Question 1 (30 points)

a) Le morceau de sphère $S \subset \mathbb{R}^3$ est donné par

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } x \tan\Theta > y > 0 \text{ avec } \Theta \in (0, \pi/2)\}.$$

En choisissant les coordonnées spériques sur la sphère de rayon 1,

$$\{x, y, z\} = \{\sin\psi\cos\phi, \sin\psi\sin\phi, \cos\psi\},$$

la condition $x\tan\Theta > y > 0$ devient $\tan\phi < \tan\Theta$ et $\sin\psi\sin\phi > 0$. Étant la fonction tangente monotone croissante, on obtient enfin $0 < \phi < \Theta < \pi/2$ et $0 < \psi < \pi$. Donc

$$S = \alpha(\psi, \phi) = \{\sin\psi\cos\phi, \sin\psi\sin\phi, \cos\psi\} \text{ avec } \psi \in (0, \pi) \text{ et } \phi \in (0, \Theta).$$

La masse totale est alors donnée par l'intégrale de surface:

$$\begin{aligned} M &= \int_0^\pi \int_0^\Theta |\cos\psi|\, ||\alpha_\psi \wedge \alpha_\phi||\, d\psi\, d\phi \\ &= \Theta \int_0^\pi |\cos\psi| \sin\psi\, d\psi \\ &= \Theta\, 2 \int_0^{\pi/2} \cos\psi\sin\psi\, d\psi \\ &= \Theta, \end{aligned} \tag{1}$$

où on a utilisé $\alpha_\psi = \{\cos\psi\cos\phi, \cos\psi\sin\phi, -\sin\psi\}$, $\alpha_\phi = \{-\sin\psi\sin\phi, \sin\psi\cos\phi, 0\}$ et $(\alpha_\psi \wedge \alpha_\phi) = \{\sin^2\psi\cos\phi, \sin^2\psi\sin\phi, \sin\psi\cos\psi\}$.

La position du centre de masse est donnée par les trois intégrales de surface:

$$\begin{aligned} x_p &= \frac{1}{\Theta} \int_0^\pi \int_0^\Theta |\cos\psi| \sin^2\psi\cos\phi\, d\psi\, d\phi \\ &= \frac{1}{\Theta} \int_0^\Theta \cos\phi\, d\phi \int_0^\pi |\cos\psi| \sin^2\psi\, d\psi \\ &= \frac{1}{\Theta} \sin\Theta \left[\int_0^{\pi/2} \cos\psi\sin^2\psi d\psi - \int_{\pi/2}^\pi \cos\psi\sin^2\psi d\psi \right] \\ &= \frac{1}{\Theta} \sin\Theta \left[2\int_0^1 y^2\, dy \right] \\ &= \frac{2}{3\Theta} \sin\Theta; \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{\Theta} \int_0^\pi \int_0^\Theta |\cos\psi| \sin^2\psi\sin\phi\, d\psi\, d\phi \\ &= \frac{1}{\Theta} \int_0^\Theta \sin\phi\, d\phi \int_0^\pi |\cos\psi| \sin\psi\, d\psi \\ &= \frac{1}{\Theta}(1 - \cos\Theta) \left[\int_0^{\pi/2} \cos\psi\sin^2\psi d\psi - \int_{\pi/2}^\pi \cos\psi\sin^2\psi d\psi \right] \\ &= \frac{2}{3\Theta}(1 - \cos\Theta); \end{aligned} \tag{3}$$

$$
\begin{aligned}
z_p &= \frac{1}{\Theta}\int_0^\pi |\cos\psi|\sin\psi\cos\psi\, d\psi \\
&= \frac{1}{\Theta}\left[\int_0^{\pi/2}\cos\psi^2\sin\psi d\psi - \int_{\pi/2}^{\pi}\cos\psi^2\sin\psi d\psi\right] \\
&= \frac{1}{\Theta}\left[\int_0^1 y^2\, dy - \int_{-1}^0 y^2\, dy\right] \\
&= 0; \qquad (4)
\end{aligned}
$$

b) Par le Théorème de Gauss (Théorème 6.3 partie (3) à la page 43 du Polycopié rédigé par le Prof. C. A. Stuart), si V est un domaine régulier simple dans $\mathbb{R}^3$, $N : \partial V \to \mathbb{R}^3$ le champ de normales unitaires extérieures à V et $f \in C^1(\overline{V}, \mathbb{R}^3)$, alors

$$\int_V \nabla\cdot f \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{\partial V}\langle f, N\rangle\, \mathrm{d}\sigma \qquad (5)$$

