Question 1 (35 points)

1. La surface S est constitué du quart d'une paraboloïde de révolution autour de l'axe z et le domaine Ω est constitué des points de l'intérieur de cette paraboloïde dont toutes les coordonnées (cartésiennes) sont positives.

2. Motivé par la symétrie du domaine Ω, on décide de travailler en coordonnées cylindriques, i.e. $(x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ avec $r \in]0, 1[, \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $z \in]0, 1[$.

   La masse M de Ω vaut :

   $M = \int_\Omega \rho_V(x, y, z)dxdydz = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{1-r^2} zrdrd\theta dz = \frac{\pi}{4}\int_0^1 (1-r^2)^2 rdr$

   $= \frac{\pi}{4}[\frac{-1}{6}(1-r^2)^3]_0^1 = \frac{\pi}{24}$

   Le centre de masse p_M vaut $p_M = \frac{1}{M}\int_\Omega \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rho_V(x, y, z)dxdydz = \frac{1}{M}\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{1-r^2} \begin{pmatrix} r^2 z\cos\theta \\ r^2 z\sin\theta \\ rz^2 \end{pmatrix} drd\theta dz$

   $= \frac{1}{M}\int_0^1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2}r^2(1-r^2)^2 \\ \frac{1}{2}r^2(1-r^2)^2 \\ \frac{\pi}{6}r(1-r^2)^3 \end{pmatrix} dr = \frac{1}{M}\int_0^1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2}r^2 - r^4 + \frac{1}{2}r^6 \\ \frac{1}{2}r^2 - r^4 + \frac{1}{2}r^6 \\ \frac{\pi}{6}r(1-r^2)^3 \end{pmatrix} dr = \frac{1}{M}\left[\begin{pmatrix} \frac{1}{6}r^3 - \frac{1}{5}r^5 + \frac{1}{14}r^7 \\ \frac{1}{6}r^3 - \frac{1}{5}r^5 + \frac{1}{14}r^7 \\ \frac{-\pi}{48}(1-r^2)^4 \end{pmatrix}\right]_0^1$

   $= \frac{1}{M}\begin{pmatrix} \frac{4}{105} \\ \frac{4}{105} \\ \frac{\pi}{48} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{32}{35\pi} \\ \frac{32}{35\pi} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

   Le centre de masse est à l'intérieur de Ω, est ceci est toujours le cas pour un domaine convexe et une densité $\rho_V > 0$. Ceci s'explique par le fait que la formule du centre de masse peut s'interpréter comme une moyenne des points de Ω pondéré par leur densité. Précisément on parle de *combinaison convexe* des points de Ω.

3. Motivé par la symétrie de la nappe S, on décide de travailler en coordonnées cylindriques, i.e. $(x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ avec $r \in]0, 1[, \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $z \in]0, 1[$. Une paramétrisation régulière de S est donc $\alpha :]0, 1[\times]0, \frac{\pi}{2}[$ avec $\alpha(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 1-r^2)$.

   La masse m de S vaut $m = \int_S \rho_S d\sigma = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-r^2}{\sqrt{4r^2+1}} ||\partial_r\alpha \wedge \partial_\theta\alpha||(r, \theta)drd\theta$

   $= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-r^2)rdrd\theta = \frac{\pi}{2}[\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4]_0^1 = \frac{\pi}{8}$

   car $||\partial_r\alpha \wedge \partial_\theta\alpha|| = ||(2r^2\cos\theta, 2r^2\sin\theta, r)|| = r\sqrt{4r^2+1}$.

