnée i " ; Γ_i est appelé "ligne de coordonnée i ".

Σ_1 admet par conséquent la représentation paramétrique

$$x_1 = f_1(C_1, y_2, y_3) ; x_2 = f_2(C_1, y_2, y_3) ; x_3 = f_3(C_1, y_2, y_3)$$

avec $(y_2, y_3) \in D = \{(y, z) : (C_1, y, z) \in A\}$;

Σ_1 est également l'ensemble des points satisfaisant à la relation :

$$g_1(x_1, x_2, x_3) = C_1 \quad (x_1, x_2, x_3) \in B .$$

Γ_1 admet la représentation paramétrique

$$x_1 = f_1(y_1, C_2, C_3) ; x_2 = f_2(y_1, C_2, C_3) ; x_3 = f_3(y_1, C_2, C_3)$$

avec $y_1 \in I = \{y \in \mathbb{R} : (y, C_2, C_3) \in A\}$;

Γ est également l'ensemble des points satisfaisant aux relations :

$$g_2(x_1, x_2, x_3) = C_2 ; g_3(x_1, x_2, x_3) = C_3$$

avec $(x_1, x_2, x_3) \in B$.

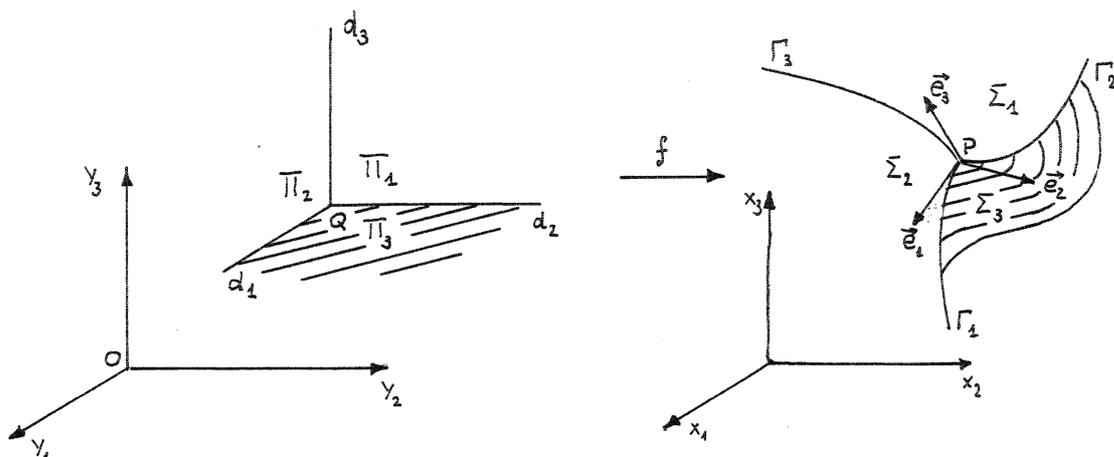


figure 18

Chaque point P de B peut être caractérisé soit par ses coordonnées x_1, x_2, x_3 soit par les coordonnées y_1, y_2, y_3 du point correspondant $Q \in A$; y_1, y_2, y_3 sont les "coordonnées curvilignes" de P ; le rayon vecteur peut alors s'écrire

$$\vec{r}(y_1, y_2, y_3) = \sum_{i=1}^3 \vec{p}_i f_i(y_1, y_2, y_3) ;$$

posons $\vec{e}_k = \partial_{y_k} \vec{r}$; on aura

$$\vec{e}_k(y_1, y_2, y_3) = \sum_{i=1}^3 \vec{p}_i \partial_{y_k} f_i(y_1, y_2, y_3) , k = 1, 2, 3 ;$$

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est le repère naturel au point $P \in E$ de coordonnées curvilignes (y_1, y_2, y_3) ; \vec{e}_i est tangent à Γ_i (figure 18).

Définition. Un système de coordonnées curvilignes (c'est-à-dire la donnée de $f : A \rightarrow B$) est orthogonal si en chaque point P le repère naturel est formé de vecteurs orthogonaux d'orientation directe.

Par la suite, nous nous bornerons à considérer uniquement des systèmes de coordonnées curvilignes orthogonaux. Soit donc un système de coordonnées orthogonal et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ le repère naturel ; posons

$$h_i = |\vec{e}_i|, \quad \vec{\epsilon}_i = h_i^{-1} \vec{e}_i, \quad i = 1, 2, 3 ;$$

$(\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3)$ est alors (pour chaque point de B) un triplet de vecteurs orthogonaux de longueur 1 ; on appelle ce triplet "repère naturel normé" ; il est essentiel de noter que $h_1, h_2, h_3, \vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3$ sont des fonctions du point $P \in B$.

Remarque. Considérons la surface de coordonnée Σ_1 définie plus haut et paramétrée par y_2 et y_3 ; on a alors (voir la "règle" de calcul des intégrales de surface, paragraphe II.4) :

$$d\vec{\sigma} = \partial y_2 \vec{r} \wedge \partial y_3 \vec{r} dy_2 dy_3 = \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 dy_2 dy_3 = h_2 h_3 \vec{\epsilon}_2 \wedge \vec{\epsilon}_3 dy_2 dy_3 ,$$

$$d\vec{\sigma} = h_2 h_3 \vec{\epsilon}_1 dy_2 dy_3 ,$$

$$d\sigma = h_2 h_3 dy_2 dy_3 ;$$

de même, considérons l'arc Γ_1 défini plus haut et paramétré par y_1 ; on a alors (voir la "règle" de calcul des intégrales curvilignes, paragraphe II.3) :

$$d\vec{r} = \partial_{y_1} \vec{r} dy_1 = \vec{e}_1 dy_1 = h_1 \vec{\epsilon}_1 dy_1 ,$$

$$ds = h_1 dy_1 ;$$

enfin considérons un volume $V \subset E$ paramétré par y_1, y_2, y_3 ; d'après la règle des intégrales triples on a pour l'élément de volume dt :

$$\begin{aligned}
 d\tau &= \left| J \begin{pmatrix} x_1, x_2, x_3 \\ y_1, y_2, y_3 \end{pmatrix} \right| dy_1 dy_2 dy_3 = \left| \text{Det} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{pmatrix} \right| dy_1 dy_2 dy_3 \\
 &= |[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]| dy_1 dy_2 dy_3 = h_1 h_2 h_3 [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] dy_1 dy_2 dy_3 \\
 &= h_1 h_2 h_3 dy_1 dy_2 dy_3
 \end{aligned}$$

où $[\ , \ ,]$ désigne le produit mixte.

II.14. Opérateurs $\overrightarrow{\text{grad}}$, div , $\overrightarrow{\text{rot}}$, Δ en coordonnées curvilignes orthogonales.

Considérons un système de coordonnées curvilignes orthogonal défini par l'application $f : A \subset Y \longrightarrow B \subset E$ et son inverse g ; on utilise les mêmes notations qu'au paragraphe précédent en admettant les mêmes hypothèses ; en particulier $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est le repère naturel, $h_i = |\vec{e}_i|$, $\vec{e}_i = h_i^{-1} \vec{e}_i$; un point $P \in B$ a les coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) et les coordonnées curvilignes (y_1, y_2, y_3) ; on considérera que h_i est une application de A dans \mathbb{R} , donc une fonction de (y_1, y_2, y_3) .

Soit φ et $\vec{\omega}$ un champ scalaire et un champ vectoriel de classe $C^1(B)$. Soit $u : A \rightarrow \mathbb{R}$, $u^* : B \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{v} : A \rightarrow V$, $\vec{v}^* : B \rightarrow V$ (où V désigne l'ensemble des vecteurs) définis par :

$$\begin{aligned} \varphi(P) &= u(y_1, y_2, y_3) = u^*(x_1, x_2, x_3) \\ \vec{\omega}(P) &= \vec{v}(y_1, y_2, y_3) = \vec{v}^*(x_1, x_2, x_3) ; \end{aligned}$$

u et u^* sont les fonctions représentatives du champ φ en coordonnées curvilignes et cartésiennes respectivement ; \vec{v} et \vec{v}^* sont les fonctions à valeurs vectorielles représentatives du champ $\vec{\omega}$ en coordonnées curvilignes et cartésiennes respectivement ; posons

$$\vec{v}(y_1, y_2, y_3) = \sum_{k=1}^3 v_k(y_1, y_2, y_3) \vec{e}_k(y_1, y_2, y_3) .$$

Théorème II.14.1. $\overrightarrow{\text{grad}}\varphi = \sum_{k=1}^3 \vec{e}_k \frac{1}{h_k} \partial_{y_k} u .$

Théorème II.14.2. $\text{div}\vec{\omega} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{k=1}^3 \partial_{y_k} (h_1 h_2 h_3 \frac{v_k}{h_k}) .$

Théorème II.14.3.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{\omega} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \text{Det} \begin{pmatrix} h_1 \vec{\epsilon}_1 & h_2 \vec{\epsilon}_2 & h_3 \vec{\epsilon}_3 \\ \partial_{y_1} & \partial_{y_2} & \partial_{y_3} \\ h_1 v_1 & h_2 v_2 & h_3 v_3 \end{pmatrix} \\ &= \vec{\epsilon}_1 \frac{1}{h_2 h_3} (\partial_{y_2} (h_3 v_3) - \partial_{y_3} (h_2 v_2)) + \vec{\epsilon}_2 \dots \end{aligned}$$

Théorème II.14.4. En supposant de plus $\varphi \in C^2(B)$, on a :

$$\Delta \varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \partial_{y_i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2} \partial_{y_i} u \right)$$

Démonstration du théorème II.14.1. Puisque

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} \varphi(P) &= \sum_{k=1}^3 \vec{p}_k \partial_{x_k} u^*(x_1, x_2, x_3), \\ \vec{\epsilon}_i(y_1, y_2, y_3) &= \sum_{k=1}^3 \vec{p}_k \partial_{y_i} f_k(y_1, y_2, y_3), \end{aligned}$$

on a, par le théorème de dérivation des fonctions composées :

$$\begin{aligned} \partial_{y_i} u(y_1, y_2, y_3) &= \partial_{y_i} u^*(f_1(y_1, y_2, y_3), f_2(y_1, y_2, y_3), f_3(y_1, y_2, y_3)) \\ &= \sum_{k=1}^3 \partial_{x_k} u^*(x_1, x_2, x_3) \partial_{y_i} f_k(y_1, y_2, y_3) \\ &= \overrightarrow{\text{grad}} \varphi(P) \cdot \vec{\epsilon}_i(y_1, y_2, y_3) = h_i(y_1, y_2, y_3) \overrightarrow{\text{grad}} \varphi(P) \cdot \vec{\epsilon}_i(y_1, y_2, y_3); \end{aligned}$$

on a alors

$$\overrightarrow{\text{grad}} \varphi = \sum_{i=1}^3 \vec{\epsilon}_i (\overrightarrow{\text{grad}} \varphi \cdot \vec{\epsilon}_i) = \sum_{i=1}^3 \vec{\epsilon}_i h_i^{-1} \partial_{y_i} u. \quad \text{Q.E.D.}$$

Démonstration du théorème II.14.2. Par linéarité il suffit d'établir séparément le théorème pour les trois champs $\vec{\omega}_i(P) = v_i(y_1, y_2, y_3) \vec{e}_i(y_1, y_2, y_3)$, $i = 1, 2, 3$. Nous faisons le calcul pour $\vec{\omega}_3$, c'est-à-dire que nous établissons la relation

$$\operatorname{div} \vec{\omega}_3 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \partial_{y_3} (h_1 h_2 v_3) ;$$

considérons à cet effet $Q \in A$, $P = f(Q) \in B$; soient (a_1, a_2, a_3) les coordonnées cartésiennes de Q dans Y c'est-à-dire les coordonnées curvilignes de P ,

$C = \{(y_1, y_2, y_3) \in Y : a_i \leq y_i \leq a_i + z, i = 1, 2, 3\} \subset A$,
 Π et Π' les faces inférieures et supérieures respectivement de C (figure 19);

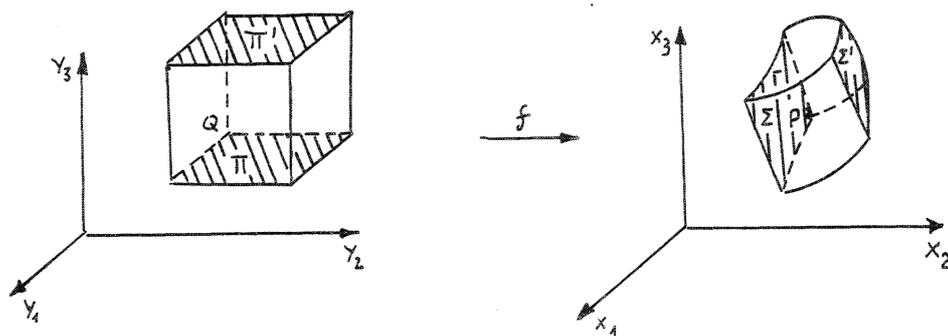


figure 19

soient V , Σ et Σ' les images par f de C , Π et Π' respectivement; soit S la frontière de V . Appliquons à V et $\vec{\omega}_3$ le théorème de la divergence (théorème II.10.2) en tenant compte de la remarque établie à la fin du paragraphe précédent; on constate que seules les "faces" Σ et Σ' apportent une contribution à l'intégrale de surface :

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{\omega}_3 d\tau = \iint_S \vec{\omega}_3 \cdot d\vec{\sigma} = \iint_{\Sigma} \vec{\omega}_3 \cdot d\vec{\sigma} + \iint_{\Sigma'} \vec{\omega}_3 \cdot d\vec{\sigma} ; \quad (1)$$

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{\omega}_3 d\tau = \int_{a_1}^{a_1+z} dy_1 \int_{a_2}^{a_2+z} dy_2 \int_{a_3}^{a_3+z} dy_3 (h_1 h_2 h_3 \operatorname{div} \vec{\omega}_3)(y_1, y_2, y_3) ; \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Sigma} \vec{\omega}_3 \cdot d\vec{\sigma} + \iint_{\Sigma'} \vec{\omega}_3 \cdot d\vec{\sigma} = \\
& = \int_{a_1}^{a_1+z} dy_1 \int_{a_2}^{a_2+z} dy_2 \left\{ (h_1 h_2 v_3)(y_1, y_2, a_3+z) - (h_1 h_2 v_3)(y_1, y_2, a_3) \right\} \\
& = \int_{a_1}^{a_1+z} dy_1 \int_{a_2}^{a_2+z} dy_2 \int_{a_3}^{a_3+z} \partial_{y_3} (h_1 h_2 v_3)(y_1, y_2, y_3) dy_3 \quad (3)
\end{aligned}$$

en remplaçant (2) et (3) dans (1) on obtient

$$\int_{a_1}^{a_1+z} dy_1 \int_{a_2}^{a_2+z} dy_2 \int_{a_3}^{a_3+z} dy_3 R(y_1, y_2, y_3) = 0 \quad (4)$$

$$R(y_1, y_2, y_3) = h_1 h_2 h_3 \operatorname{div} \vec{\omega}_3 - \partial_{y_3} (h_1 h_2 v_3) ;$$

le membre de gauche de (4) peut être considéré comme une fonction $P(z)$ définie pour les $z > 0$ tels que le cube $C \subset A$; puisque A est ouvert, il existe $z_0 > 0$ tel que $C \subset A$ pour tout $0 < z < z_0$. Il faut montrer que $R(a_1, a_2, a_3) = 0$; supposons que ce ne soit pas le cas ; puisque R est continu, il existe alors $\bar{z} < z_0$ tel que R soit différent de zéro et de signe constant dans le cube C de côté \bar{z} ; on aurait alors $P(\bar{z}) \neq 0$ ce qui est une contradiction.

