EPFL - SMA
Prof. J.H. Maddocks
Prof. C.A. Stuart

Section: **PHYSIQUE**

ANALYSE III-IV

EXAMEN 15 juin 2009

Nom: **Prénom:**

INFORMATIONS:

- Durée de l'examen: de **14h15 à 18h00**.
- Aucun document n'est autorisé.
- Aucune machine n'est autorisée.
- Les réponses aux questions seront données sur le cahier agrafé.
- Les réponses qui ne seront pas rédigées de manière satisfaisante ne seront pas corrigées.

Question	**Points**
1	
2	
3	
4	
5	
6	
TOTAL	

Question 1. (15 Points)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le champ vectoriel défini par

$$f(x, y, z) = (\cos(y)\, e^z, -x\, \sin(y)\, e^z, x\, \cos(y)\, e^z)$$

$\overrightarrow{C}$ le segment de droite allant du point $(0, 0, 0)$ à $(1, 1, 0)$ et
$\overrightarrow{D}$ le segment de la parabole $x = y^2$ allant du point $(0, 0, 0)$ à $(1, 1, 0)$.

(a) Calculer les intégrales curvilignes

$$\int_{\overrightarrow{C}} f \cdot ds \text{ et } \int_{\overrightarrow{D}} f \cdot ds.$$

(b) Est-ce que f dérive d'un potentiel scalaire sur $\mathbb{R}^3$ (Justifier) ? Si oui, calculer tous les potentiels scalaires associés.

(c) Est-ce que f dérive d'un potentiel vecteur sur $\mathbb{R}^3$ (Justifier) ? Si oui, calculer un champ vectoriel A de la forme $A = (\alpha, 0, \beta)$ tel que $\nabla \wedge A = f$ sur $\mathbb{R}^3$.

Question 2. (20 points)

Soit $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < \sqrt{2} \text{ et } 0 < y^2 + z^2 < x^2\}$.

(a) Esquisser la région Ω.

Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le champ vectoriel

$$F(x, y, z) = (x, y, z^2) \text{ pour } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

(b) Enoncer le théorème de la divergence pour la fonction F et la région Ω, en précisant les champs de normales utilisés sur chaque partie du bord de Ω.

(c) Calculer le flux de F à travers la surface

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < \sqrt{2} \text{ et } x^2 = y^2 + z^2\}$$

dans le sens de x croissant.

(d) Introduire une fonction $G(x, y, z)$ et á l'aide du théorème de la divergence, calculer le volume de Ω par des intégrales de surface.

Question 3. (15 points)

Trouver une solution u du problème suivant

$$\begin{cases} \partial_x^2 u(x,y) + \partial_y^2 u(x,y) + \partial_x u(x,y) = 0 \text{ pour } \ 0 < x < \pi \quad \text{et} \ \ 0 < y < \pi, \\ u(x,0) = 0, \qquad u(x,\pi) = 0 \\ u(0,y) = 0, \qquad u(\pi,y) = \sin(y). \end{cases}$$

Question 4. (20 points)

(A) Déterminer toutes les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour les quelles la fonction

$$u(x, y) = e^{x^2+\lambda y^2} \cos(2xy)$$

est la partie réelle d'une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Ensuite trouver toutes les fonctions $f \in H(\mathbb{C})$ telles que $u(x, y) = Ref(x + iy)$ pour tout $x + iy \in \mathbb{C}$.

(B) Soient f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ et g une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ dont la série de Laurent autour de 0 est

$$g(z) = \sum_{k=-2}^{\infty} a_k z^k \text{ pour } z \neq 0 \text{ où } a_{-2} \neq 0.$$

(i) Exprimer $Rés(fg, 0)$ en termes de $f(0), f'(0)$ et les coefficients a_k.

(ii) Calculer la série de Taylor de la function $\frac{1}{1+z}$ autour de 0 et préciser son rayon de convergence.

(iii) Supposons que 0 soit un zéro de f d'ordre 2. Exprimer $Rés(\frac{1}{f}, 0)$ en termes des dérivées d'ordre 2 et 3 de f en 0. (*Indication :* Noter que pour z près de 0, on peut écrire

$$\frac{z^2}{f(z)} = \frac{1}{A\{1 + \rho(z)\}} \text{ où } A \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \rho(0) = 0 \text{ et } \rho \text{ est holomorphe.)}$$

Question 5. (20 points)

(i) Trouver tous les zéros de la fonction $\sinh z - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et préciser l'ordre de chaque zéro.

Rappel $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$; $\cos\frac{\pi}{3} = -\cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{3} = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pour $p \in \mathbb{R}$, on considère la droite $D(p) = \{x + ip : x \in \mathbb{R}\}$, orientée dans le sens de x croissant.

(ii) Montrer que les intégrales

$$I(0) = \int_{D(0)} \frac{z(z-2\pi i)}{\sinh z - i\frac{\sqrt{3}}{2}} dz \text{ et } I(2\pi) = \int_{D(2\pi)} \frac{z(z-2\pi i)}{\sinh z - i\frac{\sqrt{3}}{2}} dz$$

convergent absolument.

(iii) Trouver la constante c telle que $I(0) - I(2\pi) = c\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sinh x - i\frac{\sqrt{3}}{2}} dx$.

Pour $a, b \in \mathbb{C}$, soit $[a, b]$ le segment de droite entre a et b.

(iv) Pour $R > 0$, calculer

$$J(R) = \int_{C(R)} \frac{z(z-2\pi i)}{\sinh z - i\frac{\sqrt{3}}{2}} dz$$

où $C(R)$ est le rectangle
$[-R, R] \cup [R, R + 2\pi i] \cup [R + 2\pi i, -R + 2\pi i] \cup [-R + 2\pi i, -R]$
orienté positivement.

(v) Montrer que

$$\lim_{R\to\infty} J(R) = I(0) - I(2\pi)$$

et calculer ainsi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sinh x - i\frac{\sqrt{3}}{2}} dx.$$

Question 6. (10 points)

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fonctions continues telles que $f, g, \hat{f}, \hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ où $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont les transformées de Fourier de f et g.

Posons

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx \text{ et } B = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)d\xi.$$

Pour une constante $c > 0$ et une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on définit $h_c : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$h_c(x) = ch(cx) \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

Exprimer les quantités suivantes en termes de A, B et $\hat{f}(\xi)$.

(i) $\hat{g}(0)$.

(ii) $f(0)$.

(iii) $\lim_{c\to\infty} \widehat{(g_c)}(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

(iv) $\lim_{c\to\infty} \widehat{g_c * f}(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

(v) $\lim_{c\to\infty} \widehat{(g_c f)}(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Rappel

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x)dx \text{ et } g * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)f(y)dy.$$