**EPFL** Section : **PHYSIQUE**
Prof. John H. Maddocks

# ANALYSE III

## EXAMEN

16 janvier 2018

**Nom :** **Prénom :**

## INFORMATIONS :

— Durée de l'examen : de **8h15 à 11h15**.
— Aucun document n'est autorisé.
— Aucune machine n'est autorisée.
— Les réponses aux questions seront données sur le cahier agrafé, et vous pouvez utiliser les rectos et versos de toutes les pages.
— Ne dégrafer aucune page du cahier.
— Si vous avez utilisé des feuilles supplémentaires pour la résolution d'un exercice, *assurez vous qu'un assistant les agrafe au cahier lorsque vous rendez votre examen.*
— Les réponses qui ne seront pas rédigées de manière compréhensible ne seront pas corrigées.
— Vous pouvez écrire vos réponses en français ou en anglais.
— **Vous pouvez utiliser sans preuve tous les théorèmes du cours, cependant vous devez les énoncer clairement et définir tous les termes y apparaissant**. En particulier, ceci vous permettra *souvent* d'éviter de longs et pénibles calculs ou développements.

| Question | Points |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| **TOTAL** | |

# 1.

## Question 1 (30 points)

Soit $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 < 4 \text{ et } x + 2y < 2\}$.

(a) Esquisser $S$. Montrer que $\partial S$ est l'union de 2 chemins réguliers, et donner une paramétrisation regulière pour chacun d'eux. Expliquer brièvement pourquoi les paramétrisations données sont régulières.

(b) Soit

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\partial S} (y, 3x) \cdot d\mathbf{s} \\
I_2 &= \int_{\partial S} \left(xy^2 - xy, x^2 y\right) \cdot d\mathbf{s} \\
I_3 &= \int_{\partial S} \left(xy^2, xy + x^2 y\right) \cdot d\mathbf{s}
\end{aligned}
$$

Évaluer $I_2$. (Vous n'avez pas besoin d'évaluer $I_1$ et $I_3$.)

(c) Énoncer le théorème de Green (la version de votre choix).

(d) Pour une densité $\rho(x, y) \equiv 1$, exprimer la masse et le centre de masse de $S$ en fonction de $I_1$, $I_2$, et $I_3$.

## Question 2 (30 points)

Soit $S_1$ une nappe définie par

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 - x,\ x + y + z = 1\}$$

et soit $\mathbf{f}$ le champ vectoriel défini par $\mathbf{f}(x, y, z) = (zx, zy, 1 - z^2)$.

(a) Esquisser $S_1$ et son bord $\partial S_1$. Construire une paramétrisation régulière de $S_1$ et calculer un champ de normales unitaires sur $S_1$.

(b) Par calcul d'une intégrale de surface, calculer le flux de $\mathbf{f}$ à travers $S_1$ dans le sens de $\mathbf{N}_1$, où $\mathbf{N}_1$ est le champ de normales unitaires sur $S_1$ à 3ème composante positive.

(c) Énoncer le théorème de Stokes.

(d) Calculer $\nabla \cdot \mathbf{f}$ et $\nabla \wedge \mathbf{f}$.

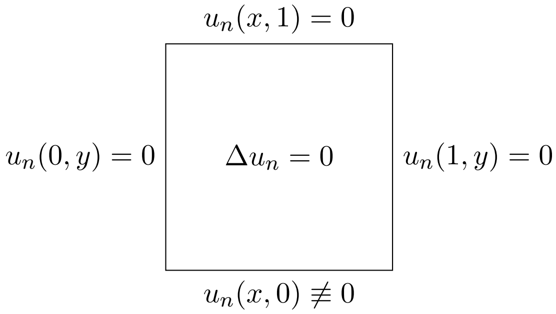
(e) Soit $S_2$ une seconde nappe définie par

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 - x,\ x + y + z = 1 - 10(1 - x - y)xy\}.$$

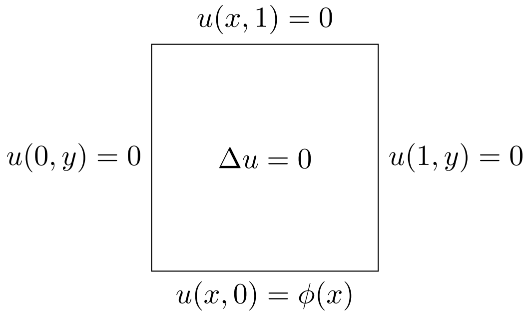
Esquisser le bord $\partial S_2$ de $S_2$. Donner les valeurs (une pour chaque choix de champ de normales unitaires $\mathbf{N}_2$ sur $S_2$) des deux flux normaux de $\mathbf{f}$ à travers $S_2$. Justifier votre réponse en indiquant clairement le(s) résultat(s) du cours que vous utilisez.

