EPFL
Prof. John H. Maddocks

Section : **PHYSIQUE**

ANALYSE III

EXAMEN

14 janvier 2016

Nom :	**Prénom :**

INFORMATIONS :

— Durée de l'examen : de **8h15 à 11h15**.
— Aucun document n'est autorisé.
— Aucune machine n'est autorisée.
— Les réponses aux questions seront données sur le cahier agrafé, et vous pouvez utiliser les rectos et versos de toutes les pages.
— Ne dégrafer aucune page du cahier.
— Si vous avez utilisé des feuilles supplémentaires pour la résolution d'un exercice, *assurez vous qu'un assistant les agrafe au cahier lorsque vous rendez votre examen.*
— Les réponses qui ne seront pas rédigées de manière compréhensible ne seront pas corrigées.
— **Vous pouvez utiliser sans preuve tous les théorèmes du cours, cependant vous devez les énoncer clairement et définir tous les termes y apparaissant**. En particulier, ceci vous permettra *souvent* d'éviter de longs et pénibles calculs ou développements.
— Formules trigonométriques : $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ et $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$.

Question	Points
1	
2	
3	
TOTAL	

1.

Question 1 (20 points)

a) Soient $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ le champ vectoriel $\mathbf{g}(x, y) := (y, xy - y)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\vec{C}$ la droite allant du point $(0, 0)$ au point $(1, 1)$ et $\vec{D}$ le segment de la parabole $y = x^2$ allant de $(0, 0)$ à $(1, 1)$. Calculez les deux intégrales curvilignes

$$\int_{\vec{C}} \mathbf{g} \cdot ds \qquad \text{et} \qquad \int_{\vec{D}} \mathbf{g} \cdot ds.$$

Y a-t-il un potentiel scalaire pour le champ vectoriel $\mathbf{g}$? Justifiez votre réponse et si oui, donnez le potentiel scalaire.

b) Pour tout α, $\beta \in \mathbb{R}$, soit $\mathbf{G}(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le champ vectoriel donné par

$$\mathbf{G}(x, y, z) := (\alpha \cos(2x + y - z), \beta \sin(x + y) \sin(x - z), - \cos(x + y) \cos(x - z)).$$

Pour quelles valeurs de α et β existe-t-il un potentiel scalaire pour $\mathbf{G}$ sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ simplement connexe (et non dégénéré, c'est-à-dire que son volume est strictement positif) ? Justifiez votre réponse et trouvez les potentiels scalaires lorsqu'ils existent.

Question 2 (40 points)

a) Enoncez le théorème de la divergence pour un champ vectoriel $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1 et un domaine régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ dont le bord est $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} S_i$, où chaque S_i est une nappe régulière avec bord.

b) Enoncez le théorème de Stokes pour une nappe orientée régulière S de bord ∂S.

Considérez maintenant le champ vectoriel donné

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \Big(-xy, x^2 + z^2, -yz\Big) \tag{1}$$

c) Calculez $\nabla \cdot \mathbf{f}$ pour le champ (1), puis calculez le flux (extérieur) de $\mathbf{f}$ à travers le bord $\partial\Omega$ du domaine donné

$$\Omega = \Big\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (z-1)^2 < 1, y > 0\Big\}$$

avec $\partial\Omega = S_1 \cup S_2$ et

$$\begin{aligned} S_1 &= \Big\{(x, y, z) : y = 0, x^2 + (z-1)^2 \leq 1\Big\} \\ S_2 &= \Big\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1, y \geq 0\Big\}. \end{aligned}$$

Quel est le flux de $\mathbf{f}$ à travers S_1 dans la direction de la normale extérieure à Ω ? Et à travers S_2 ?

d) Trouvez une fonction scalaire $\phi(z)$ (satisfaisant $\phi(1) = 1$, pour l'unicité) telle que le champ vectoriel

$$\mathbf{F}(x, y, z) := \phi(z)\, \mathbf{f}(x, y, z) \tag{2}$$

(où $\mathbf{f}(x, y, z)$ est le champ vectoriel (1)) ait un potentiel vecteur $\boldsymbol{\psi}$ sur Ω. Y a-t-il un choix unique pour le potentiel vecteur et si non, indiquez brièvement mais explicitement la liberté pour choisir $\boldsymbol{\psi}(x, y, z)$. Calculez ensuite explicitement *un* potentiel vecteur de la forme

$$\boldsymbol{\psi}(x, y, z) = (\psi_1(x, y, z), 0, \psi_3(x, y, z)).$$

e) Calculez le flux de $\mathbf{F}$ donné par (2) dans la direction de la normale extérieure à Ω à travers i) S_1 ii) S_2 iii) $S_1 \cup S_2$.

Pour cette partie e, vous pouvez exprimer vos réponses comme des intégrales scalaires simples, définies et de la forme $\int_a^b h(t)\, dt$ pour des a et b spécifiques et une fonction $h(t)$ explicite, mais vous n'avez pas besoin d'évaluer les intégrales.

La valeur numérique de vos réponses est-elle unique ? Pourquoi ?

Question 3 (40 points)

Ce problème est une variante simple de l'approche standard utilisant la séparation des variables que vous avez vue en classe.

a) Montrez par calcul direct que $\cos(\alpha t + \beta x)$ et $\sin(\alpha t + \beta x)$ sont tous les deux des solutions de l'équation aux dérivées partielles (EDP) pour $u(x,t)$

$$u_t = u_{xxx} \tag{1}$$

sachant que les constantes α et β satisfont $\alpha + \beta^3 = 0$.

b) Utilisez maintenant les séries de Fourier pour trouver les valeurs des constantes A_n, B_n, α_n et β_n telles que la série

$$u(x,t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \cos(\alpha_n t + \beta_n x) + B_n \sin(\alpha_n t + \beta_n x)\right] \tag{2}$$

soit une solution de l'EDP (1) dans $(-\pi,\pi) \times (0,\infty)$ avec les conditions de bord

$$u(-\pi,t) = u(\pi,t)\,, \quad u'(-\pi,t) = u'(\pi,t)\,, \quad u''(-\pi,t) = u''(\pi,t)\,, \quad \text{pour } t > 0 \tag{3}$$

et les conditions initiales

$$u(x,0) = \begin{cases} +1 & \text{pour } 0 \le x < \pi \\ -1 & \text{pour } -\pi < x < 0. \end{cases} \tag{4}$$

c) Supposez maintenant que la condition initiale (4) est remplacée par $u(x,0) = f(x)$ avec $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx < \infty$.

   i) Peut on encore trouver une solution de la forme (2) ? Enoncez un théorème qui justifie votre réponse (pas besoin de calculer réellement la solution ni ici, ni pour le cas particulier du point suivant).

   ii) Dans le cas particulier où

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{pour } 0 \le x < \pi \\ 0 & \text{pour } -\pi < x < 0, \end{cases} \tag{5}$$

   si $(S_N f)(x)$ est la somme partielle finie correspondant à $u(x,0)$, c'est-à-dire

$$(S_N f)(x) = \sum_{n=0}^{N} \left[A_n \cos(\beta_n x) + B_n \sin(\beta_n x)\right],$$

   quelles sont les valeurs limites quand $N \to \infty$ de

   A) $(S_N f)\left(-\frac{1}{2}\right)$

   B) $(S_N f)\left(+\frac{1}{2}\right)$

   C) $(S_N f)(0)$

   D) $(S_N f)(\pi)$

   E) $\int_{-\pi}^{\pi} \left((S_N f)(x)\right)^2 dx$

   Justifiez brièvement chacune de vos réponses à l'aide d'un résultat du cours.