Démonstration du théorème II.14.3. Calculons la 3ième composante de $\operatorname{rot} \vec{\omega}$ dans le repère naturel normé, les deux autres composantes pouvant être obtenues de façon analogue ; nous avons à établir la relation :

$$\operatorname{rot} \vec{\omega} \cdot \vec{\epsilon}_3 = \frac{1}{h_1 h_2} (\partial_{y_1} (h_2 v_2) - \partial_{y_2} (h_1 v_1)) ;$$

Considérons à cet effet $Q \in A$, $P = f(Q) \in B$; soient (a_1, a_2, a_3) les coordonnées cartésiennes de Q dans Y , c'est-à-dire les coordonnées curvilignes de P , $\Pi = \{(y_1, y_2, y_3) \in Y : a_1 \leq y_1 \leq a_1 + z, a_2 \leq y_2 \leq a_2 + z, y_3 = a_3\} \subset A$, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ les côtés de Π (figure 20); soient $\Sigma, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ les images de $\Pi, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ par f ; l'orientation de Σ est fixée en choisissant $\vec{\epsilon}_3$ comme normale orientée; l'orientation de Γ , frontière de Σ , est choisie de manière à satisfaire la règle d'Ampère (ne pas oublier que $(\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3)$ est un triplet direct).

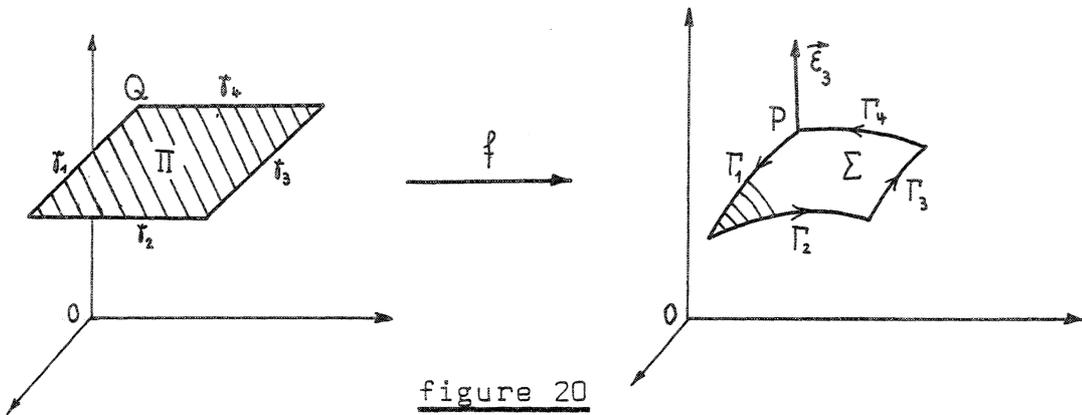


figure 20

Appliquons à Σ et à $\vec{\omega}$ le théorème de Stokes (théorème II.9.1) en tenant compte du fait que le long de $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ la tangente est respectivement $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, -\vec{\epsilon}_1, -\vec{\epsilon}_2$; par ailleurs on utilise la remarque de la fin du paragraphe précédent :

$$\iint_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{\omega} \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\Gamma} \vec{\omega} \cdot d\vec{r} ; \tag{5}$$

$$\iint_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{\omega} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{\omega} \cdot \vec{\epsilon}_3 d\sigma = \int_{a_1}^{a_1+z} dy_1 \int_{a_2}^{a_2+z} dy_2 (h_1 h_2 \overrightarrow{\text{rot}} \vec{\omega} \cdot \vec{\epsilon}_3)(y_1, y_2, a_3); \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \vec{\omega} \cdot d\vec{r} &= \int_{a_1}^{a_1+z} \{ (h_1 v_1)(y_1, a_2, a_3) - (h_1 v_1)(y_1, a_2+z, a_3) \} dy_1 \\ &+ \int_{a_2}^{a_2+z} \{ (h_2 v_2)(a_1+z, y_2, a_3) - (h_2 v_2)(a_1, y_2, a_3) \} dy_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{a_1}^{a_1+z} dy_1 \int_{a_2}^{a_2+z} \partial_{y_2} (h_1 v_1)(y_1, y_2, a_3) dy_2 \\
&+ \int_{a_2}^{a_2+z} dy_2 \int_{a_1}^{a_1+z} \partial_{y_1} (h_2 v_2)(y_1, y_2, a_3) dy_1 ; \quad (7)
\end{aligned}$$

en remplaçant (6) et (7) dans (5) on obtient :

$$\int_{a_1}^{a_1+z} dy_1 \int_{a_2}^{a_2+z} dy_2 S(y_1, y_2) = 0 , \quad (8)$$

$$S(y_1, y_2) = h_1 h_2 \overrightarrow{\text{rot}} \vec{\omega} \cdot \vec{\epsilon}_3 - (\partial_{y_1} (h_2 v_2) - \partial_{y_2} (h_1 v_1)) ;$$

le membre de gauche de (8) peut être considéré comme une fonction de $Q(z)$ définie pour les $z > 0$ tels que le carré $\Pi \subset A$; puisque A est ouvert, il existe $z_0 > 0$ tel que $\Pi \subset A$ pour tout $0 < z < z_0$. Il faut montrer que $S(a_1, a_2) = 0$; supposons que ce ne soit pas le cas ; puisque S est continue, il existe alors $\bar{z} < z_0$ tel que S soit différent de zéro et de signe constant dans le carré Π de côté \bar{z} ; on aurait alors $Q(\bar{z}) \neq 0$ ce qui est une contradiction.

Démonstration du théorème II.14.4. Le théorème est une conséquence immédiate des théorèmes II.14.1 et II.14.2 ainsi que de la définition du Laplacien : $\Delta \phi = \text{div } \overrightarrow{\text{grad}} \phi$.

Coordonnées cylindriques. Le système des coordonnées cylindriques est défini par la relation

$$\vec{r} = \vec{p}_1 y_1 \cos y_2 + \vec{p}_2 y_1 \sin y_2 + \vec{p}_3 y_3 ;$$

suivant l'usage habituel on utilisera les notations $y_1 = r$, $y_2 = \theta$, $y_3 = z$; (figure 21) ;

de même les indices 1, 2 ou 3 seront systématiquement remplacés par r , θ ou z . On obtient alors immédiatement les relations :

$$\vec{r} = \vec{p}_1 r \cos \theta + \vec{p}_2 r \sin \theta + \vec{p}_3 z$$

$$\vec{e}_r = \vec{p}_1 \cos \theta + \vec{p}_2 \sin \theta ; h_r = 1 ; \vec{e}_\theta = -\vec{p}_1 \sin \theta + \vec{p}_2 \cos \theta ;$$

$$\vec{e}_\theta = -\vec{p}_1 r \sin \theta + \vec{p}_2 r \cos \theta ; h_\theta = r ; \vec{e}_z = \vec{p}_3 ;$$

$$\vec{e}_z = \vec{p}_3 ; h_z = 1 ; \vec{e}_z = \vec{p}_3 ;$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} \varphi = \vec{e}_r \partial_r u + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta u + \vec{e}_z \partial_z u$$

$$\text{div } \vec{\omega} = \frac{1}{r} [\partial_r (r v_r) + \partial_\theta v_\theta + \partial_z (r v_z)]$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{\omega} = \frac{1}{r} \text{Det.} \begin{pmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_z \\ v_r & r v_\theta & v_z \end{pmatrix}$$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r u) + \frac{1}{r^2} \partial_\theta \partial_\theta u + \partial_z \partial_z u .$$

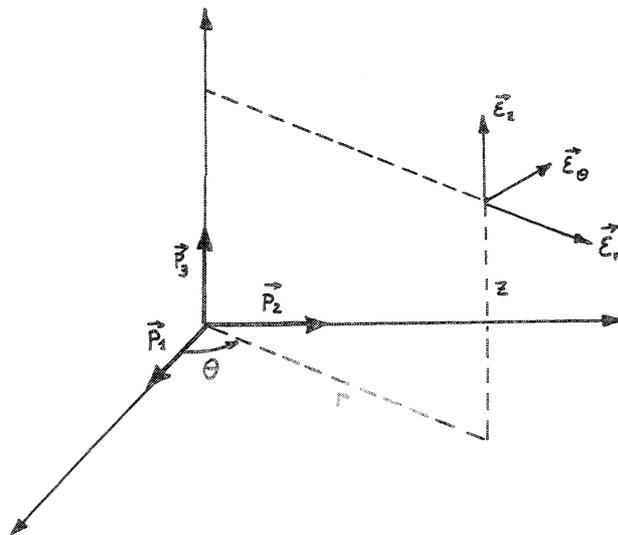


figure 21

Coordonnées sphériques. Le système des coordonnées sphériques est défini par la relation

$$\vec{r} = \vec{p}_1 y_1 \sin y_2 \cos y_3 + \vec{p}_2 y_1 \sin y_2 \sin y_3 + \vec{p}_3 y_1 \cos y_2 ;$$

suivant l'usage habituel on utilisera les notations

$y_1 = r$, $y_2 = \theta$ (colatitude), $y_3 = \phi$ (longitude) (figure 22) ; de même les indices 1, 2 et 3 seront systématiquement remplacés par r , θ et ϕ . On obtient immédiatement les relations :

$$\vec{r} = \vec{p}_1 r \sin \theta \cos \phi + \vec{p}_2 r \sin \theta \sin \phi + \vec{p}_3 r \cos \theta ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_r = \vec{p}_1 \sin \theta \cos \phi + \vec{p}_2 \sin \theta \sin \phi + \vec{p}_3 \cos \theta ; h_r = 1 ; \\ \vec{e}_\theta = \vec{p}_1 r \cos \theta \cos \phi + \vec{p}_2 r \cos \theta \sin \phi - \vec{p}_3 r \sin \theta ; h_\theta = r ; \\ \vec{e}_\phi = -\vec{p}_1 r \sin \theta \sin \phi + \vec{p}_2 r \sin \theta \cos \phi ; h_\phi = r \sin \theta ; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\varepsilon}_r = \vec{p}_1 \sin \theta \cos \phi + \vec{p}_2 \sin \theta \sin \phi + \vec{p}_3 \cos \theta ; \\ \vec{\varepsilon}_\theta = \vec{p}_1 \cos \theta \cos \phi + \vec{p}_2 \cos \theta \sin \phi - \vec{p}_3 \sin \theta ; \\ \vec{\varepsilon}_\phi = -\vec{p}_1 \sin \phi + \vec{p}_2 \cos \phi ; \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} \varphi = \vec{\varepsilon}_r \partial_r u + \vec{\varepsilon}_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta u + \vec{\varepsilon}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi u ;$$

$$\text{div } \vec{\omega} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} [\partial_r (r^2 \sin \theta v_r) + \partial_\theta (r \sin \theta v_\theta) + \partial_\phi (r v_\phi)]$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{\omega} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \text{Det} \begin{pmatrix} \vec{\varepsilon}_r & r \vec{\varepsilon}_\theta & r \sin \theta \vec{\varepsilon}_\phi \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\phi \\ v_r & r v_\theta & r \sin \theta v_\phi \end{pmatrix}$$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r u) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta u) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi \partial_\phi u .$$

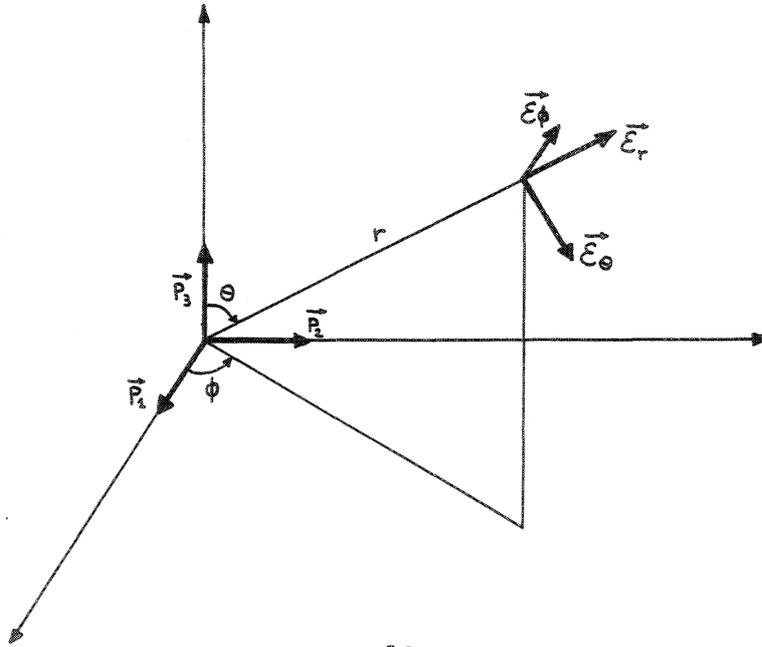


figure 22

III. SERIES DE FOURIER

III.1. Fonctions continues par intervalles

Définition. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. On pose (si ces limites existent)

$$f(a+0) = \lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t > a}} f(t) \quad (\text{valeur à droite de } f \text{ en } a)$$

$$f(a-0) = \lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t < a}} f(t) \quad (\text{valeur à gauche de } f \text{ en } a)$$

Définition. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue par intervalles si 1) $f(a+0)$ et $f(a-0)$ sont définis pour tout $a \in \mathbb{R}$ (c'est-à-dire si les limites correspondantes existent) 2) l'ensemble des points où f est discontinue n'a pas de point d'accumulation. L'ensemble des fonctions continues par intervalles est noté par C_I^0 .

