EPFL - IMB
Prof. J.H. Maddocks

Section: **PHYSIQUE**

ANALYSE III

EXAMEN

11 janvier 2011

Nom:	**Prénom:**

INFORMATIONS:

- Durée de l'examen: de **12h15 à 14h15**.
- Aucun document n'est autorisé.
- Aucune machine n'est autorisée.
- Les réponses aux questions seront données sur le cahier agrafé.
- Les réponses qui ne seront pas rédigées de manière satisfaisante ne seront pas corrigées.

Question	**Points**
1	
2	
3	
TOTAL	

Question 1.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine limité par la boucle du folium de Descartes, donnée par $x^3 + y^3 = 3axy$, $a > 0$, $x, y \geq 0$.

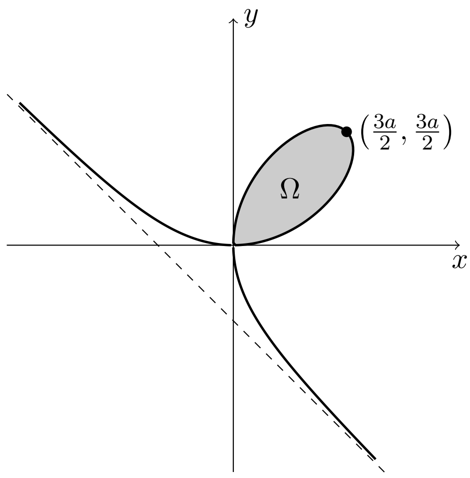

Figure 1: Folium de Descartes.

(i) Montrer que $(x, y) = \left(\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3}\right)$, $0 < t < +\infty$ est une représentation paramétrique de $\partial\Omega$ et indiquer brièvement les raisons pourquoi elle est régulière. Indication: poser $y = tx$.

(ii) Enoncer le Théorème de Green et l'utiliser pour calculer l'aire de Ω par une intégrale de ligne.

Question 2.

(i) Montrer qu'un champ vectoriel sur $\mathbb{R}^3$ de la forme $f(x, y, z) = (0, 0, g(x, y))$ dérive d'un potentiel vecteur et trouver un potentiel vecteur pour f.

(ii) Calculer le flux du champ vectoriel $f = \left(0, 0, \sqrt{x^2 + y^2}\right)$ à travers la surface de revolution

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - (x^2 + y^2)^4 \text{ et } z > 0\} \tag{1}$$

avec le champ de normales $N = (N_x, N_y, N_z)$ où $N_z > 0$.

Dans cette question, un peut de réflexion vous aidera à éviter de longs calculs. Vous pouvez (et devriez) utiliser n'importe quel théorème du cours (plusieurs fois si nécessaire), à condition de l'énoncer correctement.

Question 3.

Rappel:

Soient $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ les coordonnées cartésiennes, $u(x_1, x_2, x_3)$ une fonction scalaire et $f(x_1, x_2, x_3)$ un champ vectoriel. Pour des coordonnées curvilignes orthogonales $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ telles que $\mathbf{x} = (x_1(\mathbf{w}), x_2(\mathbf{w}), x_3(\mathbf{w}))$ introduire les fonctions $v(w_1, w_2, w_3) := u(x_1, x_2, x_3)$ et $g(w_1, w_2, w_3) := f(x_1, x_2, x_3)$. Alors

$$\nabla u = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{h_k} \mathbf{e}_{w_k} \partial_{w_k} v$$

et

$$\nabla \cdot f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{k=1}^{3} \partial_{w_k} \left(h_1 \, h_2 \, h_3 \, \frac{g_k}{h_k} \right),$$

où:

$$h_i = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial w_i} \right|,$$

$$\mathbf{e}_{w_i} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial w_i}.$$

(i) Montrer que les coordonées cylindriques $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$ sont orthogonales. Calculer les formes explicites des h_r, h_θ, h_z et $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_z$ dans le cas des coordonées cylindriques. Montrer que, pour une fonction scalaire $v(r, \theta, z) := u(x, y, z)$,

$$\Delta u = \partial_r^2 v + \frac{1}{r}\partial_r v + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 v + \partial_z^2 v.$$

(ii) Utiliser la méthode de séparation des variables pour trouver la solution du problème

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & \text{pour} \quad (x,y) \in \Omega, \\ u(x,0) = 0, & 1 \le x \le 2, \\ u_x(0,y) = 0, & 1 \le y \le 2, \\ u(x,y) = 0, & \text{pour } x^2 + y^2 = 1, \quad x \ge 0, y \ge 0, \\ u(x,y) = 4y, & \text{pour } x^2 + y^2 = 4, \quad x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$$

où $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4, \quad x \ge 0, y \ge 0\}$.