   Le centre de masse p_S vaut $p_S = \frac{1}{m}\int_S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rho_S(x, y, z)d\sigma = \frac{1}{m}\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} (1-r^2)r^2\cos\theta \\ (1-r^2)r^2\sin\theta \\ (1-r^2)^2 r \end{pmatrix} drd\theta$

   $= \frac{1}{m}\int_0^1 \begin{pmatrix} (1-r^2)r^2 \\ (1-r^2)r^2 \\ \frac{\pi}{2}(1-r^2)^2 r \end{pmatrix} dr = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} \frac{2}{15} \\ \frac{2}{15} \\ \frac{\pi}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{15\pi} \\ \frac{16}{15\pi} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

   Le centre de masse est au dessus du plan et en dessous de S (à l'intérieur de *l'enveloppe convexe* de S), est ceci est toujours le cas pour une densité $\rho_S > 0$. Ceci s'explique par le fait que la formule du centre de masse peut s'interpréter comme une moyenne des points de S pondéré par leur densité. Précisément on parle de *combinaison convexe* des points de S.

4. Le but ici est d'appliquer le théorème de Stokes pour obtenir le flux de F au travers de S. Soient $A_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = 0\} \cap \overline{\Omega}$, $A_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y = 0\} \cap \overline{\Omega}$ et $A_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = 0\} \cap \overline{\Omega}$ les trois faces plannes du domaine Ω, où $\overline{\Omega}$ dénote la fermeture du domaine Ω. On observe qu'on a $\cup_{i=1}^3 A_i \cup S = \partial\Omega$.

   On a que $\int_S F \cdot d\sigma = \int_{\partial S}(xyz, xyz + x, xyz) \cdot dl = \sum_{i=1}^3 \int_{\partial A_i}(xyz, xyz + x, xyz) \cdot dl$

$= \sum_{i=1}^{3} \int_{A_i} \nabla \wedge (xyz, xyz + x, xyz) \cdot d\sigma = \sum_{i=1}^{3} \int_{A_i} \begin{pmatrix} xz - xy \\ xy - yz \\ yz + 1 - xz \end{pmatrix} \cdot d\sigma$

$= \int_{A_3} d\sigma = \frac{\pi}{4}$ l'aire d'un quart de disque, car le champ F sur A_1 (resp. A_2) est orthogonal au champ de normales sur A_1 (resp. A_2).

Noter en particulier que le théorème de Stokes ne s'applique pas directement à la nappe $\partial\Omega$ car celle-ci n'est pas régulière.

Question 2 (30 points)

A) i. Le rotationel de F_1 vaut $\nabla \wedge F_1 = \begin{pmatrix} (x^2 + y^2) \sin z \\ (x^2 + y^2) \cos z \\ 2x \cos z - 2y \sin z \end{pmatrix} \neq 0$ sur Ω, on conclut donc qu'il n'existe pas de potentiel scalaire pour F_1 sur Ω.

La divergence de F_1 vaut $\nabla \cdot F_1 = 2x \sin z + 2y \cos z + 4z^3 \neq 0$ sur Ω, on conclut donc qu'il n'existe pas de potentiel vectoriel pour F_1 sur Ω.

ii. Le rotationel de F_2 vaut $\nabla \wedge F_2 = 0$ sur Ω et Ω est simplement connexe, on conclut donc qu'il existe un potentiel scalaire $\phi \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ pour F_2 sur Ω.

On trouve $\phi(x, y, z) = \ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + C$ où $C \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire.

La divergence de F_2 vaut, en notant $\mathbf{x} = (x, y, z)$ et $|\mathbf{x}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$,

$\nabla \cdot F_2 = \frac{-4}{|\mathbf{x}|^2} + \frac{6}{|\mathbf{x}|^2} = \frac{2}{|\mathbf{x}|^2} \neq 0$ sur Ω, on conclut donc qu'il n'existe pas de potentiel scalaire pour F_1 sur Ω.

iii. Le rotationel de F_3 vaut $\nabla \wedge F_3 = \begin{pmatrix} -2\beta y \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$ sur Ω car $\alpha, \beta > 0$, on conclut donc qu'il n'existe pas de potentiel scalaire pour F_3 sur Ω.