Remarque. La première condition de la définition précédente indique qu'une fonction continue par intervalles n'admet que des discontinuités de première espèce c'est-à-dire des sauts ; si a est une discontinuité de f , $f(a+0) - f(a-0)$ est le saut.

Remarque. On vérifie aisément que la somme, la différence et le produit de fonctions continues par intervalles est continue par intervalles ; en particulier C_I^0 est un espace vectoriel.

Théorème III.1.1. Soit $f \in C_I^0$, et J un intervalle borné. Alors

1) f admet au plus un nombre fini de discontinuités dans J .

- 2) Si f est continue sur l'intervalle ouvert borné $]a, b[$, alors la restriction de f à $]a, b[$ possède une extension unique continue définie sur $[a, b]$.
- 3) f est bornée sur J .

Démonstration. 1) Supposons par l'absurde que f admette un nombre infini de discontinuités sur J ; on peut alors construire une suite $[a_i]_{i=1}^{\infty} \subset J$ où les a_i sont des points de discontinuité de f distincts; d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass (théorème I.3.10), il existe une sous-suite convergeant vers un point $a \in \mathbb{R}$ qui est manifestement un point d'accumulation de l'ensemble des points de discontinuité, contradiction.

2) Soit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :
 $g(t) = f(t)$, $t \in]a, b[$, $g(a) = f(a+0)$, $g(b) = f(b-0)$;
 g est alors l'unique fonction continue sur $[a, b]$ égale à f sur $]a, b[$; on remarque que g étant continue sur la compact $[a, b]$ est bornée; par conséquent f est également bornée sur $]a, b[$.

3) D'après le point 1, il existe des points $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ tels que $J \subset [t_0, t_n]$ et tels que f soit continue sur $[t_0, t_n]$ excepté éventuellement en t_i , $i = 1, 2, \dots, n$; d'après le point 2, il existe $M_i \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f(t)| \leq M_i$, $t \in]t_{i-1}, t_i[$; alors pour $t \in J$

$$|f(t)| \leq \max(M_1, M_2, \dots, M_n, |f(t_0)|, |f(t_1)|, \dots, |f(t_n)|).$$

Définition. Soit $f, g \in C_I^0$ et $A \subset \mathbb{R}$. On dit que f égale g presque partout sur A et l'on écrit " $f = g$ p.p sur A " s'il existe $\Omega \subset A$ n'ayant pas de point d'accumulation tel que $f(t) = g(t)$ pour tout $t \in A$, $t \notin \Omega$. Si $A = \mathbb{R}$, on écrira simplement " $f = g$ p.p".

On vérifie aisément que la relation "égale presque partout sur A " est une relation d'équivalence; de plus $f = g$ p.p sur A et $u = v$ p.p sur A implique $f+u = g+v$ p.p sur A , $f-u = g-v$ p.p sur A , $f \cdot u = g \cdot v$ p.p sur A .

Définition. Soit $f \in C_I^0$. Soit $[a, b]$ un intervalle fermé ; il existe (théorème III.1.1) $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ tels que f soit continue sur chacun des intervalles $]t_i, t_{i+1}[$; soit $g_i : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, égale à f sur $]t_i, t_{i+1}[$; on pose

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} g_i(t) dt .$$

Par une décomposition convenable de l'intervalle $[a, b]$, on vérifie l'implication

$$f = g \text{ p.p sur } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(t) dt = \int_a^b g(t) dt ;$$

en particulier si $f(t) = 0$ p.p sur $[a, b]$, alors

$\int_a^b f(t) dt = 0$; le théorème qui suit est une sorte de récipro-

que de ce fait.

Théorème III.1.2. Soit $f \in C_I^0$ tel que $\int_a^b |f(t)| dt = 0$; alors $f = 0$ p.p sur $[a, b]$.

Démonstration. Puisque l'ensemble des points de discontinuité de f n'a pas de point d'accumulation, il suffit de montrer que $f(t) = 0$ pour tout $t \in [a, b]$ où f est continue ; supposons que f soit continue en $C \in [a, b]$ mais $f(C) \neq 0$; il existe alors α et β tel que $C \in [\alpha, \beta] \subset [a, b]$ avec $\beta > \alpha$ et $|f(t)| > \frac{1}{2}|f(C)|$ $t \in [\alpha, \beta]$; on aurait alors

$$\int_a^b |f(t)| dt \geq \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)| dt \geq \frac{1}{2}(\beta - \alpha)|f(C)| \neq 0 ,$$

ce qui constitue une contradiction.

Corollaire. Si $f \in C^0([a, b])$ et $\int_a^b |f(t)| dt = 0$, alors $f(t) = 0$ $a \leq t \leq b$.

Démonstration. Il suffit de reprendre la démonstration du théorème III.1.2, en remarquant que $|f|$ est continue pour tout $t \in [a, b]$.

Définition. $f \in C_I^0$ possède une dérivée continue par intervalles si les conditions suivantes sont satisfaites :

- 1) l'ensemble Ω des valeurs où f n'a pas de dérivée n'a pas de point d'accumulation ;
- 2) la fonction $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ égale à 0 pour $t \in \Omega$ et égale à la dérivée de f en t pour $t \notin \Omega$ est continue par intervalles. Si les conditions 1 et 2 sont satisfaites, la fonction f' est, par définition, la dérivée de f .

Définition. f est de classe C_I^n ($f \in C_I^n$) si $f \in C^{n-1}$ et si la dérivée $(n-1)$ ième de f , $f^{(n-1)}$ possède une dérivée continue par intervalles notée $f^{(n)}$.

Remarque. Soit $f, g \in C_I^0$ possédant des dérivées continues par intervalles f' et g' ; soit $h = f+g$; on vérifie aisément la relation

$$h' = f'+g' \text{ p.p ;}$$

cependant, en général, on n'a pas $h'(t) = f'(t)+g'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$; considérons l'exemple suivant :

$$f(t) = \begin{cases} t & t \neq 0 \\ -1 & t = 0 \end{cases}, \quad g(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases};$$

on aura $f'(0) = g'(0) = 0$, $h(t) = t$, $h'(0) = 1 \neq f'(0)+g'(0)$.

Théorème III.1.3. Soit $f \in C_I^0$ admettant une dérivée f' continue par intervalles. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t > a}} \frac{f(t)-f(a+0)}{t-a} = f'(a+0), \quad \lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t < a}} \frac{f(t)-f(a-0)}{t-a} = f'(a-0).$$

Remarque. Les deux limites apparaissant dans le théorème III.1.3 peuvent être considérées comme les dérivées à droite et à gauche de f en a ; le théorème affirme que si f possède une dérivée continue par intervalles, alors f possède en chaque point une dérivée à droite et une dérivée à gauche égales respectivement à la valeur à droite et à la valeur à gauche de la dérivée.

Démonstration du théorème III.1.3. Démontrons la première affirmation du théorème. Sous les hypothèses faites, il existe $b > a$ tel que la restriction de f à $]a, b[$ soit de classe $C^1(]a, b[)$; posons $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ égale à f pour $t \in]a, b[$, à $f(a+0)$ pour $t = a$ et à $f(b-0)$ pour $t = b$; d'après le théorème II.1.1, $g \in C^1([a, b])$; donc g , et par conséquent f , possèdent une extension $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 ; on a alors

$$\begin{aligned} h'(a) &= \lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t > a}} \frac{h(t) - h(a)}{t - a} = \lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t > a}} \frac{f(t) - f(a+0)}{t - a} \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t > a}} h'(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t > a}} f'(t), \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Théorème III.1.4. Soit f et $g \in C^1_I$; la formule d'intégration par parties est valable ; c'est-à-dire que, pour un intervalle $[a, b]$, on a

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(t)g'(t)dt .$$

Démonstration. D'après les définitions et le théorème II.1.1 on peut trouver les abscisses $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ tels que les restrictions de f et g à $[t_{i-1}, t_i]$ soient de classe $C^1([t_{i-1}, t_i])$; soient u_i et $v_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de

classe C^1 égales à f et g respectivement sur $[t_{i-1}, t_i]$, on a $u'_i = f'$ et $v'_i = g'$ sauf peut être en t_{i-1} et t_i ; en appliquant à u_i et v_i la formule classique d'intégration par partie on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(t)g(t)dt &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} u'_i(t)v_i(t)dt = u_i(t_i)v_i(t_i) - u_i(t_{i-1})v_i(t_{i-1}) \\ &\quad - \int_{t_{i-1}}^{t_i} u_i(t)v'_i(t)dt \\ &= f(t_i)g(t_i) - f(t_{i-1})g(t_{i-1}) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)g'(t)dt ; \end{aligned}$$

en effectuant la somme de ces relations pour $i = 1, 2, \dots, n$, on obtient le résultat désiré.

Remarque. Pour $g(t) = 1$, le théorème III.1.4 se réduit au théorème fondamental du calcul différentiel et intégral qui est donc valable pour les fonctions de classe C^1_I :

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$$

Remarque. Le théorème d'intégration par parties ne se généralise pas pour des fonctions non continues ainsi que le montre l'exemple suivant : soit $f(t) = 0$ $t \leq 0$, $f(t) = 1$ $t > 0$, $g(t) = 1$ on a :

$$0 = \int_{-1}^1 f'(t)g(t)dt \neq f(1)g(1) - f(-1)g(-1) - \int_{-1}^1 f(t)g'(t)dt = 1 .$$

Théorème III.1.5. Soient $f \in C^0_I$ et $a < b \in \mathbb{R}$; alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $g \in C^1_I$ tel que

$$1) \sup_{t \in [a, b]} |g(t)| \leq \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|, \quad g(a) = f(a), \quad g(b) = f(b),$$

$$2) \int_a^b |f(t) - g(t)|dt < \epsilon .$$

Démonstration. Nous allons construire une suite de fonctions $g_n \in C_I^1$ satisfaisant à la condition 1 du théorème telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(t) - g_n(t)| dt = 0, \text{ ce qui démontrera ainsi le théorème.}$$

Soit $a = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_m = b$ tels que chacune des fonctions $h_i : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \mathbb{R}$ égale à f sur $]t_{i-1}, t_i[$, égale à $f(t_{i-1}+0)$ pour $t = t_{i-1}$ et égale à $f(t_i-0)$ pour $t = t_i$ soit continue ; soit $\omega_i(\delta)$ le module de continuité de h_i et soit $\omega(\delta) = \max_{i=1, \dots, n} \omega_i(\delta)$.

Soit M tel que $|f(t)| \leq M, t \in [a, b]$ (théorème III.1.1). Soit $h = (b-a)/n, \tau_i = a + ih; g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par les conditions suivantes :

- a) $g_n(t) = f(a) \quad t \leq a;$
- b) $g_n(t) = f(b) \quad t \geq b;$
- c) $g_n(t) = f(\tau_i) + (t - \tau_i)(f(\tau_{i+1}) - f(\tau_i))/h,$
 $\tau_i \leq t \leq \tau_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1;$

on vérifie aisément que $g_n \in C_I^1$ et satisfait à la condition 1 du théorème (figure 1); chacune des discontinuités t_1, t_2, \dots, t_{m-1} peut appartenir à deux intervalles partiels $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ au plus ; a et b pouvant être des discontinuités, on constate qu'il y a sur $[a, b]$ au plus $2m$ intervalles partiels où f peut être discontinue. Considérons tout d'abord un intervalle $[\tau_i, \tau_{i+1}] \subset [a, b]$ sur lequel f est continue ; pour $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, on a :

$$\begin{aligned} |f(t) - g_n(t)| &= |f(t) - f(\tau_i) - (t - \tau_i)(f(\tau_{i+1}) - f(\tau_i))/h| \\ &\leq |f(t) - f(\tau_i)| + |f(\tau_{i+1}) - f(\tau_i)| \\ &\leq 2 \omega(h). \end{aligned} \quad (1)$$

Pour un intervalle quelconque $[\tau_i, \tau_{i+1}] \subset [a, b]$ contenant éventuellement une discontinuité de f on a $|g_n(t)| \leq M$ $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ et par conséquent

$$|f(t) - g_n(t)| \leq |f(t)| + |g_n(t)| \leq 2M, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]. \quad (2)$$

Notons par \sum' la somme portant sur l'ensemble des intervalles $[\tau_i, \tau_{i+1}] \subset [a, b]$ où f est continue ; de même \sum'' denote une somme sur l'ensemble des intervalles $[\tau_i, \tau_{i+1}] \subset [a, b]$ où f n'est pas continue. De (1) et (2), on tire :

$$\sum' \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |f(t) - g_n(t)| dt \leq 2(b-a)\omega(h) ;$$

$$\sum'' \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |f(t) - g_n(t)| dt \leq 4mhM ;$$

$$\int_a^b |f(t) - g_n(t)| dt \leq 2(b-a)\omega(h) + 4mhM ;$$

d'après les théorèmes I.7.7 et I.7.8 $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta) = 0$;
 puisque $h = (b-a)/n$ on obtient la relation cherchée

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(t) - g_n(t)| dt = 0 . \quad \text{Q.E.D.}$$

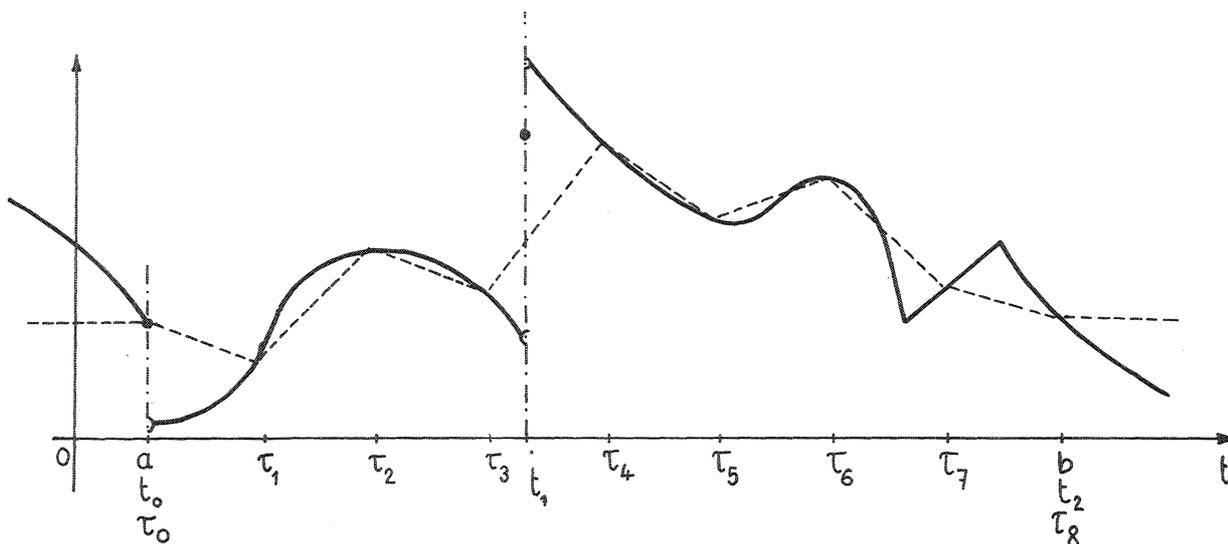


figure 1

trait plein : f

trait pointillé : g_n

points d'abscisses t_0 et t_1 : valeur de f en t_0 et t_1 .

