EPFL - IMB
Prof. J.H. Maddocks

Section: **PHYSIQUE**

ANALYSE III

EXAMEN

16 janvier 2012

Nom:	**Prénom:**

INFORMATIONS:

- Durée de l'examen: de **12h15 à 14h15**.
- Aucun document n'est autorisé.
- Aucune machine n'est autorisée.
- Les réponses aux questions seront données sur le cahier agrafé.
- Les réponses qui ne seront pas rédigées de manière satisfaisante ne seront pas corrigées.

Question	**Points**
1	
2	
3	
TOTAL	

Question 1. (30 Points)

a) Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ le morceau de sphère donné par les relations suivantes

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } x \tan \Theta > y > 0\}$$

où $0 < \Theta < \pi/2$ est un paramètre donné (S représente la peau d'un morceau d'orange). Pour la fonction de densité par unité de surface $\rho(x, y, z) = |z|$, calculer en fonction du paramètre Θ:

i) la masse totale $M := \int_S \rho dS$,

ii) la position du centre de masse $p := \frac{1}{M}(\int_S x\rho dS, \int_S y\rho dS, \int_S z\rho dS)$.

b) Soit V un domaine régulier simple dans $\mathbb{R}^3$. Vérifier le formule de Green dans $\mathbb{R}^3$,

$$\int_V \{v\Delta u - u\Delta v\} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \int_{\partial V} \left\{ v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n} \right\} \mathrm{d}\sigma,$$

pour tout u, $v \in C^2(\bar{V})$, où Δ est le Laplacien et $\dfrac{\partial}{\partial n}$ est la dérivée dans la direction de la normale extérieure à V sur ∂V.

N.B. Vous pouvez utiliser sans preuve tous les théorèmes du cours, cependant vous devez les énoncer clairement et définir tous les termes y apparaissant.

Question 2. (30 Points)

a) Utiliser la méthode de séparation de variables pour déduire une solution sous la forme d'une série infinie au problème aux conditions initiales et aux bords pour l'équation du télégraphe

$$u_{tt} + 2\alpha u_t + \alpha^2 u = c^2 u_{xx},$$

où $\alpha \geq 0$ et $c > 0$ sont des constantes. On donne les conditions initiales

$$u(x,0) = \phi(x), \;\; 0 < x < L,$$
$$u_t(x,0) = \psi(x), \;\; 0 < x < L,$$

et les conditions aux bords suivantes

$$u(0,t) = u(L,t), \;\; u_x(0,t) = u_x(L,t), \;\; \forall\; t > 0.$$

Où les fonctions C^1-par-morceaux $\phi(x)$ et $\psi(x)$ sont données en termes de séries de Fourier par

$$\phi \sim b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{2\pi}{L} nx,$$
$$\psi \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi}{L} nx.$$

b) Discuter l'existence et la valeur de la limite $\lim_{t\to\infty} u(\frac{L}{2}, t)$ en fonction du paramètre α.

Question 3. (40 Points)

A) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert, $\mathrm{S} \subset \Omega$ une nappe régulière avec bord et γ une paramétrisation du bord ∂S.

1) Montrer que
$$\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot dl = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot dl = 0$$
pour tous champs vectoriels $\mathbf{F} \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ qui ont la propriété que
$$(\nabla \wedge \mathbf{F})(q) = 0 \ , \ \forall q \in S.$$
N.B. Vous pouvez utiliser sans preuve tous les théorèmes du cours, cependant vous devez les énoncer clairement et définir tous les termes y apparaissant.

2) Soit $\mathbf{F} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ un champ vectoriel.

   i. Dans le cas où Ω est *simplement connexe*, donner un théorème dont l'énoncé donnent des conditions nécessaires et suffisantes pour que $\mathbf{F}$ admette un potentiel *scalaire* sur Ω.

   ii. Dans le cas où Ω est seulement *connexe*, donner un théorème dont l'énoncé donnent des conditions nécessaires et suffisantes pour que $\mathbf{F}$ admette un potentiel *scalaire* sur Ω.

   Attention les théorèmes cités en i. *et* ii. *doivent être différents.*

B) Soit
$$\Omega_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 < 25\}$$
et
$$\Omega_2 = \{(x, y, z) \in \Omega_1 |\ x^2 + y^2 > 4\},\ \Omega_2 \subset \Omega_1$$

1) Pour les champs vectoriels $\mathbf{F}$ suivants, discuter l'existence de potentiels scalaires sur Ω_1 puis sur Ω_2. Donner ces potentiels dans les cas où ils existent.

   i. $\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x(y^4 + z) \\ e^x \cos(yz) \end{pmatrix}$ avec $(x, y, z) \in \Omega_i \quad i = 1, 2.$

   ii. $\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} e^{-y}\cosh(x)(y^2 + z^4) \\ e^{-y}\sinh(x)(2y - y^2 - z^4) \\ e^{-y}\sinh(x)4z^3 \end{pmatrix}$ avec $(x, y, z) \in \Omega_i \quad i = 1, 2.$

2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une constante. On définit le champ vectoriel
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{1}{(x-1)^2 + y^2} \begin{pmatrix} y \\ -(x-1) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{(x+1)^2 + y^2} \begin{pmatrix} y \\ -(x+1) \\ 0 \end{pmatrix}$$
avec $(x, y, z) \in \Omega_i \quad i = 1, 2.$

   i. Pour chaque domaine Ω_1 et Ω_2, vérifier si le champ vectoriel $\mathbf{F}$ est bien défini. Pour les cas où il est bien défini calculer le valeur du rotationnel $(\nabla \wedge \mathbf{F})$.

   ii. On considère à présent l'ensemble
$$S = \{(x, y, z) |\ x \in [-3; 3], y \in [-3; 3] \text{ et } z = 0\}$$
   et on définit le chemin fermé C par $C = \partial S$ (C est le bord d'un carré centré sur l'origine, d'arrêtes de longueur 6 et contenu dans le plan $z = 0$. Noter que S n'est pas contenu dans Ω_2 mais que C l'est).

Montrer que l'intégrale de chemin

$$\int_C \mathbf{F} \cdot dl = \pm 2\pi(1+\lambda),$$

où le signe correspond aux deux orientations possibles choisis sur le chemin.
Pour montrer ce résultat les identités suivantes devraient vous être utiles:

* $\frac{d}{d\xi} \arctan(\xi/a) = a/(a^2+\xi^2) \quad \forall a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\ \forall \xi \in \mathbb{R}$
* $\arctan(\xi) = -\arctan(-\xi)\ \ \forall \xi \in \mathbb{R}$
* $\arctan \xi + \arctan(1/\xi) = \pi/2\ \forall \xi \in \mathbb{R}$

iii. En utilisant la partie [ii.], montrer qu'il existe un potentiel scalaire pour le champ vectoriel $\mathbf{F}$ si et seulement si $\lambda = -1$ et calculer ce potentiel.