
ANALYSE III

EXAMEN

16 janvier 2017

Nom :	Prénom :
--------------	-----------------

INFORMATIONS :

- Durée de l'examen : de **8h15 à 11h15**.
- Aucun document n'est autorisé.
- Aucune machine n'est autorisée.
- Les réponses aux questions seront données sur le cahier agrafé, et vous pouvez utiliser les rectos et versos de toutes les pages.
- Ne dégrafer aucune page du cahier.
- Si vous avez utilisé des feuilles supplémentaires pour la résolution d'un exercice, *assurez vous qu'un assistant les agrafe au cahier lorsque vous rendez votre examen*.
- Les réponses qui ne seront pas rédigées de manière compréhensible ne seront pas corrigées.
- **Vous pouvez utiliser sans preuve tous les théorèmes du cours, cependant vous devez les énoncer clairement et définir tous les termes y apparaissant.** En particulier, ceci vous permettra *souvent* d'éviter de longs et pénibles calculs ou développements.

Question	Points
1	
2	
3	
TOTAL	

1.

Question 1 (30 points)

I. Soient R et Θ deux nombres tels que $R > 0$ et $0 < \Theta < \pi/2$. On définit la surface S par

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z > 0 \text{ et } 0 < y < x \tan \Theta\}$$

A) Esquisser S et donner un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et une représentation paramétrique $\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ de S (α doit être régulière sur Ω mais on ne demande pas de preuve).

Remarque Il y a plusieurs paramétrisations possibles et n'importe quelle paramétrisation correcte est une bonne réponse ; mais utiliser les coordonnées sphériques pourrait être une bonne idée.

B) Soient $\mathbf{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ un champ de vecteurs et $\mathbf{N} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ le champ de vecteurs unitaire normal à S dont toutes les composantes sont positives.

i. Donner la définition du flux de $\mathbf{f}$ au travers de S dans la direction de $\mathbf{N}$.

ii. Calculer directement la valeur de ce flux pour

a) $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, z)$

b) $\mathbf{f}(x, y, z) = (0, 0, 1)$

II. a) Soient $\mathbf{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ et V un volume régulier. Énoncer le théorème de la divergence pour $\int_V \nabla \cdot \mathbf{f} \, dx \, dy \, dz$ avec une brève explication de toutes les notations supplémentaires utilisées.

Soit $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid R_1^2 < x^2 + y^2 + z^2 < R_2^2, z > 0 \text{ et } 0 < y < x \tan \Theta\}$ pour des scalaires $0 < R_1 < R_2$ et $0 < \Theta < \pi/2$ fixés.

b) **En utilisant le théorème de la divergence**, calculer le volume de V .

Astuce Vous pouvez vous inspirer du point I. B) ii. a).

c) Vérifier le théorème de la divergence pour le domaine V et le champ $\mathbf{f}(x, y, z) = (0, 0, 1)$.

Question 2 (30 points)

- I. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert connexe, un champ vectoriel $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et un champ scalaire $\phi \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ tels que

$$\nabla \phi(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega.$$

Montrer que

a) $\nabla \wedge \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega.$

b) $\int_{\vec{C}} \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0$ pour tout chemin orienté fermé $\vec{C} \subset \Omega.$

- II. Soient $\Omega_1 = \{(x, y, z) \mid 0 < x^2 + y^2 < \pi, y > 0, 0 < z < 1\}$ et $\Omega_2 = \{(x, y, z) \mid 0 < x^2 + y^2 < \pi, 0 < z < 1\}.$

Soient $\mathbf{g}(x, y, z) = \frac{\cos(x^2 + y^2)}{\sin^2(x^2 + y^2)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{f}(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$

- a) Discuter de l'existence de potentiels scalaire et vecteur pour le champ $\mathbf{g}$ sur Ω_1 et Ω_2 et donner ces potentiels sous une forme générale s'ils existent.
- b) Discuter de l'existence de potentiels scalaire et vecteur pour le champ $\mathbf{f}$ sur Ω_1 et Ω_2 et donner ces potentiels sous une forme générale s'ils existent.

Astuce $\frac{d}{dt} \arctan(t) = \frac{1}{1+t^2}$, où $\arctan$ est la fonction inverse à la tangente, aussi dénotée $\tan^{-1}$.

Question 3 (40 points)

On considère l'équation aux dérivées partielles suivante pour $u(x, t)$:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u &= \partial_x^2 u + \gamma^2 u, \\ \text{avec les conditions de bord } u(0, t) &= 0 = u(1, t) \end{aligned} \tag{1}$$

où γ est une constante donnée.

a) Avec $\gamma = 2\pi$, utiliser la méthode de séparation des variables pour donner la solution de (1) avec les conditions initiales suivantes

$$(i) \begin{cases} u(x, 0) = 3 \sin(3\pi x) + 6 \sin(6\pi x) \\ \partial_t u(x, 0) = \sin(4\pi x) \end{cases}$$

et puis pour

$$(ii) \begin{cases} u(x, 0) = 3 \sin(\pi x) + 25 \sin(2\pi x) \\ \partial_t u(x, 0) = 4 \sin(\pi x) + 3 \sin(4\pi x) \end{cases}$$

b) Encore avec $\gamma = 2\pi$, expliquer comment calculer la solution de (1) avec les conditions initiales générales

$$(iii) \begin{cases} u(x, 0) = \phi(x) \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad \text{pour } \phi, \psi \in L^2(0, 1).$$

c) Pour quels $\gamma \geq 0$ la solution de (1) avec les conditions initiales (iii) obtenue en utilisant la méthode de séparation des variables est-elle bornée quand $t \rightarrow \infty$?