Question 1. (15 Points)

(a) Soit Ω un domaine régulier dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'aire de Ω est donnée par

$$|\Omega| = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} x\,dy - y\,dx.$$

<u>Sol :</u> Theoreme de Green.

(b) Une ellipse dans $\mathbb{R}^2$ est paramétrisée par

$$\left.\begin{array}{rcl} x &=& a\cos\theta \\ y &=& b\sin\theta \end{array}\right\} \qquad a, b \in \mathbb{R},\ \theta \in [0, 2\pi).$$

Soient c et d deux réels positifs, non nuls, tels que $c > d$. On se donne l'ellipse e_1 avec les paramètres

$$a_1 = c, \quad b_1 = d$$

et l'ellipse e_2 avec

$$a_2 = d, \quad b_2 = c.$$

Calculer l'aire de la surface à l'extérieur de l'ellipse e_1 et à l'intérieur de l'ellipse e_2 avec $y > 0$.

<u>Sol :</u> calcul des angles : ellipse e_1 : $y/x = 1 \to \tan\theta b/a = 1$. $\theta_0 = \tan^{-1}(a/b)$. $\theta_1 = \pi - \theta_0$. idem pour e_2 : $\psi_0 = \tan^{-1}(b/a)$, $\psi_1 = \pi - \psi_0$. Parametriser les 2 chemins $C_1 = \{e_1(s), s \in [\theta_1, \theta_0]\}$ et $C_2 = \{e_2(s), s \in [\psi_0, \psi_1]\}$. Utiliser la formule de (a) pour calculer l'aire.

$$|A| = \frac{1}{2}\big[\big(\int_{\theta_1}^{\theta_0} ab\cos^2\theta d\theta + ab\sin^2\theta d\theta\big) + \big(\int_{\psi_0}^{\psi_1} abd\psi\big)\big],$$

alors

$$|A| = \frac{ab}{2}(\theta_0 - \theta_1 + \psi_1 - \psi_0),$$

donc

$$|A| = ab(\tan^{-1}(a/b) - \tan^{-1}(b/a)).$$

Vu que $\tan^{-1}\alpha \pm \tan^{-1}\beta = \tan^{-1}(\frac{\alpha\pm\beta}{1\mp\alpha\beta})$,

$$|A| = ab\tan^{-1}(\frac{a^2 - b^2}{2ab})$$

Question 2. (20 points)

(a) Enoncer le théorème de Stokes et de la divergence.

(b) Soit V un domaine régulier dans $\mathbb{R}^3$ pour lequel il est possible d'appliquer le théorème de la divergence. Montrer que

(i) $\displaystyle\iint_{\partial V} yN_x\,d\sigma = \iint_{\partial V} zN_x\,d\sigma = 0,$

<u>Sol:</u> $N = (1,0,0)$, $f_1 = (y,0,0) \to \int_V div\, f_1\, dV = 0$. $f_2 = (z,0,0) \to \int_V div\, f_2\, dV = 0$.

(ii) le volume de V est $|V| = \displaystyle\iint_{\partial V} x N_x \, d\sigma$.

<u>Sol:</u> $N = (1,0,0), f = (x,0,0), \to \int_V div\, f\, dV = \int_V dV$.

(c) Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface définie par

$$z = 4 - (x^2 + y^2), \quad z \geq 0$$

et le champ vectoriel $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donné par

$$f(x,y,z) = \big(x^2 + y - 4, 3xy, 2xz + z^2\big).$$

Vérifier le théorème de Stokes pour la fonction f et la surface S.

<u>Sol :</u> $\alpha(t) = (2\cos t, 2\sin t, 0), t \in [0, 2\pi]$.

$$I = \int_{\partial S} \langle f(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle dt,$$

avec $\alpha'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 0)$. L'intégrale devient

$$I = \int_0^{2\pi} (16\cos^2 t \sin t - 4\sin^2 t + 8\sin t) dt.$$

En utilisant $\sin^2 t = (1 - \cos 2t)/2$ on obtient

$$I = -\frac{16}{3}\cos^3 t - 2t + \sin 2t - 8\cos t \Big|_0^{2\pi},$$

où seul le terme -2t est non nul. Finalement $I = -4\pi$. Calculons l'intégrale de surface dans le théorème de Stokes. Posons

$$\alpha(\theta, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z).$$

Vu que $z = 4 - (x^2 + y^2)$, on a $r = \sqrt{4 - z}$ et $dr/dz = -1/(2r)$. Calculons le champ de normales

$$\begin{aligned}
\partial_\theta \alpha(\theta, z) &= (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0), \\
\partial_z \alpha(\theta, z) &= (-\cos\theta/(2r), -\sin\theta/(2r), 1), \\
\partial_\theta \alpha \times \partial_z \alpha &= (r\cos\theta, r\sin\theta, 1/2).
\end{aligned}$$

On a encore besoin de $\nabla \times f = (0, 2z, 3y - 1)$. Finalement

$$I = \int_0^4 \int_0^{2\pi} 2zr\sin\theta + 3r\sin\theta/2 - 1/2 \, d\theta \, dz,$$

où seul le terme -1/2 est non nul, donc

$$I = \int_0^4 \int_0^{2\pi} -1/2 \, d\theta \, dz = -4\pi.$$

Question 3. (15 points)

On se donne le problème suivant

$$\begin{cases}
\Delta u(x,y) = 0 \text{ pour } \ 0 < x < 1 \quad \text{et} \ \ 0 < y < 1, \\
u(x,0) = 0, \quad \partial_y u(x,1) = 0 \\
u(0,y) = 1, \quad \partial_x u(1,y) = 0.
\end{cases}$$

(a) Trouver une solution $u(x, y)$ – en tant que série infinie – du problème donné.

<u>Sol :</u> On pose $u(x, y) = X(x)Y(y)$. On a $\lambda = -\pi^2(n + 1/2)^2$ avec la fonction propre

$$Y(y) = P \sin(\pi(n + 1/2)y).$$

Idem pour $X(x)$ où on transforme les exponentielles en cosh et sinh mais avec un shift de -1 :

$$X(x) = Q \cosh(\pi(n + 1/2)(x - 1)).$$

Donc

$$u(x, y) = A \cosh(\pi(n + 1/2)(x - 1)) \sin(\pi(n + 1/2)y).$$

Superposition et la condition au bords $u(0, y) = 1$ donne

$$u(0, y) = 1 = \sum_{n=0}^{\infty} A'_n \sin(\pi(n + 1/2)y)dy$$

avec

$$A'_n = 2 \int_0^1 \sin(\pi(n + 1/2)y)dy = \frac{2}{\pi(n + 1/2)}.$$

Et finalement en choisissant $A'_n = A_n \cosh(-\pi(n + 1/2))$ on trouve

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cosh(\pi(n + 1/2)(x - 1))}{\pi(n + 1/2) \cosh(-\pi(n + 1/2))} \sin(\pi(n + 1/2)y).$$

(b) Soit $u_N(x, y)$ les sommes partielles – les premiers N termes – de la série infinie obtenue dans (a). Lorsque $N \to \infty$, vers quelle valeur convergent

(i) $u_N(0, 0) = 0$,

(ii) $u_N(0, 0.1) = 1$,

(iii) $u_N(0, 0.9) = 1$.

(iv) $u_N(0, 1) = 1$.