Définition. Soit $[f_n]_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions continues par intervalles ;
 $[f_n]_{n=1}^{\infty}$ converge en moyenne quadratique vers $f \in C_I^0$ sur l'intervalle borné $[a,b]$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (f_n(t) - f(t))^2 dt = 0$$

Remarque. La limite d'une suite de fonctions selon la convergence en moyenne quadratique n'est pas unique ; en fait si $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ en moyenne quadratique sur $[a,b]$ et $f = g$ p.p sur $[a,b]$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = g$ en moyenne quadratique. La réciproque de ce fait sera démontrée au théorème III.2.5.

Théorème III.1.6. Soient $[f_n]_{n=1}^{\infty} \subset C_I^0$, $f \in C_I^0$, $[a,b]$ un intervalle borné ; les notions de convergence ponctuelle sur $[a,b]$, de convergence uniforme sur $[a,b]$ et de convergence en moyenne quadratique sur $[a,b]$ satisfont aux relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} [f_n] \rightarrow f \text{ ponctuellement sur } [a,b] \not\Rightarrow [f_n] \rightarrow f \text{ uniformément sur } [a,b] \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [f_n] \rightarrow f \text{ ponctuellement sur } [a,b] \not\Rightarrow [f_n] \rightarrow f \text{ en moyenne quadratique sur } [a,b] \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [f_n] \rightarrow f \text{ en moyenne quadratique sur } [a,b] \not\Rightarrow [f_n] \rightarrow f \text{ uniformément sur } [a,b] \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [f_n] \rightarrow f \text{ en moyenne quadratique sur } [a,b] \not\Rightarrow [f_n] \rightarrow f \text{ ponctuellement sur } [a,b] \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [f_n] \rightarrow f \text{ uniformément sur } [a,b] \Rightarrow [f_n] \rightarrow f \text{ ponctuellement sur } [a,b] \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [f_n] \rightarrow f \text{ uniformément sur } [a,b] \Rightarrow [f_n] \rightarrow f \text{ en moyenne quadratique sur } [a,b] \end{array} \right. \quad (8)$$

Démonstration. Pour démontrer (3), considérons l'exemple suivant : $a = 0$, $b = 1$, $f_n(t) = t^n$, $f(t) = 0$, $t < 1$, $f(t) = 1$, $t \geq 1$; les f_n sont continues ; s'il y avait convergence uniforme sur $[0,1]$, f serait continue sur $[0,1]$ (théorème I.9.3), ce qui n'est pas le cas.

Pour établir (4), considérons l'exemple suivant : $a = 0$,
 $b = 1$, $f_n(t) = 0$, $t \leq 0$ et $t \geq \frac{1}{n}$, $f_n(t) = -n^2(t - \frac{1}{n})$,
 $0 < t \leq \frac{1}{n}$, $f(t) = 0$, (figure 2) ; $\{f_n(t)\} \rightarrow 0$ pour
 tout $t \in [0,1]$; par contre

$$\int_0^1 (f_n(t) - f(t))^2 dt = \int_0^1 (f_n(t))^2 dt = n/3 \neq 0$$

si $n \rightarrow \infty$. (5) et (6) sont des conséquences immédiates
 de la non unicité de la limite pour la convergence en
 moyenne quadratique. (7) est évident. Pour établir (8)
 supposons $[f_n] \rightarrow f$ uniformément sur $[a,b]$; soit $\epsilon > 0$
 donné ; il existe N tel que $|f_n(t) - f(t)| < (\epsilon/(b-a))^{\frac{1}{2}}$
 pour $n > N$, quelque soit $t \in [a,b]$; on a alors pour
 $n > N$

$$\int_a^b (f_n(t) - f(t))^2 dt < \int_a^b \epsilon/(b-a) dt = \epsilon . \quad \text{Q.E.D.}$$

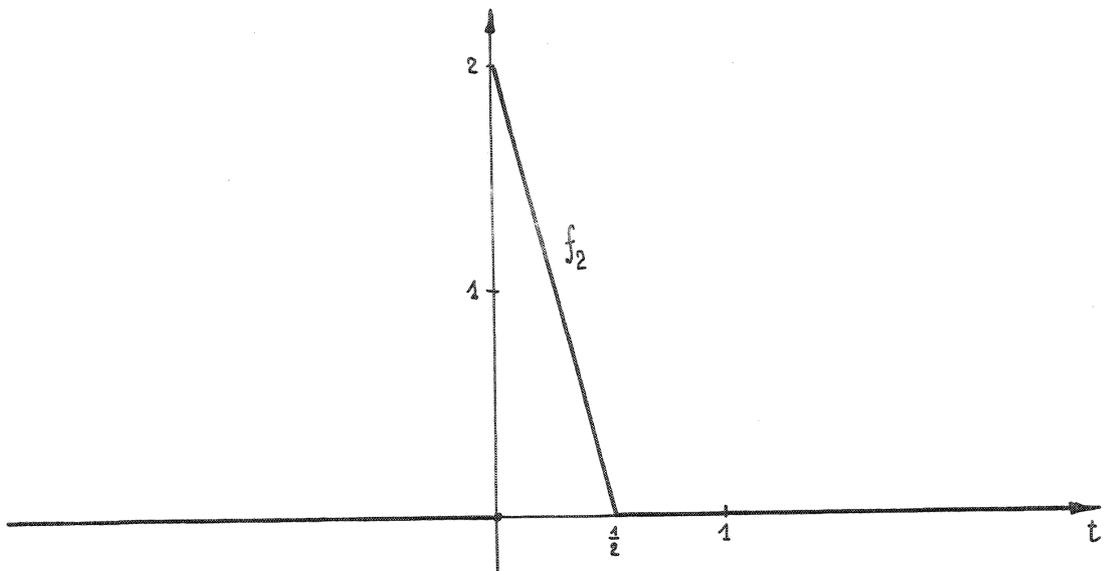


figure 2

III.2. Espaces à produit scalaire

Définitions. Soit E un espace vectoriel réel. Un produit scalaire sur E est une application $(,) : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant aux conditions :

- a) $(f, f) \geq 0 \quad \forall f \in E$
- b) $(f, g) = (g, f) \quad \forall f, g \in E$
- c) $(\alpha f + \beta g, h) = \alpha(f, h) + \beta(g, h) \quad \forall f, g, h \in E, \alpha, \beta \in \mathbb{R} .$
- d) $(f, f) = 0 \Rightarrow f = \underline{0}$ (élément nul de E) .

Si l'application $(,)$ satisfait aux propriétés a), b), c), on parle d'un semi-produit scalaire.

c) exprime la linéarité du produit ou du semi-produit scalaire par rapport au premier argument ; la linéarité par rapport au second argument, c'est-à-dire la propriété

$$(f, \alpha g + \beta h) = \alpha(f, g) + \beta(f, h) \quad (1)$$

est une conséquence immédiate de b) et c). Soit $\underline{0}$ l'élément nul de E ; on a alors la propriété :

$$(\underline{0}, f) = 0 \quad \forall f \in E ; \quad (2)$$

en effet d'après c) : $(\underline{0}, f) = (0\underline{0}, f) = 0(\underline{0}, f) = 0 .$

Exemple 1. Dans l'espace E des vecteurs (géométriques) bi ou tridimensionnels , $(\vec{f}, \vec{g}) \equiv \vec{f} \cdot \vec{g}$ est un produit scalaire.

Exemple 2. $E = \mathbb{R}^n$; $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ est un produit scalaire.

Plus généralement soient p_1, p_2, \dots, p_n des nombres non négatifs ; alors $(x, y) \equiv \sum_{i=1}^n p_i x_i y_i$ est un semi-produit scalaire, qui satisfera d) si et seulement si tous les p_i sont strictement positifs.

Exemple 3. $E = C^0([a, b])$; on pose $(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt .$

$(,)$ satisfait visiblement aux conditions a), b) c). Pour montrer que $(,)$ est en fait un produit scalaire, vérifions d) ; $(f,f) = 0 \Rightarrow \int_a^b f^2(t)dt = 0 \Rightarrow f^2(t) = 0, t \in [a,b]$ (corollaire du théorème III.1.5) $\Rightarrow f = 0$.

Exemple 4. Soit $E = C_I^0$; on pose $(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$, $a < b$ fixes ; $(,)$ est un semi-produit scalaire mais non un produit scalaire ; en effet la condition d) n'est pas satisfaite : $(f,f) = 0 \Rightarrow \int_a^b f^2(t)dt = 0 \Rightarrow f^2(t) = 0$ p.p sur $[a,b]$ (théorème III.1.5) $\Rightarrow f = 0$ p.p sur $[a,b]$; on constate que la condition $(f,f) = 0$ n'entraîne pas la nullité de f sur $[a,b]$.

Convention. Pour la suite de ce paragraphe E désignera toujours un espace vectoriel réel d'élément nul $\underline{0}$ muni du semi-produit scalaire $(,)$.

Théorème III.2.1. (inégalité de Schwarz) :

$$(f,g)^2 \leq (f,f)(g,g) \quad \forall f, g \in E.$$

Démonstration. Si $g = \underline{0}$, l'inégalité devient $0 \leq 0$; elle est donc satisfaite. Supposons $g \neq \underline{0}$ et soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le trinôme du second degré défini par

$$F(\lambda) = (f+\lambda g, f+\lambda g) = \lambda^2 (g,g) + 2\lambda (f,g) + (f,f) ;$$

la propriété a) des semi-produits scalaires implique que $F(\lambda) \geq 0$ pour tout λ ; par conséquent le discriminant est négatif c'est-à-dire

$$(f,g)^2 - (g,g)(f,f) \leq 0 \quad . \quad \text{Q.E.D.}$$

Application à l'exemple 4. On a pour $f, g \in C_I^0$, $a < b$:

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt \right)^2 \leq \int_a^b f^2(t)dt \cdot \int_a^b g^2(t)dt .$$

Théorème III.2.2. (Inégalité triangulaire).

$$(f+g, f+g)^{\frac{1}{2}} \leq (f, f)^{\frac{1}{2}} + (g, g)^{\frac{1}{2}} \quad \forall f, g \in E.$$

Démonstration. On utilise l'inégalité de Schwarz :

$$\begin{aligned} (f+g, f+g) &= (f, f) + (g, g) + 2(f, g) \leq (f, f) + (g, g) + 2(f, f)^{\frac{1}{2}}(g, g)^{\frac{1}{2}} \\ (f+g, f+g) &\leq ((f, f)^{\frac{1}{2}} + (g, g)^{\frac{1}{2}})^2. \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Application à l'exemple 4. On a pour $f, g \in C_I^0$, $a < b$:

$$\left(\int_a^b (f(t)+g(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b (f(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b (g(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Définition. Une application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant aux conditions

$$\begin{aligned} \alpha) \quad &\|f\| \geq 0 && \forall f \in E \\ \beta) \quad &\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\| && \forall f \in E, \alpha \in \mathbb{R} \\ \gamma) \quad &\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\| && \forall f, g \in E \end{aligned}$$

est appelée semi-norme sur E ; si, de plus la propriété

$$\delta) \quad \|f\| = 0 \Rightarrow f = \underline{0}$$

est satisfaite, $\|\cdot\|$ est appelé norme sur E .

Théorème III.2.3. L'application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\|f\| = (f, f)^{\frac{1}{2}}$$

est une semi-norme appelée "semi-norme associée à (\cdot, \cdot) ".

Si (\cdot, \cdot) est un produit scalaire $\|\cdot\|$ est une norme appelée "norme associée au produit scalaire (\cdot, \cdot) ".

Démonstration. Les propriétés $\alpha)$, $\beta)$, $\delta)$ sont des conséquences immédiates des propriétés $a)$, $b)$, $c)$, $d)$ des semi-produits et des produits scalaires. $\gamma)$ est une conséquence du théorème III.2.2.

Convention. Dans la suite de ce paragraphe, $\| \cdot \|$ désignera la semi-norme associée au semi-produit scalaire (\cdot , \cdot) .

Définition. Soit $\{f_i\}_{i=1}^{\infty} \subset E$ une suite dans E . Cette suite converge en semi-norme vers $f \in E$ si $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$.

Remarque. Soit $E = C_I^0$, $(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$; il résulte de la définition précédente que la convergence en semi-norme n'est rien d'autre que la convergence en moyenne quadratique sur $[a, b]$ définie au paragraphe précédent.

Théorème III.2.4. Soit $\{f_i\}_{i=1}^{\infty} \subset E$ une suite convergeant en semi-norme vers $f \in E$; soit $g \in E$; on a

$$\|f - g\| = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - g\| = 0.$$

Démonstration. (\implies): supposons $\|f - g\| = 0$; on a, compte tenu de l'inégalité triangulaire :

$$\|f_n - g\| = \|(f_n - f) + f - g\| \leq \|f_n - f\| + \|f - g\| = \|f_n - f\|$$

et par conséquent $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - g\| = 0$.

(\impliedby): réciproquement, supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - g\| = 0$; on a, en tenant compte de l'inégalité triangulaire :

$$\|f - g\| = \|(f - f_n) + (f_n - g)\| \leq \|f - f_n\| + \|f_n - g\|;$$

en prenant la limite, lorsque $n \rightarrow \infty$, des deux membres, on obtient $\|f - g\| = 0$. Q.E.D.

Corollaire. Lorsque $\| \cdot \|$ est une norme, alors la limite d'une suite convergeant selon $\| \cdot \|$, si elle existe, est unique.

Démonstration. Si $[f_n] \rightarrow f$ et $[f_n] \rightarrow g$ en norme, alors d'après le théorème III.2.4, $\|f-g\| = 0$ et par conséquent $f-g = \underline{0}$, $f = g$. Q.E.D.

Théorème III.2.5. Soit $[f_n] \subset C_I^0$ convergeant en moyenne quadratique sur $[a,b]$ vers $f \in C_I^0$ et vers $g \in C_I^0$; alors $f = g$ p.p sur $[a,b]$.

