Question 1 (40 points)

1. La surface S est constituée d'une demi paraboloïde de révolution concave autour de l'axe z. On observe que $\alpha(\theta, z) \in S \iff \theta \in]0, \pi[$ et $z \in]1, h[$ et donc qu'il faut choisir $\Omega =]0, \pi[\times]1, h[$. On obtient facilement un inverse par $\alpha^{-1}(x, y, z) = \big(\arccos(\frac{x}{z^2}), z\big)$. Comme α et α^{-1} sont continues, on conclut que α est un homéomorphisme.

2. i. Les dérivées partielles sont $\partial_\theta \alpha(\theta, z) = \begin{pmatrix} -z^2 \sin\theta \\ z^2 \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\partial_z \alpha(\theta, z) = \begin{pmatrix} 2z\cos\theta \\ 2z\sin\theta \\ 1 \end{pmatrix}$ et donc la normale unitaire s'exprime par

$$N_\alpha(\theta, z) = \frac{1}{|\partial_\theta \alpha(\theta, z) \wedge \partial_z \alpha(\theta, z)|} \partial_\theta \alpha(\theta, z) \wedge \partial_z \alpha(\theta, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4z^2}} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -2z \end{pmatrix}$$

car $|\partial_\theta \alpha(\theta, z) \wedge \partial_z \alpha(\theta, z)| = z^2\sqrt{1 + 4z^2}$. Noter qu'il s'agit de l'orientation demandeé car $N_3 < 0$.

ii. En utilisant le fait que $(x, y, z) = \alpha(\theta, z)$ on trouve $N(x, y, z) = \frac{1}{z^2\sqrt{1+4z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2z^3 \end{pmatrix}$.

3. La masse m vaut $m = \int_S \rho d\sigma$ ce qui donne ici

$$m = \int_0^\pi \int_1^h \frac{1}{4} z\sqrt{1 + 4z^2} dz d\theta = \frac{\pi}{48}(1 + 4z^2)^{\frac{3}{2}}|_1^h.$$

4. Le bord de S est constitué de quatre morceaux: deux demi-cercles et des courbes $(\pm z^2, 0, z)$ avec $z \in]1, h[$. On obtient donc

$$\int_{\partial S} g dl = \int_0^\pi \sqrt{1 + 4h^2} h^2 d\theta + \int_0^\pi \sqrt{5} d\theta + 2\int_1^h (1 + 4z^2) dz$$
$$= \pi(h^2\sqrt{1 + 4h^2} + \sqrt{5}) + 2(z + \frac{4}{3}z^3)|_1^h$$

5. Le flux de champ F vaut

$$\int_S F \cdot d\sigma = \int_0^\pi \int_1^h \begin{pmatrix} z^2\cos\theta \\ z^2\sin\theta \\ z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z^2\cos\theta \\ z^2\sin\theta \\ -2z^3 \end{pmatrix} d\theta dz = \pi \int_1^h (z^4 - 2z^5) dz = \pi(\frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{3}z^6)|_1^h.$$

6. a) Soit $V \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert tel que $\bar{S} \subset V$, $g \in C^1(V, \mathbb{R}^3)$ et S, N, T comme dans l'énoncer, alors

$$\int_S < \nabla \wedge g, N > d\sigma = \int_{\partial S} < g, T > dl.$$

b) En choisissant $g = uf$ dans a) et en utilisant l'identitée $\nabla \wedge (uf) = \nabla u \wedge f + u\nabla \wedge f$, on obtient

$$\int_{\partial S} u < f, T > dl = \int_S u < \nabla \wedge f, N > d\sigma + \int_S < \nabla u \wedge f, N > d\sigma$$
$$= \int_S u < \nabla \wedge f, N d\sigma > + \int_S < f \wedge N, \nabla u > d\sigma$$

car $< a \wedge b, c >= - < a \wedge c, b >$ pour tous vecteurs $a, b, c \in \mathbb{R}^3$. D'où la formule d'intégration par parties.

7. En utilisant le théorème de Stokes on trouve que le flux de $\nabla \wedge H$ vaut

$$\int_S < \nabla \wedge H, N > d\sigma = \int_{\partial S} < H, T > dl$$

$$= -\int_1^h \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \ln(\sqrt{t+1}) \\ \sin(e^t) \end{pmatrix} dt + \int_1^h \begin{pmatrix} -2t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \ln(\sqrt{t+1}) \\ \sin(e^t) \end{pmatrix} dt$$

$$+ \int_0^\pi \begin{pmatrix} -\sin\theta \ln(\sqrt{2}) \\ \cos\theta \ln(\sqrt{2}) \\ \sin(e) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} d\theta - \int_0^\pi \begin{pmatrix} -h^2 \sin\theta \ln(\sqrt{h+1}) \\ h^2 \cos\theta \ln(\sqrt{h+1}) \\ \sin(e^h) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -h^2 \sin\theta \\ h^2 \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} d\theta$$

