EPFL
Prof. J.H. Maddocks

Section: **PHYSIQUE**

ANALYSE III

EXAMEN 14 janvier 2014

Nom: **Prénom:**

INFORMATIONS:

- Durée de l'examen: de **12h15 à 15h15**.
- Aucun document n'est autorisé.
- Aucune machine n'est autorisée.
- Les réponses aux questions seront données sur le cahier agrafé, et vous pouvez utiliser les rectos et versos de toutes les pages.
- Ne dégrafer aucune page du cahier.
- Si vous avez utilisé des feuilles supplémentaires pour la résolution d'un exercice, *assurez vous qu'un assistant les agrafe au cahier lorsque vous rendez votre examen.*
- Les réponses qui ne seront pas rédigées de manière compréhensible ne seront pas corrigées.
- **Vous pouvez utiliser sans preuve tous les théorèmes du cours, cependant vous devez les énoncer clairement et définir tous les termes y apparaissant**. En particulier, ceci vous permettra *souvent* d'éviter de longs et pénibles calculs ou développements.

Question	Points
1	
2	
3	
TOTAL	

Question 1. (40 Points)

Remarque préliminaire: Dans l' évaluation des intégrales de la forme $\int_a^b g(s)ds$*, il est suffisant d'écrire* $\int_a^b g(s)ds = G(s)|_a^b$ *où la fonction* $G(s)$ *est* <u>*explicitement*</u> *donnée .*

On considère la nappe (surface)

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = z^4, y > 0 \text{ et } h > z > 1\right\}$$

où $h > 1$ est donné.

1. Esquisser la nappe S et donner un domaine Ω tel que $S = \operatorname{Im} \alpha$ où l'application $\alpha : \Omega \to S$ est définie par
$$\alpha(\theta, z) = \begin{pmatrix} z^2 \cos\theta \\ z^2 \sin\theta \\ z \end{pmatrix}.$$
De plus, montrer brièvement que α est un homéomorphisme, i.e. α est continue et il existe une application inverse $\alpha^{-1} : S \to \Omega$ qui est aussi continue.

2. Donner le champ de normale unitaires $N(x, y, z) = (N_1, N_2, N_3)(x, y, z)$ à S tel que la troisième composante du champ N soit négative, i.e. $N_3(x, y, z) < 0$ pour tous $(x, y, z) \in S$, sous les deux formes suivantes:

   i. $N_\alpha(\theta, z) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ où $N_\alpha := N \circ \alpha$

   ii. $N(x, y, z) : S \to \mathbb{R}^3$.

3. Calculer la masse m de S pour une densité de masse par unité de surface donné par
$$\rho(x, y, z) = \frac{1}{4z}.$$

4. Calculer la valeur de l'intégrale de chemin
$$\int_{\partial S} g \, dl$$
où $g(x, y, z) = \sqrt{1 + 4z^2}$.

5. Calculer le flux du champ
$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z^2 \end{pmatrix}$$
sur S dans la direction du champ N défini en 2.

6. Supposons que l'on oriente le chemin ∂S positivement par rapport au champ de normales N et notons $T : \partial S \to \mathbb{R}^3$ le champ de tangentes unitaires qui respectent cette orientation

   a) Enoncer le théorème de Stokes pour la nappe orientée (S, N)

   b) En utilisant le théorème de Stokes, montrer la formule d'intégration par parties suivante
$$\int_S < f \wedge N, \nabla u > d\sigma = \int_{\partial S} u < f, T > \, dl - \int_S u < \nabla \wedge f, N > d\sigma$$
pour $u \in C^1(V)$ et $f \in C^1(V, \mathbb{R}^3)$ où V est ouvert et $\bar{S} \subset V$.

7. Calculer le flux du champ $\nabla \wedge H$ sur S dans la direction du champ N (pour la nappe S définie en 1. et le champ N défini en 2.) où le champ H est défini par

$$H(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y\ln(\sqrt{z+1}) \\ x\ln(\sqrt{z+1}) \\ \sin(e^z) \end{pmatrix}.$$

8. Soit $V = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 < \frac{1}{2}\}$. Montrer qu'il existe un potentiel scalaire pour

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x(e^z - e) \\ 0 \\ x^2 e^z \end{pmatrix}$$

sur V et calculer

$$\int_S < f \wedge N, \nabla u > d\sigma$$

pour $u(x,y,z) = \frac{y^2}{x^2+y^2}$.