Démonstration. D'après la remarque précédente et le théorème III.2.4, les hypothèses impliquent $\|f-g\| = 0$ où $\| \cdot \|$ est la semi-norme sur C_I^0 associée au semi-produit scalaire $(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$; d'après le commentaire de l'exemple 4, $f-g = 0$ p.p sur $[a,b]$, c'est-à-dire $f = g$ p.p sur $[a,b]$ Q.E.D.

Définition. Si f et $g \in E$ sont tels que $(f,g) = 0$, on dit que f et g sont orthogonaux. On remarque que $\underline{0}$ est orthogonal à tout $f \in E$.

Définition. La suite $[f_i]$ est une suite orthogonale si l'on a :

- 1) $\|f_i\| \neq 0 \quad i = 1, 2, \dots$
- 2) $(f_i, f_j) = 0 \quad i \neq j, i, j = 1, 2, 3, \dots$;

N.B. On considérera souvent des suites orthogonales finies, dans lesquelles l'indice i ne prend donc qu'un nombre fini de valeurs.

Remarque. Soit $[f_i]$ une suite orthogonale, et i_1, i_2, \dots, i_m m indices distincts. Alors $f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_m}$ sont linéairement indépendants. En effet soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=1}^m \alpha_k f_{i_k} = \underline{0}$; en multipliant scalairement cette relation par f_{i_p} , $1 \leq p \leq m$, on obtient $\alpha_p \|f_{i_p}\|^2 = 0 \Rightarrow \alpha_p = 0$. Par conséquent, s'il existe dans E une suite orthogonale non finie, E est nécessairement de dimension infinie.

Définition. Soit $[f_i]$ une suite orthogonale. Cette suite orthogonale est totale si $\forall f \in E, \forall \epsilon > 0, \exists N$ et $C_1, C_2, \dots, C_N \in \mathbb{R}$ tels que

$$\|f - \sum_{i=1}^N C_i f_i\| < \epsilon .$$

Définition. Soit $[f_i]$ une suite orthogonale. Soit $f \in E$. Les coefficients

$$C_i = \frac{(f, f_i)}{(f_i, f_i)} \quad i = 1, 2, \dots \quad (3)$$

sont les coefficients de Fourier de f relatifs à la suite orthogonale $[f_i]$. La série formelle $\sum_{i \geq 1} C_i f_i$ est la série de Fourier de f relative à la suite orthogonale $[f_i]$. La notation

$$f \sim \sum_{i \geq 1} C_i f_i$$

signifie simplement que les C_i sont les coefficients de Fourier de f définis par (3).

Exemple 5. Dans l'espace des vecteurs (géométriques) tridimensionnels, trois vecteurs non nuls orthogonaux deux à deux forment une suite finie orthogonale totale.

Exemple 6. Soient $E = C_I^0$, $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$. La suite formée des fonctions

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \cos 3t, \sin 3t, \dots \quad (4)$$

est une suite orthogonale ; de plus

$$(1, 1) = 2\pi, \quad (\cos kt, \cos kt) = (\sin kt, \sin kt) = \pi, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

Pour des entiers non négatifs n et m , nous avons à établir les relations

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \sin mt dt = 0 ; \quad (6)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt \, dt = \begin{cases} 2\pi & \text{si } n = m = 0 \\ \pi & \text{si } n = m > 0 \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases} ; \quad (7)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin mt \, dt = \begin{cases} \pi & \text{si } n = m \geq 1 \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases} \quad (8)$$

(6), (7), (8) sont des conséquences des identités (9), (10), (11) respectivement :

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)) ; \quad (9)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)) ; \quad (10)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)) ; \quad (11)$$

pour (7), par exemple, on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt \, dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)t \, dt + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)t \, dt ;$$

le premier terme du membre de droite est nul sauf si $n = m = 0$; le second terme est nul sauf si $n = m$ car

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos pt \, dt = 0 \quad p \text{ entier } \neq 0 .$$

Exemple 7. Soit $E = C_I^0$, $(f, g) = \int_0^{\pi} f(t)g(t)dt$.

Chacune des deux suites

$$1, \cos t, \cos 2t, \cos 3t, \dots$$

$$\text{et} \quad \sin t, \sin 2t, \sin 3t, \dots$$

est orthogonale. De plus $(1, 1) = \pi$, $(\cos kt, \cos kt) = (\sin kt, \sin kt) = \pi/2$, $k = 1, 2, 3, \dots$

La vérification de ces affirmations se fait à l'aide de (10) et (11).

Notations et conventions. Pour le reste du paragraphe $[f_i]$ est une suite dans l'espace E , orthogonale pour le semi-produit scalaire de E . Le cas éventuel de la suite finie sera mentionné explicitement. Π_n désigne le sous-espace de E engendré par f_1, f_2, \dots, f_n . f est un élément particulier de E . C_1, C_2, \dots sont les coefficients de Fourier de f , c'est-à-dire

$$f \sim \sum_{i \geq 1} C_i f_i, \quad C_i = (f, f_i) / (f_i, f_i) \quad i = 1, 2, \dots;$$

finalement $S_n = \sum_{i=1}^n C_i f_i$ est la n ième somme partielle de la série de Fourier de f .

Remarque. Supposons que $f \in \Pi_N$; alors $f = S_n$ pour $n \geq N$; en effet soit $f = \sum_{i=1}^N d_i f_i$; en multipliant scalairement cette relation par f_k on obtient :

$$(f, f_k) = \sum_{i=1}^N d_i (f_i, f_k) = \begin{cases} d_k (f_k, f_k) & k \leq N \\ 0 & k > N \end{cases}$$

par conséquent $C_k = d_k$ $k \leq N$, $C_k = 0$ $k > N$ et $f = S_n$, $n \geq N$.

Lemme 1. $(f - S_n, f_i) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Démonstration. Pour $i \leq n$ on a

$$(f - S_n, f_i) = (f - \sum_{j=1}^n C_j f_j, f_i) = (f, f_i) - C_i (f_i, f_i) = 0. \text{ Q.E.D.}$$

Corollaire. $f - S_n$ est orthogonal à tout élément $g \in \Pi_n$.

Lemme 2. Pour $g \in \Pi_n$, on a

$$\|f - g\|^2 = \|f - S_n\|^2 + \|S_n - g\|^2$$

Démonstration. On utilise le corollaire du lemme 1 en remarquant que $S_n - g \in \Pi_n$:

$$\begin{aligned} \|f-g\|^2 &= ((f-S_n)+(S_n-g), (f-S_n)+(S_n-g)) \\ &= (f-S_n, f-S_n) + (S_n-g, S_n-g) + 2(f-S_n, S_n-g) \\ &= \|f-S_n\|^2 + \|S_n-g\|^2. \end{aligned} \quad \text{Q.E.D.}$$

Interprétation géométrique. E est l'espace des vecteurs tridimensionnels, $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ une suite (finie) orthogonale ; on considère le cas $n = 2$. Puisque (corollaire du lemme 1), $\vec{f} - \vec{S}_2$ est orthogonale à Π_2 , $\vec{S}_2 \in \Pi_2$ est la projection orthogonale de f sur Π_2 (figure 3) ; le lemme 2 exprime alors le théorème de Pythagore pour le triangle rectangle dont les sommets sont les extrémités des vecteurs \vec{f} , \vec{g} et \vec{S}_2 .

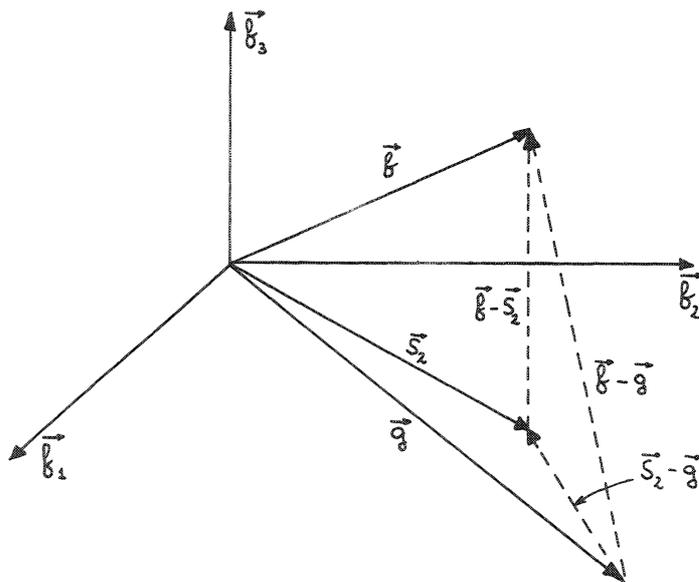


figure 3

Théorème III.2.6. S_n est, parmi tous les éléments de Π_n , meilleure approximation de f selon la semi-norme $\| \cdot \|$ c'est-à-dire :

$$\|f-S_n\| \leq \|f-g\| \quad \forall g \in \Pi_n.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du lemme 1, puisque $\|S_n - g\| \geq 0$.

Théorème III.2.7. (Inégalité de Bessel)

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \|f_i\|^2 \leq \|f\|^2$$

Démonstration. En posant $g = 0$ dans le lemme 2, on obtient

$$\|S_n\|^2 \leq \|f\|^2 ;$$

$$\|S_n\|^2 = \left(\sum_{i=1}^n c_i f_i, \sum_{j=1}^n c_j f_j \right) = \sum_{i=1}^n c_i^2 \|f_i\|^2 < \|f\|^2 ;$$

d'après le théorème I.8.3, la série $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \|f_i\|^2$ converge et sa limite est inférieure ou égale à $\|f\|^2$.

Théorème III.2.8. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- 1) La suite orthogonale $[f_i]_{i=1}^{\infty}$ est totale ;
- 2) Pour tout $f \in E$ on a $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \|f_i\|^2 = \|f\|^2$;
- 3) Pour tout $f \in E$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n\| = 0$.

Démonstration. Nous montrons l'équivalence de 1) et 3) puis l'équivalence de 2) et 3). 1) \Rightarrow 3) ; soit $\varepsilon > 0$; d'après la définition de la totalité, pour $f \in E$ il existe N et $g \in \Pi_N$ tels que $\|f - g\| < \varepsilon$; pour $n > N$, $g \in \Pi_n$ et (théorème III.2.6) $\|f - S_n\| \leq \|f - g\| < \varepsilon$. 3) \Rightarrow 1) ; soit $\varepsilon > 0$; la condition 3) implique l'existence de N tel que $\|f - S_N\| < \varepsilon$; par définition $S_N \in \Pi_N$. 2) \Leftrightarrow 3) ; on utilise le lemme 2 avec $g = 0$ ainsi que la relation $\|S_n\|^2 = \sum_{i=1}^n c_i^2 \|f_i\|^2$ établie lors de la démonstration du théorème III.2.7 ; on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n\|^2 = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \|f\|^2 - \|S_n\|^2 \} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n\|^2 = \|f\|^2 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \|f_n\|^2 = \|f\|^2 .$$

III.3. Fonctions périodiques

Définition. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est périodique de période T ou T-périodique si $f(t) = f(t+T) \quad \forall t \in \mathbb{R}$; T est un nombre quelconque fixe de \mathbb{R} .

Notation. $C_{I,T}^k$ désigne l'ensemble des fonctions de classe C_I^k qui sont T-périodiques. Les propriétés qui sont mentionnées dans ce paragraphe sont élémentaires et leurs démonstrations ne seront qu'esquissées.

Propriété 1. Si f est T-périodique, alors f est également $\pm T, \pm 2T, \pm 3T, \dots$ -périodique. En effet on a :
 $f(t) = f(t+T) = f((t+T)+T) = f(t+2T) \quad \forall t \in \mathbb{R}$; donc f est 2T-périodique ;
 $f(t) = f(t+2T) = f((t+2T)+T) = f(t+3T) \quad \forall t \in \mathbb{R}$; donc f est 3T-périodique etc... D'autre part si f est T-périodique, $\forall t$ on a $f(t-T) = f((t-T)+T) = f(t)$; donc f est -T périodique .

Propriété 2. Si f et g sont T-périodiques, $f+g, f-g, f \cdot g$ sont T-périodiques. Si $f \in C_{I,T}^k$, alors $f^{(j)}$ est T-périodique pour $j = 0, 1, 2, \dots, k$.

Propriété 3. Soit $g \in C_I^0$, $a \in \mathbb{R}$. Il existe une et une seule fonction $f \in C_{I,T}^0$ telle que $f(t) = g(t)$,
 $t \in [a, a+T[$; de plus si g est continue, f est alors continue si et seulement si $g(a) = g(a+T)$.

Pour construire f à partir de g sur l'intervalle $[a+kT, a+(k+1)T[$, on pose $f(a+kT+t) = g(t)$
 $0 \leq t < T$; on dit que f est obtenue par prolongement périodique de la restriction de g à $[a, a+T[$.

Propriété 4. Soit $g \in C_I^0$. Il existe une et une seule fonction paire $f \in C_{I,2T}^0$ ($f(t) = f(-t)$) telle que $f(t) = g(t)$ $t \in [0, T]$. De plus si g est continue, alors f est également continue.

On construit d'abord f sur $[-T, 0]$ en posant $f(-t) = g(t)$, $t \in [0, T]$, puis on procède par prolongement périodique.

Propriété 5. Soit $g \in C_I^0$ avec $g(t) = -g(-t)$, $t \in \mathbb{R}$ (fonction impaire). Il existe une et une seule fonction impaire $f \in C_{I,2T}^0$ ($f(t) = -f(-t)$) telle que $f(t) = g(t)$, $t \in]0, T[$. De plus si g est continue, alors f est continue si et seulement $g(0) = g(T) = 0$. L'imparité de f exige que $f(0) = 0$; l'imparité et la $2T$ -périodicité impliquent les relations : $f(-T) = -f(T)$, $f(-T) = f(-T+2T) = f(T)$ et par conséquent $f(T) = 0$; ainsi f est déterminé sur $[0, T]$; la condition d'imparité $f(t) = -f(-t)$ permet de déterminer f sur $[-T, 0]$; on procède ensuite par prolongement périodique.