La divergence de F_3 vaut $\nabla \cdot F_3 = 0$ sur Ω, cependant Ω n'est pas étoilé et conséquemment le théorème sur l'existence de potentiel vectoriel ne s'applique pas.

Néanmoins, on observe que $F_3 \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ et que $\nabla \cdot F_3 = 0$ sur $\mathbb{R}^3$. Ce qui permet de conclure de l'existence d'un potentiel vectoriel $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ pour F_3 sur $\mathbb{R}^3$, car $\mathbb{R}^3$ est étoilé.

Conséquemment, comme Ω est un sous-ensemble (ouvert) de $\mathbb{R}^3$, il existe un potentiel vectoriel $\psi \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$ pour F_3 sur Ω.

On trouve $\psi(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{3} y^3 \\ \frac{\alpha}{2} x^2 - z \\ 0 \end{pmatrix} + \nabla g(x, y, z)$ où $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ est une fonction arbitraire.

B) i. Au point A) ii. on a montré que F_2 dérive d'un potentiel scalaire et donc $\int_{\overrightarrow{C}} F_2 \cdot dl = 0$ car $\overrightarrow{C}$ est un chemin fermé.

ii. Par le théorème de Stokes on a $\int_{\overrightarrow{C}} F_3 \cdot dl = \int_{\mathrm{int}\overrightarrow{C}} \left(\nabla \wedge F_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) d\sigma = 0$ car $\nabla \wedge F_3$, calculé en A) iii., et le champ constant $(0, 0, 1)$ sont orthogonaux sur $\mathrm{int}\overrightarrow{C}$.

On peut aussi conclure directement en analysant les termes sur chacun des arrêtes du carré.

iii. Par définition $\int_{(S,N)} F_2 \cdot d\sigma = 2 \int_S 1 d\sigma = 8\pi$, soit deux fois l'aire latérale de la sphère de rayon 1.

iv. Par le théorème de la Divergence on a $\int_{(S,N)} F_3 \cdot d\sigma = \int_{int(S)} (\nabla \cdot F_3) dxdydz = 0$ car $\nabla \cdot F_3 = 0$, comme montré en A) iii.

Question 3 (35 points)

A) La méthode de séparation de variable consiste à chercher une solution $u \neq 0$ de la forme $u(x,t) = f(x)g(t)$. Conséquemment l'équation $\partial_x^2 u(x,t) - 2\alpha\partial_x u(x,t) = \partial_t u(x,t)$ se réécrit $\partial_x^2 f(x)g(t) - 2\alpha\partial_x f(x)g(t) = f(x)\partial_t g(t)$, ce qui implique

$$\begin{cases} \partial_x^2 f(x) - 2\alpha\partial_x f(x) = \lambda f(x) \\ \partial_t g(t) = \lambda g(t) \end{cases}$$

pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

On commence par résoudre l'EDO pour f car on demande des conditions de bord homogènes pour la variable d'espace x. On rappel que la solution $a\partial_x^2 f(x) + b\partial_x f(x) + cf(x) = 0$ s'obtient en calculant les racines μ_1 et μ_2 du polynôme $a\mu^2 + b\mu + c = 0$. Puis en formant une solution générale de la forme $f(x) = C_1 e^{\mu_1 x} + C_2 e^{\mu_2 x}$ si $\mu_1 \neq \mu_2$, et de la forme $f(x) = C_1 e^{\mu_1 x} + xC_2 e^{\mu_1 x}$ si $\mu_1 = \mu_2$. Dans ce cas on trouve $\mu_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \lambda}$.

Conséquemment:

Si $\lambda > -\alpha^2$ On trouve $\mu_{1,2} \in \mathbb{R}$ et $\mu_1 \neq \mu_2$. Cependant il n'existe aucune solution $f \neq 0$ de la forme $f(x) = C_1 e^{\mu_1 x} + C_2 e^{\mu_2 x}$ qui respecte les conditions de bord demandées $f(0) = 0$ et $f(L) = 0$.