$$= \pi \left(\sqrt{2} - h^4 \ln(\sqrt{h+1}) \right)$$

8. On vérifie facilement que $\nabla \wedge f = 0$. De plus comme le champ f n'admet aucune singularité sur $\mathbb{R}^3$, qui simplement connexe, on conclut qu'il existe un potentiel scalaire pour le champ f sur $\mathbb{R}^3$ (précisement on trouve $x^2(e^z - e) + const.$ comme potentiel scalaire). Comme $V \subset \mathbb{R}^3$, il existe donc un potentiel scalaire pour f sur V.

   Pour calculer cette intégrale on utilise la formule d'inégration par parties démontrée au point 6.b). Comme $\nabla \wedge f = 0$ et $\bar{S} \subset V$, on trouve

$$\int_S < f \wedge N, \nabla u > d\sigma = \int_{\partial S} u < f, T > dl$$

$$= \int_0^\pi \sin^2\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e\cos^2\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} d\theta - \int_0^\pi \sin^2\theta \begin{pmatrix} 2h^2 \cos\theta (e^h - e) \\ 0 \\ e^h h^2 \cos^2\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -h^2 \sin\theta \\ h^2 \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} d\theta$$

$$= -2h^4(e^h - e) \int_0^\pi \sin^3\theta \cos\theta d\theta = -\frac{h^4}{2}(e^h - e)(\sin^4\theta)|_0^\pi = 0$$

Question 2 (30 points)

a) On trouve $\nabla f(x,y,z) = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x,y,z)$ et $\triangle f(x,y,z) = 0$ pour $(x,y,z) \neq 0$.

b) Comme V est régulier, il admet un champ continue de normale unitaire N sur son bord ∂V et on peut donc appliquer le théorème de la divergence

$$\int_V (\nabla \cdot F) dxdydz = \int_{\partial V} (F \cdot N) d\sigma$$

pour tous champs $F \in C^1(\bar{V}, \mathbb{R}^3)$. En observant que $\nabla \cdot (u\nabla v - v\nabla u) = u\triangle v - v\triangle u$ et en utilisant le théorème de la divergence avec $F = u\nabla v - v\nabla u$ on trouve

$$\int_V \nabla \cdot (u\nabla v - v\nabla u) dxdydz = \int_{\partial V} \{u\nabla v \cdot N - v\nabla u \cdot N\} d\sigma = \int_{\partial V} \left\{ u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right\} d\sigma$$

ce qui est le résultat cherché.

c) i. En utilisant à présent $V = B(r) \setminus B(\epsilon)$, $u = g$ et $v = f$ dans b), où f est définie dans a), on obtient

$$\int_V (g\triangle f - v\triangle g) dxdydz = 0 = -\int_{S(r)} \frac{1}{r^2} g d\sigma - \int_{S(r)} \frac{1}{r}(\nabla g \cdot N) d\sigma + \int_{S(\epsilon)} \frac{1}{\epsilon^2} g d\sigma - \int_{S(\epsilon)} \frac{1}{\epsilon}(\nabla g \cdot N) d\sigma$$

Et donc

$$\frac{1}{r^2} \int_{S(r)} g d\sigma = \frac{1}{\epsilon^2} \int_{S(\epsilon)} g d\sigma$$

car $\int_{S(\,.\,)} (\nabla g \cdot N) d\sigma = \int_V \triangle g dxdydz = 0$.

ii. Comme $g \in C^2(\bar{B}(r))$, $g(y) = g(0) + O(\epsilon)$ pour tous $y \in S(\epsilon)$ et pour tous $0 < \epsilon < 1$. Conséquemment,

$$\frac{1}{\epsilon^2} \int_{S(\epsilon)} g d\sigma = 4\pi g(0) + 4\pi O(\epsilon) \ \forall 0 < \epsilon < 1.$$

Comme cela est vrai pour tous $0 < \epsilon < 1$, on conclut que

$$\frac{1}{r^2} \int_{S(r)} g d\sigma = \frac{1}{\epsilon^2} \int_{S(\epsilon)} g d\sigma = 4\pi g(0).$$

Question 3 (30 points)

A) Pour appliquer la méthode de séparation de variables on cherche une solution de la forme $u(x,t) = f(x)h(t)$. En substituant ceci dans l'équation, on déduit les équations suivantes pour f et h:

$$f''(x) = \lambda f(x) \text{ avec } f'(0) = 0 \text{ et } f'(\pi) = 0$$

et

$$h'(t) = \lambda h(t) \text{ avec } f(x)h(0) = \phi(x), \forall x \in]0, \pi[$$

pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pour la fonction f on trouve que si :

$\lambda > 0$ il n'existe pas de solutions qui satisfont les conditions de bords

$\lambda = 0$ $f = const.$ et c'est une solution

$\lambda < 0$ $f(x) = A\cos(\sqrt{|\lambda|}x) + B\sin(\sqrt{|\lambda|}x)$ est une solution si $B = 0$ et $\lambda_n = -n^2$ pour $n = 1, 2, ...$ Ceci donne

$$f_n(x) = A_n \cos(nx).$$

Noter que le cas $\lambda = 0$ se récupère avec $f_n(x)$ pour $n = 0$.