Propriété 6. Soit $f \in C_{I,T}^0$, a et $b \in \mathbb{R}$. Alors

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_b^{b+T} f(t) dt .$$

Démonstration. Supposons, pour fixer les idées que $a < b$. Soit $m \geq 0$ entier tel que $\alpha \equiv a+mT \in [b, b+T[$ (figure 4).



figure 4

En effectuant les changements de variable $\tau = t+mT$ et $\tau = t+T$ et en tenant compte de la T -périodicité de f on obtient :

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_a^{\alpha+T} f(\tau-mT)d\tau = \int_a^{\alpha+T} f(\tau)d\tau ,$$

$$\int_b^{\alpha} f(t)dt = \int_{b+T}^{\alpha+T} f(\tau-T)d\tau = \int_{b+T}^{\alpha+T} f(\tau)d\tau ;$$

on a alors

$$\begin{aligned} \int_b^{b+T} f(t)dt &= \int_b^{\alpha} f(t)dt + \int_{\alpha}^{b+T} f(t)dt = \int_{b+T}^{\alpha+T} f(t)dt + \int_{\alpha}^{b+T} f(t)dt \\ &= \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)dt = \int_a^{a+T} f(t)dt . \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

III.4. Séries de Fourier trigonométriques

Dans ce paragraphe, nous considérons l'espace $C_{I,2\pi}^0$ muni du semi-produit scalaire $(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$. La suite

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots \quad (1)$$

a tous ses éléments dans $C_{I,2\pi}^0$ et constitue une suite orthogonale (voir exemple 6, paragraphe III.2). La série de Fourier d'un élément $f \in C_{I,2\pi}^0$ relative à la suite (1) porte le nom de série de Fourier trigonométrique ; soit

$$f \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) ;$$

les coefficients de Fourier sont donnés par les expressions (cf. exemple 6, paragraphe III.2) :

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt \end{aligned} \right\} k = 1, 2, 3, \dots$$

Si f est une fonction paire, on a

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt \\ a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \\ b_k &= 0 \end{aligned} \right\} k = 1, 2, 3, \dots$$

on dit alors que la série de Fourier de f est une série en cosinus.

Si f est une fonction impaire, on a

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_k &= 0 \\ b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin kt \, dt \end{aligned} \right\} k = 1, 2, 3, \dots$$

En effectuant les changements de variable $\tau = t+mT$ et $\tau = t+T$ et en tenant compte de la T -périodicité de f on obtient :

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_\alpha^{\alpha+T} f(\tau-mT)d\tau = \int_\alpha^{\alpha+T} f(\tau)d\tau ,$$

$$\int_b^\alpha f(t)dt = \int_{b+T}^{\alpha+T} f(\tau-T)d\tau = \int_{b+T}^{\alpha+T} f(\tau)d\tau ;$$

on a alors

$$\begin{aligned} \int_b^{b+T} f(t)dt &= \int_b^\alpha f(t)dt + \int_\alpha^{b+T} f(t)dt = \int_{b+T}^{\alpha+T} f(t)dt + \int_\alpha^{b+T} f(t)dt \\ &= \int_\alpha^{\alpha+T} f(t)dt = \int_a^{a+T} f(t)dt . \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

III.4. Séries de Fourier trigonométriques

Dans ce paragraphe, nous considérons l'espace $C_{I,2\pi}^0$ muni du semi-produit scalaire $(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$. La suite

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots \quad (1)$$

a tous ses éléments dans $C_{I,2\pi}^0$ et constitue une suite orthogonale (voir exemple 6, paragraphe III.2). La série de Fourier d'un élément $f \in C_{I,2\pi}^0$ relative à la suite (1) porte le nom de série de Fourier trigonométrique ; soit

$$f \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) ;$$

les coefficients de Fourier sont donnés par les expressions (cf. exemple 6, paragraphe III.2) :

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt dt \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt dt \end{aligned} \right\} k = 1, 2, 3, \dots$$

Si f est une fonction paire, on a

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t)dt \\ a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t)\cos kt dt \\ b_k &= 0 \end{aligned} \right\} k = 1, 2, 3, \dots$$

on dit alors que la série de Fourier de f est une série en cosinus.

Si f est une fonction impaire, on a

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_k &= 0 \\ b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t)\sin kt dt \end{aligned} \right\} k = 1, 2, 3, \dots$$

On dit alors que la série de Fourier de f est une série en sinus.

Théorème III.4.1. Soit $f \in C_{I, 2\pi}^k$. Alors la série de Fourier trigonométrique de $f^{(j)}$, $1 \leq j \leq k$, s'obtient en dérivant terme à terme j fois la série de Fourier de f . Si

$$f \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

on aura

$$f' \sim \sum_{k=1}^{\infty} \{(kb_k) \cos kt + (-ka_k) \sin kt\}$$

$$f'' \sim \sum_{k=1}^{\infty} \{(-k^2 a_k) \cos kt + (-k^2 b_k) \sin kt\}$$

Démonstration. Il suffit de démontrer le théorème pour $k = j = 1$; le cas général se déduit ensuite aisément par induction. Posons

$$f' \sim \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt)$$

et montrons que

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_k = kb_k, \quad \beta_k = -ka_k \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

On utilise le théorème d'intégration par parties III.1.4 et la 2π -périodicité de f ; on a

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) dt = f(\pi) - f(-\pi) = 0;$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \cos kt dt = \left[f(t) \cos kt \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt = kb_k;$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \sin kt dt = \left[f(t) \sin kt \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt = -ka_k.$$

Le but de ce paragraphe est d'établir des théorèmes de convergence sur les séries de Fourier trigonométriques et finalement la totalité de la suite orthogonale (1). A cet effet, nous avons besoin de lemmes préparatoires.

Lemme 1. Soit $f \in C_I^0$, $a < b$. Alors

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \cos \lambda t \, dt = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin \lambda t \, dt = 0.$$

Démonstration. Nous ne démontrons que la première relation, la seconde pouvant s'établir de façon analogue. Nous commençons par démontrer le lemme dans le cas particulier où $f \in C_I^1$; par intégration par parties (théorème III.1.4), on obtient :

$$\int_a^b f(t) \cos \lambda t \, dt = \frac{1}{\lambda} f(t) \sin \lambda t \Big|_a^b - \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin \lambda t \, dt;$$

$$\left| \int_a^b f(t) \cos \lambda t \, dt \right| \leq \frac{1}{\lambda} \left\{ |f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(t)| \, dt \right\};$$

lorsque $\lambda \rightarrow \infty$, le membre de droite $\rightarrow 0$. Passons maintenant au cas général où $f \in C_I^0$; soit $\epsilon > 0$ donné; d'après le théorème III.1.5, il existe $g \in C_I^1$ tel que

$$\int_a^b |f(t) - g(t)| \, dt < \epsilon/2;$$

en appliquant à g le résultat particulier déjà obtenu, on voit qu'il existe Λ tel que pour $\lambda > \Lambda$ on ait

$$\left| \int_a^b g(t) \cos \lambda t \, dt \right| < \epsilon/2;$$

en combinant ces deux relations, on obtient pour $\lambda > \Lambda$:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) \cos \lambda t \, dt \right| &= \left| \int_a^b (f(t) - g(t)) \cos \lambda t \, dt + \int_a^b g(t) \cos \lambda t \, dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(t) - g(t)| \, dt + \left| \int_a^b g(t) \cos \lambda t \, dt \right| < \epsilon. \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Lemme 2. On a l'identité

$$\frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \dots + \cos nu = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{1}{2}u} . \quad (1)$$

Démonstration. On utilise la formule de trigonométrie

$$\cos\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)) ;$$

En désignant par S le membre de gauche de (1), on a :

$$\begin{aligned} 2S \cdot \sin\frac{u}{2} &= \sin\frac{u}{2} + (\sin\frac{3u}{2} - \sin\frac{u}{2}) + (\sin\frac{5u}{2} - \sin\frac{3u}{2}) + \dots + \\ &\quad + (\sin\frac{2n+1}{2}u - \sin\frac{2n-1}{2}u) \\ &= \sin\frac{2n+1}{2}u . \end{aligned} \quad \text{Q.E.D.}$$

Lemme 3. Soient $f \in C_{I, 2\pi}^0$, $f \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$,

$$S_N(t) = a_0 + \sum_{k=1}^N (a_k \cos kt + b_k \sin kt) . \text{ Alors}$$

$$S_N(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+\tau) \frac{\sin(N+\frac{1}{2})\tau}{2\sin\frac{\tau}{2}} d\tau .$$

Démonstration. En remplaçant dans l'expression de S_N les coefficients a_0 , a_k et b_k par leurs définitions, on obtient après permutation des signes \sum et \int :

$$\begin{aligned} S_N(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N (\cos k\tau \cos kt + \sin k\tau \sin kt) \right\} d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \cos k(\tau-t) \right\} d\tau ; \end{aligned}$$

on effectue le changement de variable $u = \tau - t$, on tient compte de la 2π -périodicité de l'intégrand et de la propriété 6 (paragraphe III.3) ; on obtient alors en utilisant finalement le lemme 2 :

$$\begin{aligned}
 S_N(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{\pi-t}^{\pi-t} f(t+u) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \cos ku \right\} du \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+u) \frac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{1}{2}u} du . \quad \text{Q.E.D.}
 \end{aligned}$$

Théorème III.4.2. Soient $f \in C_{I,2\pi}^0$ possédant une dérivée continue par intervalles,

$$f \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad S_N(t) = a_0 + \sum_{k=1}^N (a_k \cos kt + b_k \sin kt);$$

alors pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(t) = \frac{1}{2} (f(t+0) + f(t-0)).$$

Démonstration. D'après le lemme 3, il suffit de démontrer :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t+\tau) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\tau}{\sin\frac{1}{2}\tau} d\tau = \frac{1}{2} f(t+0); \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(t+\tau) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\tau}{\sin\frac{1}{2}\tau} d\tau = \frac{1}{2} f(t+0). \quad (3)$$

Nous démontrons (2) pour $t = t_0$, (3) pouvant se traiter de façon analogue. En intégrant la relation (1) du lemme 2, on obtient

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\tau}{\sin\frac{1}{2}\tau} d\tau = \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{1}{2} f(t_0+0) = \frac{1}{2} f(t_0+0) \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\tau}{\sin\frac{1}{2}\tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t_0+\tau) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\tau}{\sin\frac{1}{2}\tau} d\tau;$$

(2) est donc équivalente à la relation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(t_0+\tau) - f(t_0+0)) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\tau}{\sin\frac{1}{2}\tau} d\tau = 0 \quad (4)$$

que nous allons démontrer ; puisque $f \in C_I^0$, la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(\tau) = \begin{cases} \frac{f(t_0 + \tau) - f(t_0 + 0)}{\sin \frac{\tau}{2}} & 0 < \tau < \pi \\ 0 & -\infty < \tau \leq 0, \tau \geq \pi \end{cases}$$

possède au plus un nombre fini de discontinuités toutes situées sur l'intervalle $[0, \pi]$; $g(0-0) = g(\pi+0) = 0$; d'après le théorème I.6.10, on a $g(\pi-0) = f(t_0 + \pi-0) - f(t_0 + 0)$, $g(\tau \pm 0) = (f(t_0 + \tau \pm 0) - f(t_0 + 0)) / \sin \frac{\tau}{2}$ $0 < \tau < \pi$; finalement, d'après le théorème I.6.10 et surtout d'après le théorème III.1.3 (c'est ici que l'on utilise l'hypothèse de l'existence d'une dérivée continue par intervalles), on a

$$g(0+0) = \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ \tau > 0}} \frac{f(t_0 + \tau) - f(t_0 + 0)}{\tau} \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ \tau > 0}} \frac{\tau}{\sin \frac{\tau}{2}} = 2 f'(t_0 + 0) ;$$

ainsi donc g est continue par intervalles ; d'après le lemme 1, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g(\tau) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\tau}{\sin \frac{\tau}{2}} d\tau = 0$$

relation qui est précisément équivalente à (4), Q.E.D.

Théorème III.4.3. Soit $f \in C_{I, 2\pi}^1$; alors la série de Fourier trigonométrique de f converge normalement et absolument ; elle converge également uniformément vers f .

Démonstration. La convergence absolue est une conséquence de la convergence normale (corollaire 3 du théorème I.8.2) ; la convergence uniforme vers f est une conséquence de la convergence normale (théorème I.9.2) et du théorème III.4.2. qui implique dans ce cas la convergence ponctuelle de la

série de Fourier vers f . Il reste donc à montrer la convergence normale ; soit $f \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$; il s'agit d'établir l'existence de nombres p_k et q_k tels que

$$1) |a_0| \leq p_0, |a_k \cos kt| \leq p_k, |b_k \sin kt| \leq q_k, k=1,2,3,\dots, t \in \mathbb{R}$$

$$2) \text{ la série } p_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (p_k + q_k) \text{ converge ;}$$

d'après le théorème III.4.1 $f' \sim \sum_{k=1}^{\infty} \{(kb_k) \cos kt + (-ka_k) \sin kt\}$;

le théorème III.2.7 appliqué à la série de Fourier de f' implique la convergence de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k^2 b_k^2 + k^2 a_k^2) ;$$

partant des inégalités

$$(k|a_k| - \frac{1}{k})^2 = k^2 a_k^2 - 2|a_k| + \frac{1}{k^2} \geq 0$$

$$(k|b_k| - \frac{1}{k})^2 = k^2 b_k^2 - 2|b_k| + \frac{1}{k^2} \geq 0$$

on obtient

$$2|a_k| \leq k^2 a_k^2 + \frac{1}{k^2} \equiv 2p_k, k = 1,2,\dots$$

$$2|b_k| \leq k^2 b_k^2 + \frac{1}{k^2} \equiv 2q_k, k = 1,2,\dots$$

en posant $p_0 = |a_0|$, on voit que la condition 1) est satisfaite ; la condition 2) l'est aussi puisque la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ est convergente.}$$

Théorème III.4.4. Dans $C_{I,2\pi}^0$ muni du produit scalaire

$$(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt, \text{ la suite orthogonale}$$

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots$$

est totale.

Démonstration. Soit $f \in C_{I,2\pi}^0$ et $\epsilon > 0$; il s'agit d'établir l'existence d'un entier N et de coefficients $a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$ tels que

$$\|f - \{a_0 + \sum_{k=1}^N a_k \cos kt + b_k \sin kt\}\| < \epsilon ;$$

soit M (théorème III.1.1) tel que $|f(t)| \leq M \quad t \in [-\pi, \pi]$; il existe $g \in C_I^1$ satisfaisant à la condition 1 du théorème III.1.5 et telle que $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - g(t)| dt < \epsilon^2/8M$; soit h 2π -périodique égale à g pour $-\pi \leq t < \pi$; puisque g est continue et puisque $g(-\pi) = g(\pi)$ (périodicité de f et condition 1 du théorème III.1.5), h est également continue (propriété 3, paragraphe III.3) ; on en conclut que $h \in C_{I,2\pi}^1$ et l'on aura

$$\begin{aligned} \|f-h\| &= \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} (f(t)-h(t))^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} (|f(t)|+|h(t)|) |f(t)-h(t)| dt \right\} \\ &\leq \left\{ 2M \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)-h(t)| dt \right\}^{\frac{1}{2}} < \epsilon/2 ; \end{aligned} \quad (4)$$

soit $h \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$; d'après le théorème III.4.3 cette série converge uniformément vers h , donc aussi en moyenne quadratique sur $[-\pi, \pi]$ (théorème III.1.6) ; posons $S_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$; il existe N tel que

$$\|h - S_N\| < \epsilon/2 ; \quad (5)$$

de (4) et (5) on obtient par l'inégalité triangulaire (théorème III.2.2)

$$\|f - S_N\| = \|(f-h) + (h - S_N)\| \leq \|f-h\| + \|h - S_N\| < \epsilon . \text{ Q.E.D.}$$

Les théorème III.4.4 et III.2.8 impliquent immédiatement le théorème qui suit.