Question 2. (30 Points)

a) Soit $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

calculer, directement en coordonnées cartésiennes, l'expression des champs $\nabla f(x,y,z)$ et $\triangle f(x,y,z)$.

b) Soit $V \subset \mathbb{R}^3$ un domaine régulier, en utilisant le théorème de la divergence, montrer que, pour tous champ $v, u \in C^2(\bar{V})$,

$$\int_V \{v\triangle u - u\triangle v\}\, dxdydz = \int_{\partial V} \left\{ v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n} \right\} d\sigma$$

où $\frac{\partial}{\partial n}$ dénote la dérivée dans la direction de la normale unitaire extérieure.

c) Notons respectivement

$$B(r) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 < r^2\} \text{ et } S(r) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 = r^2\}$$

la boule de rayon r et la sphère de rayon r pour $r > 0$, et soit $g \in C^2(\bar{B}(r))$ une fonction harmonique sur $\bar{B}(r)$, i.e. $\triangle g = 0$ sur $\bar{B}(r)$.

i. Soit $\epsilon > 0$. En utilisant a) et b) sur le domaine $V = B(r) \setminus B(\epsilon)$ montrer que $\forall \epsilon$, avec $0 < \epsilon < r$, on a l'égalité

$$\frac{1}{r^2}\int_{S(r)} g d\sigma = \frac{1}{\epsilon^2}\int_{S(\epsilon)} g d\sigma$$

ii. De plus, montrer que

$$\frac{1}{4\pi r^2}\int_{S(r)} g d\sigma = g(0)$$

Remarque: Ceci montre que la valeur d'une fonction harmonique en un point peut s'obtenir en calculant la valeur moyenne de cette fonction sur une sphère de rayon quelconque centrée en ce point.

Question 3. (30 Points)

Utiliser la méthode de séparation de variables pour exprimer la solution des problèmes suivants comme série (possiblement infinie) et donner l'expression des coefficients de cette série (sous forme d'intégrales ou explicitement).

Soient $V =]0,\pi[\times]0,\pi[\times]0,\infty[$ et $\phi, \psi \in C^\infty(]0,\pi[)$. Noter qu'ici on définit l'opérateur de Laplace par $\triangle u(x,y,t) := \partial_x^2 u(x,y,t) + \partial_y^2 u(x,y,t)$.

A) L'équation de la chaleur en dimension 1:

$$\begin{cases} \partial_x^2 u(x,t) = \partial_t u(x,t),\ \forall (x,t) \in \ ]0,\pi[\times]0,\infty[\\ \partial_x u(0,t) = 0 \text{ et } \partial_x u(\pi,t) = 0,\ \forall t \in \ ]0,\infty[\\ u(x,0) = \phi(x),\ \forall x \in \ ]0,\pi[\end{cases}$$

B) L'équation de la chaleur en dimension 2:

$$\begin{cases} \triangle u(x,y,t) = \partial_t u(x,y,t),\ \forall (x,y,t) \in \ V \\ \partial_x u(0,y,t) = 0 \text{ et } \partial_x u(\pi,y,t) = 0,\ \forall t \in \ ]0,\infty[\text{ et } \forall y \in \ ]0,\pi[\\ \partial_y u(x,0,t) = 0 \text{ et } \partial_y u(x,\pi,t) = 0,\ \forall t \in \ ]0,\infty[\text{ et } \forall x \in \ ]0,\pi[\\ u(x,y,0) = \phi(x),\ \forall x \in \ ]0,\pi[\text{ et } \forall y \in \ ]0,\pi[\end{cases}$$

C) L'équation d'onde en dimension 2:

$$(P) \begin{cases} \triangle u(x,y,t) = \partial_t^2 u(x,y,t),\ \forall (x,y,t) \in \ V \\ \partial_x u(0,y,t) = 0 \text{ et } \partial_x u(\pi,y,t) = 0,\ \forall y \in \ ]0,\pi[\text{ et } \forall t \in \ ]0,\infty[\\ \partial_y u(x,0,t) = 0 \text{ et } \partial_y u(x,\pi,t) = 0,\ \forall x \in \ ]0,\pi[\text{ et } \forall t \in \ ]0,\infty[\end{cases}$$

avec la condition initiale suivante

$$\begin{cases} u(x,y,0) = 0,\ \forall (x,y) \in \ ]0,\pi[\times]0,\pi[\\ \partial_t u(x,y,0) = \psi(y),\ \forall (x,y) \in \ ]0,\pi[\times]0,\pi[\end{cases}$$

D) L'équation d'onde en dimension 2: le problème (P) avec la condition initiale suivante

$$\begin{cases} u(x,y,0) = \cos(2x)\cos(y),\ \forall (x,y) \in \ ]0,\pi[\times]0,\pi[\\ \partial_t u(x,y,0) = 0,\ \forall (x,y) \in \ ]0,\pi[\times]0,\pi[\end{cases}$$