EPFL Section : PH
Prof John H. Maddocks

ANALYSE III **Corrigé examen** 2016

Question 1

a) On paramètre $\vec{C}$ par $c(t) = (t,t)$ pour $t \in (0,1)$. Sa dérivée est donnée par $c'(t) = (1,1)$. Un paramétrisation de $\vec{D}$ est donnée par $d(t) = \left(t, t^2\right)$ avec $t \in (0,1)$ et on a $d'(t) = (1, 2t)$. Donc

$$\int_{\vec{C}} \mathbf{g} \cdot ds = \int_0^1 \left(t, t^2 - t\right) \cdot (1,1)\, dt = \int_0^1 t^2 dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{\vec{D}} \mathbf{g} \cdot ds &= \int_0^1 \left(t^2, t^3 - t^2\right) \cdot (1, 2t)\, dt = \int_0^1 \left(t^2 + 2t^4 - 2t^3\right) dt \\ &= \left.\frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} - \frac{t4}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{2} = \frac{7}{30}.\end{aligned}$$

Comme l'intégrale dépend du chemin, $\mathbf{g}$ ne peut pas admettre de potentiel scalaire.

b) $\mathbf{G}$ admet un potentiel scalaire sur Ω si et seulement si son rotationnel est nul $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned}
\partial_y G_1 &= -\alpha \sin(2x + y - z) \\
\partial_z G_1 &= \alpha \sin(2x + y - z) \\
\partial_x G_2 &= \beta\left(\cos(x+y)\sin(x-z) + \sin(x+y)\cos(x-z)\right) = \beta \sin(2x + y - z) \\
\partial_z G_2 &= -\beta \sin(x+y)\cos(x-z) \\
\partial_x G_3 &= \sin(x+y)\cos(x-z) + \cos(x+y)\sin(x-z) = \sin(2x+y-z) \\
\partial_y G_3 &= \sin(x+y)\cos(x-z)
\end{aligned}$$

et donc

$$\nabla \times \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \partial_y G_3 - \partial_z G_2 \\ -\partial_x G_3 + \partial_z G_1 \\ \partial_x G_2 - \partial_y G_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+\beta)\sin(x+y)\cos(x-z) \\ (-1+\alpha)\sin(2x+y-z) \\ (\beta+\alpha)\sin(2x+y-z) \end{bmatrix}.$$

Et on voit donc que $\nabla \times \mathbf{G} \equiv 0$ sur $\Omega \Leftrightarrow \alpha = 1$ et $\beta = -1$. Donc $\mathbf{G}$ admet un potentiel si et seulement si $\alpha = 1$ et $\beta = -1$. Dans ce cas,

$$\mathbf{G}(x,y,z) = \left(\cos(2x+y-z), -\sin(x+y)\sin(x-z), -\cos(x+y)\cos(x-z)\right).$$

Une fonction $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est un potentiel scalaire pour $\mathbf{G}$ si et seulement si elle satisfait

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi = \cos(2x+y-z) = \cos(x+y)\cos(x+z) - \sin(x+y)\sin(x-z) \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\phi = -\sin(x+y)\sin(x-z) \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\phi = -\cos(x+z)\cos(x-z). \tag{3}$$

En intégrant (2) par rapport à y, on trouve qu'il doit exister une fonction $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que

$$\phi(x, y, z) = \cos(x + y) \sin(x - z) + h(x, z).$$

En dérivant cette expression par rapport à x on trouve que (1) est satisfaite si $\frac{\partial}{\partial x} h = 0$ et en la dérivant par rapport à z, on trouve que (3) est satisfaite si $\frac{\partial}{\partial z} h = 0$. Donc

$$\phi(x, y, z) := \cos(x + y) \sin(x - z)$$

est un potentiel pour $\mathbf{G}$ et tous les potentiels pour $\mathbf{G}$ sont de la forme $\phi(x, y, z) + C$ pour une constante $C \in \mathbb{R}$.