Théorème III.4.5. Soient $f \in C_{I,2\pi}^0$, $f \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$,
 $S_N(t) = a_0 + \sum_{k=1}^N (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$; alors $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = f$ en
 moyenne quadratique sur $[-\pi, \pi]$.

Corollaire. On suppose que $f, g \in C_{I,2\pi}^0$ admettent la même série de Fourier trigonométrique. Alors $f = g$ p.p.

Démonstration. Le théorème III.4.5 affirme que la suite des sommes partielles de la série de Fourier commune converge en moyenne quadratique sur $[-\pi, \pi]$ à la fois vers f et vers g ; le théorème III.2.5 permet alors de conclure que $f = g$ p.p sur $[-\pi, \pi]$; à cause de la 2π -périodicité de f et g on aura $f = g$ p.p sur \mathbb{R} . Q.E.D.

Généralisation. Considérons l'espace $C_{I,2T}^0$ ($T > 0$) muni du semi-produit scalaire

$$(f, g)_T = \int_{-T}^T f(t)g(t)dt.$$

En utilisant les formules trigonométriques (9), (10), (11) du paragraphe III.2, on vérifie aisément que la suite

$$1, \cos \frac{\pi}{T} t, \sin \frac{\pi}{T} t, \cos 2\frac{\pi}{T} t, \sin 2\frac{\pi}{T} t, \cos 3\frac{\pi}{T} t, \dots$$

est une suite orthogonale et que

$$(1, 1)_T = 2T, (\cos k\frac{\pi}{T} t, \cos k\frac{\pi}{T} t)_T = (\sin k\frac{\pi}{T} t, \sin k\frac{\pi}{T} t)_T = T \quad k=1, 2, \dots;$$

si $f \in C_{I,2T}^0$ les coefficients de la série de Fourier de $f \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\frac{\pi}{T} t + b_k \sin k\frac{\pi}{T} t)$ sont donnés par

$$a_0 = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t)dt$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \cos k\frac{\pi}{T} t dt, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \sin k\frac{\pi}{T} t dt, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Les théorèmes III.4.1, III.4.2, III.4.3, III.4.4 et III.4.5 énoncés et démontrés pour le cas particulier $T = \pi$ se généralisent pour T quelconque. A titre d'exemple, démontrons : soit $f \in C_{I, 2T}^0$ possédant une dérivée continue par intervalles, $f \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k \frac{\pi}{T} t + b_k \sin k \frac{\pi}{T} t)$,

$$S_N(t) = a_0 + \sum_{k=1}^N (a_k \cos k \frac{\pi}{T} t + b_k \sin k \frac{\pi}{T} t) ;$$

alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(t) = \frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0))$.

A cet effet considérons la fonction $g(t) = f(\frac{T}{\pi} t)$; on vérifie que $g \in C_{I, 2\pi}^0$ et possède une dérivée continue par intervalles ; soit $g \sim \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt$,

$\sigma_N(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^N \alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt$; on vérifie, par un simple changement de variable dans la définition des coefficients de Fourier que $\alpha_0 = a_0$, $\alpha_k = a_k$, $\beta_k = b_k$, $k = 1, 2, \dots$. En utilisant le théorème III.4.2 on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(t) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N\left(\frac{\pi}{T} t\right) = \frac{1}{2}(g\left(\frac{\pi}{T} t + 0\right) + g\left(\frac{\pi}{T} t - 0\right)) \\ &= \frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0)) . \end{aligned}$$

III.5. Applications diverses. Théorème de Weierstrass

Théorème III.5.1. Soit C_I^0 muni du semi-produit scalaire
 $(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$; la suite orthogonale
 $1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots$ (1)

est totale.

Démonstration. On vérifie la propriété 3 du théorème
III.2.8. Soient $f \in C_I^0$, $f \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$,
 $S_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$. Soit (propriété 3,
paragraphe III.3) $g \in C_{I,2\pi}^0$ égale à f sur l'intervalle
 $[-\pi, \pi[$. La série de Fourier de g , considérée dans
 $C_{I,2\pi}^0$ muni du semi-produit scalaire $(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$,
par rapport à la suite (1) est identique à la série de
Fourier de f ; on a donc (théorème III.4.5) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - S_n(t))^2 dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} (g(t) - S_n(t))^2 dt = 0 \quad \text{Q.E.D.}$$

Théorème III.5.2. Soit C_I^0 muni du semi-produit scalaire
 $(f,g) = \int_0^{\pi} f(t)g(t)dt$; alors la suite orthogonale (exemple 7
du paragraphe III.2)

$$1, \cos t, \cos 2t, \cos 3t, \dots$$

est totale.

Démonstration. Soit $f \in C_I^0$, $\epsilon > 0$; il s'agit de montrer
l'existence d'un entier N et des coefficients a_0, a_1, \dots, a_N
tels que

$$\left(\int_0^{\pi} (f(t) - \sum_{k=0}^N a_k \cos kt)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon ;$$

soit (propriété 4, paragraphe III.3) $g \in C_{I,2\pi}^0$, paire et égale à f sur l'intervalle $[0,\pi]$; considérons la série de Fourier trigonométrique de g ; puisque g est paire c'est une série en cosinus: $g \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kt$; soit $S_n = \sum_{k=0}^n a_k \cos kt$; appliquons le théorème III.4.5:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} (g(t) - S_n(t))^2 dt = 0;$$

pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe N tel que

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} (g(t) - S_N(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon;$$

on aura alors

$$\left(\int_0^{\pi} (f(t) - S_N(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^{\pi} (g(t) - S_N(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} (g(t) - S_N(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

Q.E.D.

Théorème III.5.3. Soit C_I^0 muni du semi-produit scalaire $(f,g) = \int_0^{\pi} f(t)g(t)dt$; alors la suite orthogonale (exemple 7, paragraphe III.2)

$$\sin t, \sin 2t, \sin 3t, \dots$$

est totale.

Démonstration. La démonstration est analogue à celle du théorème précédent, la fonction g sera de classe $C_{I,2\pi}^0$, impaire et égale à f sur l'intervalle $]0,\pi[$.

Théorème III.5.4. (théorème de Weierstrass trigonométrique). Soit f continue 2π -périodique. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N et des coefficients $a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N$ tels que

$$\left| f(t) - a_0 - \sum_{k=1}^N (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \right| < \varepsilon \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \quad (2)$$

de plus, si f est paire, (2) peut être obtenue avec $b_1 = b_2 = \dots = b_N = 0$; si f est impaire, (2) peut être obtenue avec $a_0 = a_1 = a_2 \dots = a_N = 0$.

Remarque. Une fonction de la forme

$a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos kt + b_k \sin kt$ est appelée "polynôme trigonométrique". Le théorème III.5.4 peut s'énoncer de la façon suivante : si f est continue, 2π -périodique, il existe une suite de polynômes trigonométriques convergeant uniformément vers f . Le polynôme trigonométrique de la relation (2) ne sera pas en général la N -ième somme partielle de la série de Fourier de f .

Lemme 1. Soit f continue, 2π -périodique. Il existe une suite $[g_n]_{n=1}^{\infty} \subset C_{I,2\pi}^1$ convergeant uniformément vers f ; de plus si f est paire (impaire), on peut choisir des g_n paires (impaires) .

Démonstration. La démonstration s'inspire directement de celle du théorème III.1.5. Soient $h = \pi/n$, $t_i = ih$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; on pose

$$g_n(t) = f(t_i) + (t-t_i)(f(t_{i+1})-f(t_i))/h, t \in [t_i, t_{i+1}] ;$$

on vérifie immédiatement que $g_n \in C_{I,2\pi}^1$ et que g_n est paire ou impaire selon que f est paire ou impaire.

Soit $\omega(\delta)$ le module de continuité de la restriction de f à l'intervalle $[-\pi, \pi]$; pour $t \in [t_i, t_{i+1}] \subset [-\pi, \pi]$, on a

$$|f(t) - g_n(t)| = |(f(t) - f(t_i)) - (f(t_{i+1}) - f(t_i))(t - t_i)/h|$$

$$\leq |f(t) - f(t_i)| + |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \leq 2\omega(h) ;$$

on a $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta) = 0$ (théorème I.7.7 et I.7.8) ; soit $\varepsilon > 0$ donné ; il existe N tel que $\omega(h) < \varepsilon/2$ pour $n > N$;

on aura alors

$$|f(t) - g_n(t)| < \epsilon, \quad n > N, \quad t \in [-\pi, \pi];$$

la 2π -périodicité de la fonction $f(t) - g_n(t)$ implique que cette dernière relation est vraie pour tout $t \in \mathbb{R}$. Q.E.D.

Démonstration du théorème III.5.4. Soit f 2π -périodique, continue et soit $\epsilon > 0$. D'après le lemme 1, il existe $g \in C_{I, 2\pi}^1$ telle que $|f(t) - g(t)| < \epsilon/2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Soit $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt$ la série de Fourier trigonométrique de g ; il existe donc N tel que

$$|g(t) - \{a_0 + \sum_{k=1}^N (a_k \cos kt + b_k \sin kt)\}| < \epsilon/2$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$; on a alors pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$|f(t) - \{a_0 + \sum_{k=1}^N a_k \cos kt + b_k \sin kt\}| \leq |f(t) - g(t)| + |g(t) - \{ \}| < \epsilon;$$

si f est paire (impaire), on peut choisir g paire (impaire) dont la série de Fourier est alors une série en cosinus (en sinus). Q.E.D.

Théorème III.5.5. (théorème de Weierstrass).

Soit $f \in C^0([a, b])$; pour tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme p tel que

$$|f(x) - p(x)| < \epsilon \quad x \in [a, b].$$

Lemme 2. La fonction $T_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $T_n(x) = \cos(n \cdot \text{Arccos } x)$ est un polynôme de degré n (polynômes de Tschébycheff)

Démonstration. On procède par induction; pour $n = 0$ et $n = 1$, on a $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$; supposons le lemme 2 vrai pour $n \leq N$; on applique l'identité trigonométrique $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$ avec $\alpha = N \cdot \text{Arccos } x$ et $\beta = \text{Arccos } x$; on a :

$$T_{N+1}(x) = 2xT_N(x) - T_{N-1}(x),$$

ce qui montre que T_{N+1} est effectivement un polynôme de degré $N+1$. Q.E.D.

Démonstration du théorème III.5.5. Nous commençons par traiter le cas particulier $a = -1, b = 1$; soient $f \in C^0([-1,1])$, $\varepsilon > 0$; soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(t) = f(\cos t)$; h est continue, 2π -périodique, paire; d'après le théorème III.5.4, il existe N, a_0, a_1, \dots, a_N tel que

$$|h(t) - \sum_{k=0}^N a_k \cos kt| < \varepsilon, \quad t \in \mathbb{R};$$

en posant $t = \text{Arccos } x$ dans cette relation, on obtient

$$|f(x) - \sum_{k=0}^N a_k T_k(x)| < \varepsilon, \quad x \in [-1,1],$$

ce qui est le résultat cherché puisque (lemme 2)

$\sum_{k=0}^N a_k T_k(x)$ est un polynôme de degré N . Considérons

maintenant le cas général $f \in C^0([a,b])$; soit

$g \in C^0([-1,1])$ définie par $g(t) = f\left(\frac{(b-a)t+(b+a)}{2}\right)$;

d'après la première partie de la démonstration, il existe un polynôme q tel que

$$|g(t) - q(t)| < \varepsilon \quad t \in [-1,1];$$

en posant dans cette relation $t = \frac{2x-(b+a)}{b-a}$ on a

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon \quad x \in [a,b],$$

où $p(x) = q(t)$ est un polynôme de même degré que q . Q.E.D.

III.6. Séries de Fourier complexes.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ (ensemble des nombres complexes) et soient f_1 et $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (parties réelle et imaginaire de f) définies par $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Si f_1 et $f_2 \in C_I^0$, on pose

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f_1(t)dt + i \int_a^b f_2(t)dt ;$$

si f_1 et $f_2 \in C_I^0$ et possèdent une dérivée continue par intervalles, on pose

$$f'(t) = f_1'(t) + if_2'(t) .$$

Exemple : Calculons la dérivée de $f(t) = e^{iat}$, $a \in \mathbb{R}$;
on a

$$f(t) = \cos(at) + i\sin(at)$$

$$f'(t) = a(-\sin(at) + i\cos(at)) = ia e^{iat} .$$

La plupart des règles du calcul différentiel et intégral se généralisent pour les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} . Vérifions à titre d'exemple la règle d'intégration par parties.

Lemme 1. Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $f, g \in C_I^1$. Alors

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(t)g'(t)dt .$$

Démonstration. Posons $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$,
 $g(t) = g_1(t) + ig_2(t)$. On a

$$\begin{aligned} f'(t)g(t) &= (f_1'(t) + if_2'(t))(g_1(t) + ig_2(t)) \\ &= (f_1'(t)g_1(t) - f_2'(t)g_2(t)) + i(f_1'(t)g_2(t) + f_2'(t)g_1(t)) ; \end{aligned}$$

on applique à chacun des 4 produits de cette expression la formule d'intégration par parties pour les fonctions de classe C_I^1 (théorème III.1.4) et l'on obtient le résultat désiré.