On peut donc appliquer le Théorème de Gauss aux fonctions $(v\,\nabla u)$ et $(u\,\nabla v)$, car par hypothèse $u, v \in C^2(\overline{V})$. On obtient

$$
\begin{aligned}
\int_V \nabla\cdot(v\,\nabla u)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_V v\,\Delta u \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \int_V \langle\nabla v, \nabla u\rangle\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{\partial V}\langle v\,\nabla u, N\rangle\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\partial V} v\,\langle\nabla u, N\rangle\,\mathrm{d}\sigma \\
&= \int_{\partial V} v\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma \qquad (6)
\end{aligned}
$$

où on a utilisé $\nabla\cdot(v\,\nabla u) = v\,\Delta u + \langle\nabla v, \nabla u\rangle$ et la définition de dérivée dans la direction de la normale extérieure:

$$\frac{\partial u}{\partial n} := \langle\nabla u, N\rangle\,.$$

Donc

$$\int_V v\Delta u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{\partial V} v\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma - \int_V \langle\nabla u, \nabla v\rangle\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \qquad (7)$$

En permutant les rôles de u et v dans (7) et éliminant le terme

$$\int_V \langle\nabla u, \nabla v\rangle\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

on obtient bien que

$$\int_V \{v\Delta u - u\Delta v\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{\partial V}\left\{v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right\}\mathrm{d}\sigma, \qquad (8)$$

Question 2 (30 points)

(a) On cherche une solution de la forme $u(x,t) = f(x)g(t)$, avec $u \neq 0$, où $f(x)$ et $g(t)$ sont telles que

$$f(x)g''(t) + 2\alpha f(x)g'(t) + \alpha^2 f(x)g(t) = c^2 f''(x), \qquad (9)$$

ou

$$\frac{g''(t) + 2\alpha g'(t) + \alpha^2 g(t)}{g(t)} = c^2\frac{f''(x)}{f(x)}, \qquad (10)$$

c'est à dire, pour une constante $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
g''(t) + 2\alpha g'(t) + \alpha^2 g(t) &= \lambda g(t) \qquad (11) \\
c^2 f''(x) &= \lambda f(x). \qquad (12)
\end{aligned}
$$

Pour la deuxième équation (12), vu les conditions aux bords pour $u(x,t)$, on a les conditions suivantes

$$f(0) = f(L) \qquad f'(0) = f'(L), \tag{13}$$

donc on realise immédiatement que la constante λ doit être non-positive, et dans ce cas, on a la solution

$$f(x) = A \sin \frac{\sqrt{|\lambda|}}{c} x + B \cos \frac{\sqrt{|\lambda|}}{c} x; \tag{14}$$

qui satisfait les conditions (13) pour chaque $\lambda_n = -c^2 (2\pi n)^2 / L^2$.

Le spectre du problème (12) correspond donc à

$$\sigma = \left\{ \lambda_n = -\left(\frac{2\pi n\, c}{L} \right)^2, n \in \mathbb{N} \right\} \tag{15}$$

et les fonctions propres assocées correspondent aux

$$f_n(x) = A_n \sin \frac{2\pi n}{L} x + B_n \cos \frac{2\pi n}{L} x. \tag{16}$$

Pour $\lambda = \lambda_n, n \in \mathbb{N}$, l'équation caractéristique de l'équation différentielle (11) est

$$\mu^2 + 2\alpha\mu + \left[\alpha^2 + \left(\frac{2\pi n c}{L} \right)^2 \right] = 0 \tag{17}$$

avec les deux solutions $\mu_{1,2} = -\alpha \pm i \frac{2\pi n\, c}{L}$.

Donc, pour $n \in \mathbb{N}^+ = \{1, 2, ...\}$, il y a les deux fonctions propres linéairement indépendants

$$g_1 = e^{-\alpha t} \sin \left(\frac{2\pi n c}{L} t \right) \qquad g_2 = e^{-\alpha t} \cos \left(\frac{2\pi n\, c}{L} t \right). \tag{18}$$

Pour $n = 0$, $\mu_1 = \mu_2$ et on a les deux fonctions propres linéairement indépendants

$$g_1 = e^{-\alpha t} \qquad g_2 = t\, e^{-\alpha t}. \tag{19}$$

La solution $u(x,t)$ divient donc

$$\begin{aligned} u(x,t) &= (E + tF)\, e^{-\alpha t} + \sum_{n=1} \left[A_n e^{-\alpha t} \sin \left(\frac{2\pi n\, c}{L} t \right) + B_n e^{-\alpha t} \cos \left(\frac{2\pi n\, c}{L} t \right) \right] \sin \frac{2\pi n}{L} x \\ &+ \sum_{n=1} \left[C_n e^{-\alpha t} \sin \left(\frac{2\pi n\, c}{L} t \right) + D_n e^{-\alpha t} \cos \left(\frac{2\pi n\, c}{L} t \right) \right] \cos \frac{2\pi n}{L} x \end{aligned} \tag{20}$$

où A_n, B_n, C_n, D_n, E, F sont des constants à déterminer.