Question 2

a) Théorème de la divergence : Soit $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel de classe C^1, soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine régulier dont le bord est $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} S_i$, où chaque S_i est une nappe régulière avec bord et soit $\mathbf{N} : \partial\Omega \to \mathbb{R}^3$ le champ de normales unitaires extérieures à Ω. Alors

$$\int_\Omega \nabla \cdot \mathbf{f} \, dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{N} \, dS.$$

b) Théorème de Stokes : Soit $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel de classe C^1, soit S une nappe orientée régulière de bord ∂S, soit $\mathbf{N} : S \to \mathbb{R}^3$ le champ de normales unitaires qui donne l'orientation de $\mathbf{S}$ et soit $\overrightarrow{\partial S}$ l'orientation positive de ∂S par rapport à $\mathbf{N}$. Alors

$$\int_S (\nabla \wedge \mathbf{f}) \cdot \mathbf{N} \, dS = \int_{\overrightarrow{\partial S}} \mathbf{f} \cdot d\ell.$$

c) La divergence de $\mathbf{f}$ est $\nabla \cdot \mathbf{f} = -y + 0 - y = -2y$. En utilisant ceci et le théorème de la divergence énoncé au point a, le flux de $\mathbf{f}$ à travers le bord du domaine Ω est donnée par

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \int_\Omega \nabla \cdot \mathbf{f} \, dV \\
&= -\iint_{\{(x,z): x^2 + (z-1)^2 < 1\}} \int_0^{\sqrt{1 - (x^2 + (z-1)^2)}} 2y \, dy \, dx \, dz \\
&= -\iint_{\{(x,z): x^2 + (z-1)^2 < 1\}} \left(1 - \left(x^2 + (z-1)^2\right)\right) dx \, dz \\
&= -\iint_{\{(x,z): x = \rho\cos\theta, z = 1 + \rho\sin\theta, \rho \in [0,1), \theta \in [0,2\pi)\}} \left(1 - \left(x^2 + (z-1)^2\right)\right) dx \, dz \\
&= -\int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(1 - \rho^2\right) \rho \, d\rho \, d\theta = -2\pi \int_0^1 \left(\rho - \rho^3\right) d\rho \\
&= -2\pi \left(\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4\right)\Big|_0^1 = -\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Le champ normal extérieur à Ω sur S_1 est donné par $\mathbf{N}(x, y, z) = (0, -1, 0)$ et donc, sur S_1,

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{N} = \left(0, x^2 + z^2, 0\right) \cdot (0, -1, 0) = -\left(x^2 + z^2\right) = -\left(x^2 + (z-1)^2 + 2(z-1) + 1\right).$$

Ainsi, le flux de $\mathbf{f}$ à travers S_1 dans la direction de la normale extérieure à Ω est

$$\begin{aligned}\int_{S_1} \mathbf{f}\cdot\mathbf{N}\,dS &= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\rho^2+2\rho\sin\theta+1\right)\rho\,d\rho\,d\theta \\ &= -2\pi\left(\frac{1}{4}\rho^4+\frac{1}{2}\rho^2\right)\Big|_0^1 = -2\pi\frac{3}{4} = -\frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

Comme le flux à travers $S_1\cup S_2=\partial\Omega$ est $-\frac{\pi}{2}$ et le flux à travers S_1 est $-\frac{3\pi}{2}$, on a que le flux à travers S_2 est $-\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}=\pi$.

d) $\mathbf{F}$ a un potentiel vecteur si et seulement si sa divergence est nulle.

$$\nabla\cdot\mathbf{F}=\nabla\cdot(\phi\mathbf{f})=\phi_x f_1+\phi_y f_2+\phi_z f_3+\phi\nabla\cdot\mathbf{f}=-yz\phi_z-2y\phi,$$

donc $\mathbf{F}$ admet un potentiel vecteur si et seulement si la fonction ϕ satisfait $2\phi+z\phi_z=0$. Avec la condition $\phi(1)=1$, on trouve que $\phi(z)=\frac{1}{z^2}$ et

$$\mathbf{F}(x,y,z)=\frac{1}{z^2}\left(-xy,x^2+z^2,-yz\right).$$

Le choix du potentiel vecteur pour $\mathbf{F}$ n'est pas unique : si ψ est un potentiel vecteur pour $\mathbf{F}$, alors pour toute fonction h de classe C^2, $\psi+\nabla h$ est aussi un potentiel vecteur pour $\mathbf{F}$. Cherchons maintenant un potentiel vecteur $\psi(x,y,z)$ de la forme $(\psi_1,0,\psi_3)$, c'est-à-dire qu'il satisfait

$$\mathbf{F}=\nabla\wedge\psi=\left(\frac{\partial}{\partial y}\psi_3,\frac{\partial}{\partial z}\psi_1-\frac{\partial}{\partial x}\psi_3,-\frac{\partial}{\partial y}\psi_1\right).$$