Considérons $C_{I,2T}^0$ (fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}) muni du semi-produit scalaire $(f,g) = \int_{-T}^T f(t)g(t)dt$, ainsi que la suite orthogonale (voir fin du paragraphe III.3)

$$1, \cos \frac{\pi}{T} t, \sin \frac{\pi}{T} t, \cos \frac{2\pi}{T} t, \sin \frac{2\pi}{T} t, \dots \quad (1)$$

Soit $f \in C_{I,2T}^0$, $f \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k \frac{\pi}{T} t + b_k \sin k \frac{\pi}{T} t)$,

$S_N(t) = a_0 + \sum_{k=1}^N (a_k \cos k \frac{\pi}{T} t + b_k \sin k \frac{\pi}{T} t)$; les formules d'Euler permettent d'écrire

$$\begin{aligned} S_N(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^N \left\{ a_k \left(\frac{e^{ik\frac{\pi}{T}t} + e^{-ik\frac{\pi}{T}t}}{2} \right) + b_k \left(\frac{e^{ik\frac{\pi}{T}t} - e^{-ik\frac{\pi}{T}t}}{2i} \right) \right\} \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^N \left\{ \left(\frac{a_k - ib_k}{2} \right) e^{ik\frac{\pi}{T}t} + \left(\frac{a_k + ib_k}{2} \right) e^{-ik\frac{\pi}{T}t} \right\}; \end{aligned}$$

posons $C_0 = a_0$ (2)

$$C_k = \frac{a_k - ib_k}{2} \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

$$C_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

on a

$$S_N(t) = \sum_{k=-N}^N C_k e^{ik\frac{\pi}{T}t}.$$

Définition. Les coefficients C_k , $-\infty < k < \infty$, définis par (2), (3), (4) sont les coefficients de Fourier complexes de f relatifs à la suite (1). L'expression

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\frac{\pi}{T}t} \quad (5)$$

est la série de Fourier complexe de f relative à la suite (1); (5) signifie simplement que les C_k sont définis par (2), (3), (4).

Remarque. Pour exprimer des théorèmes de convergence relatifs à la série (5), il est nécessaire de revenir à l'expression de S_N . Par exemple (théorème III.4.3 généralisé pour des fonctions T -périodiques), si $f \in C_{I,2T}^1$, alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N C_k e^{ik\frac{\pi}{T}t} = f(t) \text{ uniformément.}$$

Théorème III.6.1. Soit $f \in C_{I,2T}^0$, $f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\frac{\pi}{T}t}$.

$$\text{Alors } C_k = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{-ik\frac{\pi}{T}t} f(t) dt, \quad -\infty < k < \infty.$$

Démonstration. Soit $f \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\frac{\pi}{T}t + b_k \sin k\frac{\pi}{T}t)$; on a (voir fin du paragraphe III.3) :

$$a_0 = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) dt, \quad a_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \cos k\frac{\pi}{T}t dt,$$

$$b_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \sin k\frac{\pi}{T}t dt;$$

partant de (2), (3) et (4), on a :

$$C_0 = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) dt$$

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) (\cos k\frac{\pi}{T}t - i \sin k\frac{\pi}{T}t) dt \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-ik\frac{\pi}{T}t} dt, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) (\cos(-k)\frac{\pi}{T}t + i \sin(-k)\frac{\pi}{T}t) dt \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-ik\frac{\pi}{T}t} dt, \quad k = -1, -2, -3, \dots \end{aligned}$$

Théorème III.6.2. Soient $f \in C_{I,2T}^m$, $f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\frac{\pi}{T}t}$;

alors pour $1 \leq j \leq m$ la série de Fourier complexe de $f^{(j)}$ s'obtient en dérivant terme à terme j fois la série de Fourier complexe de f , c'est-à-dire

$$f^{(j)} \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik\frac{\pi}{T})^j C_k e^{ik\frac{\pi}{T}t} .$$

Démonstration. Il suffit de traiter le cas $j = m = 1$, le cas général s'obtenant ensuite par induction. Soit donc $f \in C_{I,2T}^1$, $f' \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ik\frac{\pi}{T}t}$; on utilise le théorème III.6.1, le lemme 1 ainsi que la $2T$ -périodicité de f et de $e^{-ik\frac{\pi}{T}t}$.

$$\begin{aligned} d_k &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f'(t) e^{-ik\frac{\pi}{T}t} dt = \frac{1}{2T} \left\{ f(t) e^{-ik\frac{\pi}{T}t} \right\} \Big|_{-T}^T + \frac{1}{2T} (ik\frac{\pi}{T}) \int_{-T}^T f(t) e^{-ik\frac{\pi}{T}t} dt \\ &= (ik\frac{\pi}{T}) \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-ik\frac{\pi}{T}t} dt = ik\frac{\pi}{T} C_k, \quad -\infty < k < \infty \end{aligned}$$

Application. Soit $f \in C_{I,2T}^0$, $f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ik\frac{\pi}{T}t}$;

on s'intéresse aux solutions $X \in C_{I,2T}^n$ de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants réels :

$$X^{(n)}(t) + a_{n-1} X^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 X(t) = f(t) \quad \text{p.p.}; \quad (6)$$

supposons que $X \in C_{I,2T}^n$ soit une solution de cette équation et posons $X \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\frac{\pi}{T}t}$; on multiplie les deux membres de (6) par $\frac{1}{2T} e^{-ik\frac{\pi}{T}t}$ puis on intègre l'équation résultant sur l'intervalle $[-T, T]$; en tenant compte des théorèmes III.6.1 et III.6.2, on obtient :

$$(ik\frac{\pi}{T})^n C_k + a_{n-1} (ik\frac{\pi}{T})^{n-1} C_k + \dots + a_0 C_k = d_k, \quad \text{i.e.,}$$

$$P(ik\frac{\pi}{T}) C_k = d_k, \quad -\infty < k < \infty, \quad (7)$$

où $P(Z) = Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + \dots + a_0 Z$.

Supposons que $P(ik\frac{\pi}{T}) \neq 0$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ et considérons deux solutions X et $Y \in C_{I,2T}^n$ de (6); à cause de (7) X et Y admettrons la même série de Fourier complexe et par conséquent

(corollaire du théorème III.4,5), $X = Y$ p.p ; mais X et Y sont continues de sorte que $X(t) = Y(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Nous avons donc les résultats

- a) Si $P(ik\frac{\pi}{T}) \neq 0$ pour $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, alors (6) admet au plus une solution de classe $C_{I,2T}^n$;
- b) S'il existe k_0 entier tel que $P(ik_0\frac{\pi}{T}) = 0$ et tel que $d_{k_0} \neq 0$, alors (6) n'admet pas de solution de classe $C_{I,2T}^n$.

En fait, on peut prouver (ce que nous ne ferons pas ici) le résultat plus précis suivant : si $d_k = 0$ pour tout entier k tel que $P(ik\frac{\pi}{T}) = 0$, alors (6) possède au moins une solution (exactement une si $P(ik\frac{\pi}{T}) \neq 0$ pour tout entier k) ; soit alors $k_0, k_1, k_2, \dots, k_m$ les entiers k non négatifs pour lesquels $P(ik\frac{\pi}{T}) = 0$; si $X_0 \in C_{I,2T}^n$ est une solution particulière de (6), alors la solution générale de (6) de classe $C_{I,2T}^n$ est donnée par

$$X(t) = X_0(t) + \sum_{j=1}^m (a_j \cos(k_j \frac{\pi}{T} t) + b_j \sin(k_j \frac{\pi}{T} t))$$

où les a_j et b_j sont des coefficients arbitraires.

INDEX DES NOTATIONS

	Page		
ϵ, \emptyset	1	$\int_{\Gamma} \vec{v} \, d\vec{r}$	64
\forall	1	$\int_{\Gamma} \vec{v} \, d\vec{s}$	64
\exists, \nexists	1	$\int_{\Gamma} \vec{v} \wedge d\vec{r}$	84
\emptyset	1	$\iint_{\Sigma} f d\sigma$	70
A^C	1	$\iint_{\Sigma} \vec{v} d\vec{\sigma}$	73
$\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+$	1	$\iint_{\Sigma} \vec{v} d\sigma$	73
$[a,b], [a,b[,]a,b],]a,b[$	1	$\iint_{\Sigma} \vec{v} \wedge d\vec{\sigma}$	73
Sup C , inf C	6	$\iint_{\Sigma} f d\vec{\sigma}$	73
Sup f(G) , inf f(G)	7	$\omega(\Sigma)$	77
$a = \lim_{i \rightarrow \infty} a_i$	10	$\overrightarrow{\text{grad}}$	81
$\limsup_{i \rightarrow \infty} a_i ; \liminf_{i \rightarrow \infty} a_i$	10,11	$\overrightarrow{\text{rot}}$	88
\mathbb{R}^n	17	div	90
$ x $	17	Δ	90
$\ x\ $	141,142	$\vec{\nabla}$	94
$B(a,\rho)$	17	$f(a+0)$	129
\bar{A}	21	$f(a-0)$	129
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$	32	$f = g \text{ p.p.}$	130
$C^m(A)$	56	$\underline{0}$	139
$C^m(\bar{A})$	57	$f \sim \sum_{i \geq 1} C_i f_i$	144,146, 152,168.
C_I^0	129		
C_I^n	132		
$C_{I,T}^k$	149		
$\partial_x, \partial_y, \partial_z$	60		
$\frac{df}{ds}$	82		
$\int_{\Gamma} f ds$	62		
$\int_{\Gamma} f dx$	64		

INDEX TERMINOLOGIQUE

- A**
- absolument convergente (série-) . 41
 - accumulation (point d'-) 21
 - adhérence 21
 - aire d'un morceau de surface . . 70
 - Ampère (règle d'-) 95
 - angle solide 77
 - application bijective 1
 - injective 1
 - surjective 1
 - continue 29
 - arc, - fermé, - simple 66
 - arc lisse 61
- B**
- bijective (application -) 1
 - borne supérieure 6
 - inférieure 6
 - borné (ensemble -) 5,17
 - bornée (suite -) 9,24
 - (série -) 42
- C**
- Cauchy (critère de -) 41,49
 - (suite de -) 10,14
 - champ à flux conservatif
 - solénoïdal 91
 - conservatif 87
 - scalaire 60
 - vectoriel 60
 - coefficients de Fourier 144
 - de Fourier complexe 168
 - compact (ensemble -) 37
 - complémentaire 1
- C (suite)**
- connexe (ensemble -) 52
 - connexe (ensemble simplement -). 54
 - continuité 29
 - continuité uniforme 39
 - continuité par intervalles . . . 129
 - contour polygonal 52
 - convergente (suite -) 10,24
 - (série -) 41
 - (série absolument -) 41
 - convergence en moyenne quadra-
 - tique 137
 - en semi-norme 142
 - normale 50
 - ponctuelle(simple) 49
 - uniforme 49
 - coordonnée (surface, ligne) . . . 116
 - coordonnées curvilignes cylin-
 - driques 125
 - sphériques 127
 - orthogonales 115
 - coupure 5
 - curviligne (intégrale -) 62,66
- D**
- dénombrable 2
 - dérivée à droite 133
 - à gauche 133
 - continue par intervalles 132
 - dans une direction 82
 - distance (dans \mathbb{R}^n) 17
 - divergence 90
- E**
- égalité presque partout 130
 - ensemble régulier ($\subset \mathbb{R}^2$) 68

INDEX TERMINOLOGIQUE (suite)

E (suite)		L (suite)	
étoilé (ensemble -)	54	limite d'une suite	10,24
		d'une fonction ($\lim_{x \rightarrow a} f(x)$)	32
F		limite supérieure (lim sup) .	10
fermé (arc -)	66	limite inférieure (lim inf) .	10
(ensemble -)	18	lisse (arc -)	61
(surface)	74	(morceau de surface -) .	68
fermeture	21	longueur d'un arc	66
fonction continue	29		
de classe $C^m(A)$	56	M	
de classe $C^m(\bar{A})$	57	majorant	5
de classe C^n_I	132	majoré (ensemble -)	6
de classe $C^k_{I,T}$	149	(suite -)	9
uniformément continue.	39	minorant	5
frontière (et point -)	21	minoré (ensemble -)	6
		(suite -)	9
G		module de continuité	39
gradient	81	monotone croissante (suite -).	9
Green (formules de -)	110	morceau de surface	74
		à frontière	
H		multiple .	98
harmonique (champ -)	110	lisse...	68
		(aire d'un-) .	70
I		moyenne quadratique (convergence	
inégalité triangulaire	17,141	en -) .	137
infimum	6		
injection (application -)	1	N	
intégrale curviligne	62,66	naturels (nombres -)	1
de surface	70,75	nombre de Dedekind	5
L		normal (vecteur - orienté)	69
laplacien	90	normale (convergence -)	50
ligne de coordonnée	116	norme	141
		O	
		orienté (vecteur normal -)	69

INDEX TERMINOLOGIQUE (suite)

O (suite)

orthogonalité	143
ouvert (ensemble -)	18

P

périodicité	149
point frontière	18
d'accumulation	18
polynôme trigonométrique	164
produit scalaire	139
prolongement périodique	149

R

recouvrement ouvert	35
règle d'Ampère	95
régulier (ensemble - dans \mathbb{R}^2)	63
repère naturel	117
rotationnel	88

S

scalaire (champ -)	80
(produit -)	139
segment	52
série absolument convergente	41
convergente	41
bornée	42
double	46
de Fourier	144
de Fourier complexe	167
de Fourier trigonomé-	
trique	152
semi-norme	141
(convergence en -)	142
semi-produit scalaire	139

S (suite)

simple (arc -)	66
simplement connexe	54
solénoïdal (champ)	91
solide (angle -)	77
somme, sommes partielles d'une	
série	41
sous-suite	10,24
suite	9,24
bornée, majorée, minorée,	
monotone croissante	9,24
convergente	10,24
de Cauchy	10,24
orthogonale (finie)	143
totale	144
suprémum	6
surface de coordonnées	116
fermée	74
(intégrale de -)	70,75
(morceau de -)	74
(morceau de - lisse)	68
surjective (application -)	1

T

théorème de Bolzano-Weierstrass	16,27
critère de Cauchy	41,49
de la divergence	103
du gradient	102
du rotationnel	103
Green-Riemann	95
inégalité de Schwarz	140
inégalité triangulaire	17,141
max. et min. des fonct.	
harmoniques	113
Stokes	95
Weierstrass	165
Weierstrass trigonomé-	
trique	163

INDEX TERMINOLOGIQUE (suite)

U

uniformément continue (application-) 39

V

valeurs à droite 129

valeurs à gauche 60

vecteur normal orienté 69

vectorel (champ-) 60

voisinage 18

volume 100

volume à frontière multiple 104

BIBLIOGRAPHIE

1- BLANC Charles - Calcul différentiel et intégral
EPF Lausanne 1966

2- DIEUDONNE Jean - Eléments d'analyse 1
Gauthier-Villars Paris 1969

3- DIEUDONNE Jean - Calcul infinitésimal
Hermann Paris 1968

4- RUDIN Walter - Principles of Mathematical Analysis
Mc Graw-Hill Mexico 1965

5- SPIEGEL Murray R. - Vector analysis
Schaum New York 1959

6- TOLSTOV Georgi P. - Fourier series
Prentice-Hall Englewood Cliffs, N.J. 1962

Pour le chapitre I Notions de Bases, voir 1), 2), 3) et 4)

chapitre II Analyse vectorielle, voir 1), 4), et 5)

chapitre III Séries de Fourier, voir 4) et 6) .