## Question 3 (40 points)

I. (a) En utilisant des méthodes de séparation des variables, calculer une suite de solutions distinctes $u_n(x, y)$, $n = 1, 2, \dots$ , de l'équation $\Delta u_n = 0$ sur le carré $(0, 1) \times (0, 1)$ avec les conditions au bord indiquées sur le diagramme ci-dessous (où $\not\equiv 0$ signifie "n'est pas identiquement nulle")

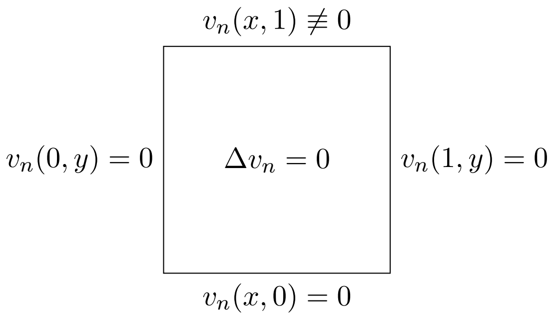



et en déduire une solution sous forme de série au problème aux limites




Les coefficients de la série devront être exprimés explicitement par des intégrales (qu'il n'est pas possible d'évaluer). Justifier brièvement chaque étape de votre calcul.

(b) Donner, sans calculs supplémentaires, les solutions analogues $v_n(x, y)$, $n = 1, 2, \dots$ au problème aux limites sur $(0, 1) \times (0, 1)$ indiqué sur le diagramme ci-dessous




II. L'*équation biharmonique* (qui apparaît en mécanique des fluides et en théorie de l'elasticité) est

$$\Delta\Delta w = 0$$

ou explicitement, en 2 dimensions,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0.$$

(a) Montrer que pour tout $n = 1, 2, \dots$ , les fonctions harmoniques $u_n(x, y)$ calculées au point I.(a) sont aussi solutions de

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{c} w_n(x,1) = 0, \\ \frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2}(x,1) = 0 \end{array} & \\
\begin{array}{c} w_n(0,y) = 0, \\ \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}(0,y) = 0 \end{array} & \boxed{\Delta\Delta w_n = 0} & \begin{array}{c} w_n(1,y) = 0, \\ \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}(1,y) = 0 \end{array} \\
 & \begin{array}{c} w_n(x,0) \not\equiv 0, \\ \frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2}(x,0) \not\equiv 0 \end{array} &
\end{array}$$

(b) Montrer ensuite que pour tout domaine $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, si $\Delta w = 0$ alors

$$g(x,y) := (ax + by + c)w(x,y), \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

vérifie $\Delta\Delta g = 0$ dans $\Omega$ mais, en général, ne vérifie pas $\Delta g = 0$. (Vous pouvez supposer l'existence de dérivées de $w$ d'ordre aussi grand que nécessaire.)

(c) En utilisant les points précédents (sous I et II), construire une suite de solutions distinctes $h_n(x,y)$, $n = 1, 2, \ldots$ au problème aux limites

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{c} h_n(x,1) = 0, \\ \frac{\partial^2 h_n}{\partial y^2}(x,1) = 0 \end{array} & \\
\begin{array}{c} h_n(0,y) = 0, \\ \frac{\partial^2 h_n}{\partial x^2}(0,y) = 0 \end{array} & \boxed{\Delta\Delta h_n = 0} & \begin{array}{c} h_n(1,y) = 0, \\ \frac{\partial^2 h_n}{\partial x^2}(1,y) = 0 \end{array} \\
 & \begin{array}{c} h_n(x,0) = 0, \\ \frac{\partial^2 h_n}{\partial y^2}(x,0) \not\equiv 0 \end{array} &
\end{array}$$

et en déduire une solution sous forme de série au problème aux limites

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{c} h(x,1) = 0, \\ \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,1) = 0 \end{array} & \\
\begin{array}{c} h(0,y) = 0, \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(0,y) = 0 \end{array} & \boxed{\Delta\Delta h = 0} & \begin{array}{c} h(1,y) = 0, \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(1,y) = 0 \end{array} \\
 & \begin{array}{c} h(x,0) = 0, \\ \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,0) = \psi(x) \end{array} &
\end{array}$$

où les coefficients de la série devront être exprimés explicitement par des intégrales.