Si $\lambda = -\alpha^2$ On trouve $\mu_{1,2} \in \mathbb{R}$ et $\mu_1 = \mu_2$. Cependant il n'existe aucune solution $f \neq 0$ de la forme $f(x) = C_1 e^{\mu_1 x} + xC_2 e^{\mu_1 x}$ qui respecte les conditions de bord demandées $f(0) = 0$ et $f(L) = 0$.

Finalement si $\lambda < -\alpha^2$ On trouve $\mu_{1,2} \in \mathbb{C}$ et $\mu_1 \neq \mu_2$. Ce qui donne une solution de la forme $f(x) = e^{\alpha x}\left[C_1 \sin\left(\sqrt{|\alpha^2 + \lambda|}x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{|\alpha^2 + \lambda|}x\right)\right]$ car on cherche une fonction f à valeurs réelles.

En imposant les conditions de bord demandées $f(0) = 0$ et $f(L) = 0$, on trouve $C_2 = 0$ et

$$f_n(x) = e^{\alpha x} A_n \sin\left(\sqrt{|\alpha^2 + \lambda_n|}x\right) = e^{\alpha x} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

pour le spectre $\left\{\lambda_n = -\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \alpha^2\right] \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.

On résoud ensuite pour la fonction g, et on trouve

$$g_n(t) = B_n e^{t\lambda_n}.$$

Conséquement la solution générale s'écrit, en utilisant le principe de superposition,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) \text{ avec } u_n(x,t) = f_n(x)g_n(t) \text{ et } c_n := A_n B_n \quad (*)$$

On impose à présent la condition initiale, soit $u(x,0) = 5e^{\alpha x}\sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right) + 8e^{\alpha x}\sin\left(\frac{5\pi}{L}x\right)$, ce qui implique, grâce à la forme de $f_n(x)$, qu'il suffit de choisir $c_3 = 5, c_5 = 8$ et $c_n = 0$ pour $n \neq 3, 5$ dans l'expression $(*)$.

Finalement, on trouve qu'une solution à ce problème est

$$u(x,t) = e^{\alpha x}\left[5\sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right) e^{-t\left[\left(\frac{3\pi}{L}\right)^2 + \alpha^2\right]} + 8\sin\left(\frac{5\pi}{L}x\right) e^{-t\left[\left(\frac{5\pi}{L}\right)^2 + \alpha^2\right]}\right]$$

B) (a) Pour $\alpha = 0$, on trouve le spectre $\left\{\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \mid n \in \mathbb{N}\right\}$, les fonctions propres $f_n(x) = A_n \sin\left(\sqrt{|\lambda_n|}x\right) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ et $g_n(t) = B_n e^{t\lambda_n}$, et la solution générale $(*)$ $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t)$ avec $u_n(x,t) = f_n(x)g_n(t)$.

Cependant, avec la condition initiale générale $u(x,0) = \phi(x)$ les coefficients c_n doivent être tels que

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \phi(x).$$

On trouve ces coefficients c_n via la formule

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\phi(x)dx$$

qui est la formule des coefficients de la série Fourier en sinus de la fonction $\phi(x)$.

(b) Pour $\alpha > 0$, on trouve le même spectre, les mêmes fonctions propres et la même solution générale qu'au point A).

Cependant, avec la condition initiale générale $u(x,0) = \phi(x)$ les coefficients c_n doivent être tels que

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\alpha x} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \phi(x).$$

On ne peut pas ici appliquer directement la formule des coefficients de la série Fourier en sinus car les fonctions propres f_n ne sont pas orthogonales pour le produit scalaire de $L^2(0,L)$. Par contre on peut multiplier par $e^{-\alpha x}$ l'égalité ci-dessus et ainsi obtenir la formule suivante pour les coefficients c_n

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\alpha x}\phi(x)dx.$$