Pour satisfaire les conditions initiales $u(x,0) = \phi(x)$ et $u_t(x,0) = \psi(x)$ il faut respectivement que

$$\begin{aligned} \phi(x) &= E + \sum_{n=1} \left[\tilde{B}_n \sin \frac{2\pi n}{L} x + \tilde{D}_n \cos \frac{2\pi n}{L} x \right] \\ \psi(x) &= (F - \alpha E) \\ &+ \sum_{n=1} \left[\left(\tilde{A}_n \frac{2\pi n c}{L} - \alpha \tilde{B}_n \right) \sin \frac{2\pi n}{L} x + \left(\tilde{C}_n \frac{2\pi n c}{L} - \alpha \tilde{D}_n \right) \cos \frac{2\pi n}{L} x \right], \end{aligned} \tag{21}$$

et donc $E = b_0$ et $F = a_0 + \alpha b_0$ et pour $n \in \mathbb{N}^+$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_n &= 0 \qquad \tilde{D}_n = b_n \\ \tilde{A}_n &= 0 \qquad \tilde{C}_n = (a_n + \alpha b_n) \frac{L}{2\pi n c} \quad , \end{aligned} \tag{22}$$

où on a utilisé l'orthogonalité des fonctions propres pour comparer les terms à la gauche et à la droite en (21) coefficient par coefficient.

La solution devient donc

$$\begin{aligned} u(x,t) &= [b_0 + t\,(a_0 + \alpha b_0)]\,e^{-\alpha t} \\ &+ \sum_{n=1} \left[(a_n + \alpha b_n) \frac{L}{2\pi nc} e^{-\alpha t} \sin\left(\frac{2\pi n\,c}{L} t\right) + b_n e^{-\alpha t} \cos\left(\frac{2\pi n\,c}{L} t\right)\right] \cos\frac{2\pi n}{L} x \end{aligned} \quad (23)$$

(b) Pour $x = L/2$ on a

$$\begin{aligned} u\left(\frac{L}{2}, t\right) &= [b_0 + t\,(a_0 + \alpha b_0)]\,e^{-\alpha t} \\ &+ \sum_{n=0} (-1)^n \left[(a_n + \alpha b_n) \frac{L}{2\pi nc} e^{-\alpha t} \sin\left(\frac{2\pi n\,c}{L} t\right) + b_n e^{-\alpha t} \cos\left(\frac{2\pi n\,c}{L} t\right)\right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Pour $\alpha > 0$ on obtient bien que

$$\lim_{t\to\infty} u\left(\frac{L}{2}, t\right) = 0, \quad (25)$$

car

$$|u\left(\frac{L}{2}, t\right)| \leq |\,[b_0 + t\,(a_0 + \alpha b_0)]\,|e^{-\alpha t} + \sum_n \left(|(a_n + \alpha b_n)| \frac{L}{2\pi nc} + |b_n| \right) e^{-\alpha t} \quad (26)$$

et $\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t} = 0$ pour $\alpha > 0$.

Pour $\alpha = 0$ la limite n'existe pas car les fonctions $\sin\left(\frac{2\pi n\,c}{L} t\right)$ et $\cos\left(\frac{2\pi n\,c}{L} t\right)$ sont oscillatoires.

Question 3 (40 points)

(A) (1) Théorème de Stokes.

(2) (i) Théorème 7.4 à la page 50 du Polycopié rédigé par le Prof. C. A. Stuart.

(ii) Théorème 7.2 à la page 47 du Polycopié rédigé par le Prof. C. A. Stuart.

(B) On remarque d'abord que le domaine Ω_1 (la partie intérieure d'une sphère de rayon 5) est simplement connexe, tandis que le domaine Ω_2 est seulement connexe. Pourtant le domaine Ω_2 est contenu dans Ω_1, donc si il y a un potentiel sur tout Ω_1, il y a forcément un potentiel sur Ω_2.

