EPFL Section: **PHYSIQUE**
Prof. J.H. Maddocks

ANALYSE III

EXAMEN

21 janvier 2013

Nom:	**Prénom:**

INFORMATIONS:

- Durée de l'examen: de **12h15 à 14h30**.
- Aucun document n'est autorisé.
- Aucune machine n'est autorisée.
- Les réponses aux questions seront données sur le cahier agrafé et vous pouvez utiliser les rectos et versos de toutes les pages.
- Ne dégrafer aucune page du cahier.
- Si vous avez utilisé des feuilles supplémentaires pour la résolution d'un exercice, *assurez vous qu'un assistant les agrafe au cahier lorsque vous rendez votre examen.*
- Les réponses qui ne seront pas rédigées de manière satisfaisante ne seront pas corrigées.

Question	Points
1	
2	
3	
TOTAL	

Vous pouvez utiliser sans preuve tous les théorèmes du cours, cependant vous devez les énoncer clairement et définir tous les termes y apparaissant. En particulier, ceci vous permettra *souvent* d'éviter de longs et pénibles calculs ou développements.

Question 1. (35 Points)

On considère le domaine régulier

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x > 0, y > 0 \text{ et } 0 < z < 1 - x^2 - y^2 \right\},$$

et la nappe (surface) régulière

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x > 0, y > 0, z > 0 \text{ et } z = 1 - x^2 - y^2 \right\}.$$

1. Esquisser le domaine Ω et la nappe S.

2. Calculer la masse M et le centre de masse p_M de Ω pour une densité de masse par unité de volume donné par
$$\rho_V(x, y, z) = z.$$
De plus, le centre de masse p_M de Ω est-il à l'intérieur ou à l'extérieur de Ω? Pourquoi en est-il ainsi?

3. Calculer la masse m et le centre de masse p_S de S pour une densité de masse par unité de surface donné par
$$\rho_S(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{5 - 4z}}.$$
De plus, considérons le plan passant par les points $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, le centre de masse p_S de S est-il en dessous de ce plan, en dessus de ce plan et en dessous de S ou en dessus de S? Pourquoi en est-il ainsi?

4. Soit le champ vectoriel $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définit par
$$F(x, y, z) = \nabla \wedge \begin{pmatrix} xyz \\ xyz + x \\ xyz \end{pmatrix}.$$
Calculer le flux de F au travers de S dans la direction de croissance de z.

Question 2. (30 Points)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'ensemble ouvert définit par

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 > 1\right\}.$$

A) Pour chacun des champs vectoriels suivants, discuter l'existence de potentiel scalaire <u>et</u> l'existence de potentiel vectoriel sur le domaine Ω. Dans les cas où ils existent, donner ces potentiels dans une forme la plus générale possible.

i. $F_1 : \Omega \to \mathbb{R}^3$ défini par $F_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} (x^2+y^2)\sin z \\ (x^2+y^2)\cos z \\ z^4 \end{pmatrix}$

ii. $F_2 : \Omega \to \mathbb{R}^3$ défini par $F_2(x,y,z) = \frac{2}{x^2+y^2+z^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

iii. $F_3 : \Omega \to \mathbb{R}^3$ défini par $F_3(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha x - \beta y^2 \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta > 0$ des constantes données

B) Soient $F_2 : \Omega \to \mathbb{R}^3$ et $F_3 : \Omega \to \mathbb{R}^3$ les champs vectoriels définis ci-dessus. Soit $\overrightarrow{C}$ le bord du carré de sommet $\{(5,-5,0),(5,5,0),(-5,5,0),(-5,-5,0)\}$ orienté positivement par rapport au vecteur $(0,0,1)$; et soit (S,N) la nappe orientée définie par $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 = 1\right\}$ et N son champ de normales unitaires extérieures.

Donner la valeur des intégrales suivantes <u>en faisant peu ou pas de calculs</u>, mais <u>en justifiant de manière claire votre raisonnement</u>:

i. $\int_{\overrightarrow{C}} F_2 \cdot dl$

ii. $\int_{\overrightarrow{C}} F_3 \cdot dl$

iii. $\int_{(S,N)} F_2 \cdot d\sigma$

iv. $\int_{(S,N)} F_3 \cdot d\sigma$

Question 3. (35 Points)

A) Soient $L > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ des grandeurs données et $u :]0, L[\times]0, \infty[\to \mathbb{R}$ avec $(x, t) \mapsto u(x, t)$ une fonction à valeurs réelles.

En utilisant la méthode de séparation de variables, trouver une solution du problème aux conditions de bords et aux conditions initiales suivant:

$$\begin{cases} \partial_x^2 u(x,t) - 2\alpha \partial_x u(x,t) = \partial_t u(x,t), \ \forall (x,t) \in \,]0,L[\times]0,\infty[\\ u(0,t) = 0 \text{ et } u(L,t) = 0, \ \forall t \in \,]0,\infty[\\ u(x,0) = 5e^{\alpha x} \sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right) + 8e^{\alpha x} \sin\left(\frac{5\pi}{L}x\right), \ \forall x \in \,]0,L[\end{cases}$$

B) Supposons à présent que l'on cherche à résoudre le cas général

$$(P) \begin{cases} \partial_x^2 u(x,t) - 2\alpha \partial_x u(x,t) = \partial_t u(x,t), \ \forall (x,t) \in \,]0,L[\times]0,\infty[\\ u(0,t) = 0 \text{ et } u(L,t) = 0, \ \forall t \in \,]0,\infty[\\ u(x,0) = \phi(x), \ \forall x \in \,]0,L[\end{cases}$$

où $\phi \in L^2(0, L)$ est une fonction donnée.

(a) Supposons que $\alpha = 0$. Expliquer comment votre résolution du point A) doit être modifiée pour obtenir une solution du problème (P) de la forme

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(x,t).$$

De plus, donner explicitement les fonctions $u_n(x, t)$ et des expressions pour calculer les coefficients c_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Même question que dans (a) mais pour $\alpha \neq 0$.