Ceci implique (en utilisant les égalités sur les première et troisième composantes) qu'il existe des fonctions α et β telles que

$$\begin{aligned}\psi_3(x,y,z)&=\int_0^y F_1(x,u,z)\,du+\alpha(x,z)=-\frac{x}{z^2}\int_0^y u\,du+\alpha(x,z)=-\frac{xy^2}{2z^2}+\alpha(x,z)\\ \psi_1(x,y,z)&=-\int_0^y F_3(x,u,z)\,du+\beta(x,z)=\frac{1}{z}\int_0^y u\,du+\beta(x,z)=\frac{y^2}{2z}+\beta(x,z).\end{aligned}$$

L'égalité sur la deuxième composante devient donc

$$F_2(x,y,z)=\frac{x^2}{z^2}+1=\frac{\partial}{\partial z}\psi_1-\frac{\partial}{\partial x}\psi_3=-\frac{y^2}{2z^2}+\frac{\partial\beta}{\partial z}(x,z)+\frac{y^2}{2z^2}-\frac{\partial\alpha}{\partial x}(x,z)$$

qui se simplifie en

$$\frac{\partial\beta}{\partial z}(x,z)-\frac{\partial\alpha}{\partial x}(x,z)=\frac{x^2}{z^2}+1.$$

Cette égalité est satisfaite par exemple pour $\alpha(x,z)=0$ et $\beta(x,z)=z-\frac{x^2}{z}$. Donc un potentiel vecteur pour $\mathbf{F}$ est donné par

$$\psi(x,y,z)=\left(\frac{y^2}{2z}+z-\frac{x^2}{z},0,-\frac{xy^2}{2z^2}\right).$$

e) En utilisant le potentiel vecteur ψ trouvé au point d et le théorème de Stokes énoncé au point b, le flux de $\mathbf{F}$ à travers S_i pour $i=1,2$ est donné par

$$\int_{S_i}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}_i\,dS=\int_{S_i}(\nabla\wedge\psi)\cdot\mathbf{N}_i\,dS=\int_{\overrightarrow{\partial S_i}}\psi\cdot d\ell$$

où $\mathbf{N}_i$ est le champ de normales unitaires extérieures à Ω sur S_i et $\overrightarrow{\partial S_i}$ est le bord de ∂S_i parcouru dans le sens positif par rapport à $\mathbf{N}_i$. Or $\partial S_1 = \partial S_2$ et l'orientation positive de ∂S_1 par rapport à $\mathbf{N}_1$ correspond à l'orientation négative de ∂S_2 par rapport à $\mathbf{N}_2$. On a donc que

$$\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1 \, dS = \int_{\overrightarrow{\partial S_1}} \psi \cdot d\ell = -\int_{\overrightarrow{\partial S_2}} \psi \cdot d\ell$$

et que le flux de $\mathbf{F}$ à travers $S_1 \cup S_2$ est nul.
Le bord de S_2 est un cercle de rayon 1 qu'on peut paramétrer par $\mathbf{x}(\theta) = (\cos\theta, 0, \sin\theta + 1)$ pour $\theta \in [0, 2\pi)$ de sorte qu'il soit parcouru dans le sens positif par rapport à $\mathbf{N}_2$. On a $\mathbf{x}'(\theta) = (-\sin\theta, 0, \cos\theta)$ et donc la tangente unitaire à ∂S_2 orientée dans le sens positif par rapport à $\mathbf{N}_2$ est donnée par $\mathbf{T}(\theta) = \mathbf{x}'(\theta)$. Donc

$$\begin{aligned}
\int_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \int_{\overrightarrow{\partial S_2}} \psi \cdot d\ell = \int_0^{2\pi} \psi(\mathbf{x}(\theta)) \cdot \mathbf{x}'(\theta) \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left((\sin\theta + 1) - \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta + 1} \right) \sin\theta \, d\theta.
\end{aligned}$$

La valeur de l'intégrale $\int_{\overrightarrow{\partial S_2}} \psi \cdot d\ell$ ne dépend pas du potentiel ψ choisi.