1.(i) $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x(y^4 + z) \\ e^x \cos(yz) \end{pmatrix}$

Sur Ω_2 qui est connexe on peut utiliser le Lemme 7.1 à la page 46 du Polycopié, qui donne une condition nécessaire pour l'existence d'un champ scalaire. En particulier, en étant le champ vectoriel sur $\mathbb{R}^3$, le champ $\mathbf{F}$ dérive d'un potentiel scalaire sur Ω_1 seulement si $\mathbf{F}$ est irrotationnel (i.e. $\nabla \wedge \mathbf{F} = \mathbf{0}$), où

$$\nabla \wedge \mathbf{F} = \{\partial_y F_3 - \partial_z F_2,\, \partial_z F_1 - \partial_x F_3,\, \partial_x F_2 - \partial_y F_1\}. \quad (27)$$

On voit déjà que la première composante n'est pas nulle car

$$\partial_y F_3 - \partial_z F_2 = -ze^x \sin(yz) - e^x \neq 0,$$

donc on peut conclure que $\mathbf{F}$ ne dérive pas d'un potentiel scalaire sur Ω_2 et donc forcément il ne dérive pas d'un potentiel sur $\Omega_1 \supset \Omega_2$.

1.(ii) $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{-y}\cosh(x)(y^2+z^4) \\ e^{-y}\sinh(x)(2y-y^2-z^4) \\ e^{-y}\sinh(x)4z^3 \end{pmatrix}$

Ici

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{F} &= \{e^{-y}\sinh x(4z^3)(-1+1), e^{-y}\cosh x(4z^3)(-1+1), e^{-y}\cosh x(2y-y^2-z^4)(1-1)\} \\ &= \{0,0,0\} \end{aligned} \tag{28}$$

Alors $\mathbf{F}$ dérive bien d'un potentiel scalaire sur Ω_1, car Ω_1 est simplement connexe et sur ce domaine $\mathbf{F}$ a un potentiel scalaire si et seulement si il est irrotationnel (Théorème 7.4 à la page 50 du Polycopie). Donc il existe un champ scalaire $\phi \in C^1(\Omega_1)$ tel que $\mathbf{F} = \nabla\phi$. En résolvant l'équation $\mathbf{F} = \nabla\phi$, on trouve

$$\phi(x,y,z) = e^{-y}\sinh(x)(y^2+z^4) + C, \tag{29}$$

où C est une constante. L'existence d'un potentiel scalaire sur tout Ω_1 garantit l'existence d'un tel potentiel sur $\Omega_2 \subset \Omega_1$.

2.(i) $\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{1}{(x-1)^2+y^2}\begin{pmatrix} y \\ -(x-1) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{(x+1)^2+y^2}\begin{pmatrix} y \\ -(x+1) \\ 0 \end{pmatrix}$ Le champ vectoriel présente des singularités aux points $(1,0,z)$ et $(-1,0,z)$: ces points n'appartiennent pas au domaine Ω_2, mais ils appartiennent au domaine Ω_1. Donc le champ vectoriel et son rotationnel sont bien définis seulement sur Ω_2. Dans Ω_2 on calcule

$$\begin{aligned} (\nabla\wedge\mathbf{F})_1 &= 0 \\ (\nabla\wedge\mathbf{F})_2 &= 0 \\ (\nabla\wedge\mathbf{F})_3 &= \partial_x F_2 - \partial_y F_1 \end{aligned} \tag{30}$$

Pour la troisième composante on a donc

$$\begin{aligned} \partial_x F_2 &= \frac{-1}{(x-1)^2+y^2} + \frac{2(x-1)^2}{[(x-1)^2+y^2]^2} - \frac{\lambda}{(x+1)^2+y^2} + \frac{2\lambda(x+1)^2}{[(x+1)^2+y^2]^2} \\ &= \frac{(x-1)^2-y^2}{[(x-1)^2+y^2]^2} + \lambda\frac{(x+1)^2-y^2}{[(x+1)^2+y^2]^2}, \\ \partial_y F_1 &= \frac{1}{(x-1)^2+y^2} - \frac{2y^2}{[(x-1)^2+y^2]^2} + \frac{\lambda}{(x+1)^2+y^2} - \frac{2\lambda y^2}{[(x+1)^2+y^2]^2} \\ &= \frac{(x-1)^2-y^2}{[(x-1)^2+y^2]^2} + \lambda\frac{(x+1)^2-y^2}{[(x+1)^2+y^2]^2}; \end{aligned} \tag{31}$$

donc on peut conclure $(\nabla\wedge\mathbf{F})_3 = 0$, c'est à dire que où il bien défini, i.e. sur Ω_2, le champ est irrotationnel. On remarque que le fait que le champ soit irrotationnel sur Ω_2, qui est seulement connexe, n'est pas une condition suffisante pour qu'il dérive d'un potentiel scalaire.