On trouve donc $h_n(t) = e^{-n^2 t}$ pour $n = 0, 1, 2, ...$ et donc par le principe de superposition

$$u(x,t) = \sum_{n \geq 0} A_n \cos(nx) e^{-n^2 t}$$

Il nous reste encore à trouver les coefficients A_n, $n = 0, 1, 2, ...$ pour satisfaire la condition $u(x, 0) = \phi(x)$, i.e.

$$\phi(x) = \sum_{n \geq 0} A_n \cos(nx).$$

On observe donc que A_n sont les coefficients de Fourier de $\phi(x)$ exprimées en une série de cosinus. Comme les fonctions propres $\cos(nx)$ sont solutions d'un problème de Sturm-Liouville elles sont orthogonales deux à deux dans $L^2(0, \pi)$, on trouve donc

$$A_n = \frac{1}{\int_0^\pi \cos^2(nx) dx} \int_0^\pi \phi(x) \cos(nx) dx.$$

Noter que $\int_0^\pi \cos^2(nx) dx = \frac{\pi}{2}$

B) Pour appliquer la méthode de séparation de variables on cherche une solution de la forme $u(x,y,t) = f(x)g(y)h(t)$.

Cependant, la condition initiale $u(x,y,0) = \phi(x)$ exprime qu'au temps $t = 0$ la fonction u ne dépend pas de la variable y, et que conséquemment on peut s'attendre à ce que la fonction $u(x,y,t)$ reste indépandante de y pour tout t. Ceci reviens à chercher une solution de la forme $u(x,y,t) = f(x)h(t)$, i.e. avec $g(y) = 1$. On observe que $g(y) = 1$ est bien un solution qui satisfait les conditions de bord pour g et que cela implique que les équations pour $f(x)$ et $g(t)$ seront identiques à celles en A). Ceci montre que dans ce cas

$$u(x,y,t) = \sum_{n\geq 0} A_n \cos(nx)e^{-n^2 t}$$

avec A_n comme dans A).

Noter que l'on pourrais aussi appliquer "les yeux fermés" la méthode de séparation de variables pour $u(x,y,t) = f(x)g(y)h(t)$ et on arriverait au même résultat

C) Utilisant la même observation qu'au point B), on cherche une solution de la forme $u(x,y,t) = g(y)h(t)$. La symmétrie du problème permet de conclure que le spectre de (P) est le même que celui en A), i.e. $\lambda_n = -n^2$ pour $n = 0,1,2,...$ et que les fonctions propres associées sont $g_n(y) = \cos(ny)$.

Cependant, $h(t)$ est solution d'une équation du deuxième ordre maintenant, précisément $h''(t) + n^2 h(t) = 0$. On trouve donc pour $n = 0$,

$$h_0(t) = a_0 + tb_0$$

et

$$h_n(t) = a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

pour $n \geq 1$. Les conditions initiales imposent $u(x,y,0) = 0$ ce qui donne $a_n = 0$ pour $n \geq 0$, et $\partial_t u(x,y,0) = \psi(y)$

$$\sum_{n\geq 1} nb_n \cos(ny) + b_0 = \psi(y).$$

Un même argument qu'en A) pour calculer les coefficients A_n permet de conclure que

$$b_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \psi(y)dy \text{ et } b_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \psi(y)\cos(ny)dy$$

D) Une première possibilté est d'appliquer "les yeux fermés" la méthode de séparation de variables pour $u(x,y,t) = f(x)g(y)h(t)$.

Une seconde est d'observer que la fonction $\cos(2x)\cos(y)$ est une fonction propre de l'opérateur $\triangle$ qui satisfait les conditions de bord demandée en (P), i.e.

$$\triangle(\cos(2x)\cos(y)) = 5\cos(2x)\cos(y).$$

Il suffit donc de chercher une solution de la forme $u(x,y,t) = \cos(2x)\cos(y)h(t)$. Ceci implique l'équation suivante pour la fonction $h(t)$

$$h''(t) + 5h(t) = 0 \text{ avec } h'(0) = 0$$

on trouve $h(t) = \mathit{const} \times \cos(\sqrt{5}t)$ et donc

$$u(x,y,t) = \cos(2x)\cos(y)\cos(\sqrt{5}t).$$