Question 3

a) Pour $u(x,t) = \cos(\alpha t + \beta x)$, on a

$$\begin{aligned}
u_t(x,t) &= -\alpha \sin(\alpha t + \beta x) \\
u_x(x,t) &= -\beta \sin(\alpha t + \beta x) \\
u_{xx}(x,t) &= -\beta^2 \cos(\alpha t + \beta x) \\
u_{xxx}(x,t) &= \beta^3 \sin(\alpha t + \beta x).
\end{aligned}$$

Comme $\alpha + \beta^3 = 0$, c'est bien une solution de l'EDP.
Pour $u(x,t) = \sin(\alpha t + \beta x)$, on a

$$\begin{aligned}
u_t(x,t) &= \alpha \cos(\alpha t + \beta x) \\
u_x(x,t) &= \beta \cos(\alpha t + \beta x) \\
u_{xx}(x,t) &= -\beta^2 \sin(\alpha t + \beta x) \\
u_{xxx}(x,t) &= -\beta^3 \cos(\alpha t + \beta x).
\end{aligned}$$

Comme $\alpha + \beta^3 = 0$, c'est bien une solution de l'EDP (1).

b) On a

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \cos(\alpha_n t + \beta_n x) + B_n \sin(\alpha_n t + \beta_n x) \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \left(\cos(\alpha_n t) \cos(\beta_n x) - \sin(\alpha_n t) \sin(\beta_n x) \right) \right. \\
&\qquad \left. + B_n \left(\sin(\alpha_n t) \cos(\beta_n x) + \cos(\alpha_n t) \sin(\beta_n x) \right) \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\cos(\alpha_n t) \left(A_n \cos(\beta_n x) + B_n \sin(\beta_n x) \right) \right. \\
&\qquad \left. + \sin(\alpha_n t) \left(B_n \cos(\beta_n x) - A_n \sin(\beta_n x) \right) \right]
\end{aligned}$$

Pour trouver α_n et β_n :

- Chaque terme de la série (2) est une solution de (1) si $\alpha_n + \beta_n^3 = 0$.
- On utilise les conditions de bord (3) pour trouver les valeurs de α_n et β_n. Elles reviennent à $\forall n > 0, \forall t > 0$:

$$\begin{cases} \cos(\alpha_n t - \beta_n \pi) = \cos(\alpha_n t + \beta_n \pi) \\ \sin(\alpha_n t - \beta_n \pi) = \sin(\alpha_n t + \beta_n \pi) \end{cases} \implies \begin{cases} \sin(\alpha_n t)\sin(\beta_n \pi) = 0 \\ \cos(\alpha_n t)\sin(\beta_n \pi) = 0. \end{cases}$$

Donc $\sin(\beta_n \pi) = 0$ pour tout $n > 0 \iff \beta_n = n$ et donc $\alpha_n = -n^3$.

Pour trouver A_n et B_n, on utilise la condition initiale (4) :

- Comme la donnée $u(x, 0)$ est une fonction impaire, on a $A_n = 0$ pour tout $n \geq 0$.
- Pour $n > 0$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(y,0)\sin(ny)\,dy = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(ny)\,dy \\ &= \frac{2}{n\pi}(1 - \cos(n\pi)) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

et de la même manière, $B_0 = 0$.

Au final,

$$u(x,t) \sim \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\left(-8n^3 t + 2nx\right)$$

c) i) Oui si $f(x)$ est dans $L^2(-\pi, \pi)$ car l'ensemble $\{\sin nx, \cos nx\}$ est complet dans $L^2(-\pi, \pi)$ puisque ses éléments sont des fonctions propres du problème auto-adjoint $\frac{d^2}{dx^2}y = -\lambda y$ avec les conditions de bord périodiques $y(-\pi) = y(\pi)$ et $y'(-\pi) = y'(\pi)$.

ii) A) $\lim_{N\to\infty}(S_N f)\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

B) $\lim_{N\to\infty}(S_N f)\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.

C) $\lim_{N\to\infty}(S_N f)(0) = \frac{1}{2}\left(f(0^+) + f(0^-)\right) = \frac{1}{2}(-1+0) = -\frac{1}{2}$.

D) $\lim_{N\to\infty}(S_N f)(\pi) = \frac{1}{2}\left(f(\pi) + f(-\pi)\right) = \frac{\pi - 1}{2}$

E) $\int_{-\pi}^{\pi}\left((S_N f)(x)\right)^2 dx = \|S_N f\|^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} \|f\|^2 = \int_0^{\pi}(x-1)^2\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{3} - \pi^2 + \pi$