2.(ii) Le chemin fermé $C = \partial S = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, où (en choissisant l'orientation positive)

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \alpha_1(t) = \{(t,-3),\ t\in(-3,3)\} \Rightarrow \alpha_1'(t) = (1,0) \\ \Gamma_2 &= \alpha_2(t) = \{(3,t),\ \ t\in(-3,3)\} \Rightarrow \alpha_2'(t) = (0,1) \\ \Gamma_3 &= \alpha_3(t) = \{(-t,3),\ t\in(-3,3)\} \Rightarrow \alpha_3'(t) = (-1,0) \\ \Gamma_4 &= \alpha_4(t) = \{(-3,-t),\ t\in(-3,3)\} \Rightarrow \alpha_4'(t) = (0,-1) \end{aligned} \tag{32}$$

$$
\begin{aligned}
\int_{\vec{C}} \mathbf{F}\cdot dl &= \int_{-3}^{3} [F_1(\alpha(1)) + F_2(\alpha(2)) - F_1(\alpha(3)) - F_2(\alpha(4))]\, dt \\
&= -\int_{-3}^{3}\left[\frac{3}{(t-1)^2+9} + \frac{3\lambda}{(t+1)^2+9}\right] - \int_{-3}^{3}\left[\frac{2}{4+t^2} + \frac{4\lambda}{16+t^2}\right] \\
&- \int_{-3}^{3}\left[\frac{3}{(t+1)^2+9} + \frac{3\lambda}{(t-1)^2+9}\right] - \int_{-3}^{3}\left[\frac{4}{16+t^2} + \frac{2\lambda}{4+t^2}\right] \\
&= -(1+\lambda)\int_{-3}^{3}\left[\frac{3}{(t+1)^2+9} + \frac{3}{(t-1)^2+9}\right] \\
&- (1+\lambda)\int_{-3}^{3}\left[\frac{4}{16+t^2} + \frac{2}{4+t^2}\right] \\
&= -(1+\lambda)\left[\arctan\frac{t-1}{3} + \arctan\frac{t+1}{3}\right]_{-3}^{3} \\
&- (1+\lambda)\left[\arctan\frac{t}{4} + \arctan\frac{t}{2}\right]_{-3}^{3} \\
&= -(1+\lambda)\left[2\arctan\frac{2}{3} + 2\arctan\frac{4}{3} + 2\arctan\frac{3}{2} + 2\arctan\frac{3}{4}\right] \\
&= -2\pi(1+\lambda), \qquad (33)
\end{aligned}
$$

où on a utilisé les identités suivantes

* $\frac{d}{d\xi}\arctan(\xi/a) = a/(a^2+\xi^2) \quad \forall a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\ \forall\xi \in \mathbb{R}$
* $\arctan(\xi) = -\arctan(-\xi)\ \ \forall\xi \in \mathbb{R}$
* $\arctan\xi + \arctan(1/\xi) = \pi/2\ \forall\xi \in \mathbb{R}$.

2.(iii) Vu que le domaine Ω_2 est connexe on peut utiliser le Théorème 7.2, qui nous indique que une condition nécessaire et suffisante pour que le champ $\mathbf{F}$ soit dérive d'un potentiel scalaire est que le champ soit conservatif, c'est à dire $\int_{\vec{C}} \mathbf{F}\cdot dl = 0$ pour tout chemin fermé contenu dans Ω_2. À partir du résultat de la partie [2.(ii)] on peut donc conclure que $\lambda = -1$ est une condition nécessaire, car surement la circulation de $\mathbf{F}$ sur le chemin fermé choisi n'est pas nulle si $\lambda \neq -1$. D'autre part la condition est aussi suffisante, car si le chemin fermé n'est pas autour du trou, pour le Théorème de Stokes, la circulation de $\mathbf{F}$ sur ce chemin est nulle. Si le chemin fermé est autour du trou il est équivalente au chemin choisi. Finalement donc la condition $\lambda = -1$ est nécessaire et suffisante.

En résolvant l'équation $\mathbf{F} = \nabla\phi$ on obtient

$$\phi(x,y,z) = \arctan\frac{x-1}{y} + \lambda\arctan\frac{x+1}{y} + B, \qquad (34)$$

où B est une constante. On remarque que le potentiel est bien défini seulement pour $y \neq 0$, qui corresponds a l'axe x dans le plan $z =$ constante, ou moins que $\lambda = -1$: dans ce cas les deux singularités de (34) s'annulent l'un avec l'autre, et le potentiel reste bien défini dans Ω_2. Donc finalement, on retrouve le résultat que le potentiel existe si et seulement si $\lambda = -1$. Dans ce cas il est donné par (34) avec $\lambda = -1$.