ANALYSE III **Corrigé examen** 2017

Question 1

I. A) Une paramétrisation possible est $S = \operatorname{Im} \alpha$ avec

$$\begin{aligned} \alpha : (0, \Theta) \times (0, \pi/2) &\to \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \phi) &\mapsto R \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

B) i. Ce flux est défini par $\displaystyle\int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma$.

ii. En utilisant la paramétrisation α on trouve que le champ de vecteurs normal unitaire est $\mathbf{N}(\alpha(\theta, \phi)) = \frac{1}{R}\alpha(\theta, \phi)$ et que $|\partial_\theta \alpha \wedge \partial_\phi \alpha| = R^2 \cos\phi$.

a) $\displaystyle\int_S \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \cdot \mathbf{N}(x, y, z) \, d\sigma = \int_0^\Theta \int_0^{\pi/2} \alpha(\theta, \phi) \cdot \frac{1}{R}\alpha(\theta, \phi) R^2 \cos\phi \, d\theta \, d\phi = \int_0^\Theta \int_0^{\pi/2} R^3 \cos\phi \, d\theta \, d\phi = R^3 \, \Theta$.

b) $\displaystyle\int_S \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mathbf{N}(x, y, z) \, d\sigma = \int_0^\Theta \int_0^{\pi/2} \sin\phi \, R^2 \cos\phi \, d\theta \, d\phi = \frac{R^2 \, \Theta}{2} \int_0^{\pi/2} \sin(2\phi) \, d\phi = \frac{R^2 \, \Theta}{2}$.

II. a) Soient $\mathbf{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ et V un volume régulier. Soit $\mathbf{N} : \partial V \to \mathbb{R}^3$ le champ de normales unitaires extérieures à V. Alors

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{f} \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial V} \mathbf{f} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma$$

b) Notons $S(R_1)$ (resp. $S(R_2)$) la surface S du point I. avec $R = R_1$ (resp. $R = R_2$) et

$$\begin{aligned} C_1 &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : R_1^2 < x^2 + y^2 + z^2 < R_2^2, \, z = 0 \text{ et } 0 < y < x \tan\Theta\right\} \\ C_2 &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : R_1^2 < x^2 + y^2 + z^2 < R_2^2, \, z > 0 \text{ et } y = 0\right\} \\ C_3 &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : R_1^2 < x^2 + y^2 + z^2 < R_2^2, \, z > 0 \text{ et } y = x \tan\Theta\right\}. \end{aligned}$$

Alors le bord de V est $\partial V = S(R_1) \cup S(R_2) \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3$. Soit $\mathbf{N} : \partial V \to \mathbb{R}^3$ le champ de normales unitaires extérieures à V ; sur $S(R_2)$ le champ $\mathbf{N}$ coïncide avec le champ de vecteurs normal unitaire correspondant du point I. alors que sur $S(R_1)$ le champ $\mathbf{N}$ est l'opposé du champ de vecteurs normal unitaire correspondant ; de plus pour tous $(x, y, z) \in C_1$ on a $\mathbf{N}(x, y, z) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, pour tous $(x,y,z) \in C_2$, $\mathbf{N}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et pour tous $(x,y,z) \in C_3$, $\mathbf{N}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\sin\Theta \\ \cos\Theta \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors le volume de V est

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(V) &= \int_V 1\, dV = \frac{1}{3}\int_V \nabla\cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dV \overset{\substack{\text{thm div} \\ \downarrow}}{=} \frac{1}{3}\int_{\partial V} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\cdot \mathbf{N}(x,y,z)\, d\sigma \\
&= \frac{1}{3}\int_{S(R_1)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\cdot \mathbf{N}(x,y,z)\, d\sigma + \frac{1}{3}\int_{S(R_2)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\cdot \mathbf{N}(x,y,z)\, d\sigma \\
&\quad + \frac{1}{3}\int_{C_1\cup C_2\cup C_3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\cdot \mathbf{N}(x,y,z)\, d\sigma = -\frac{R_1^3\,\Theta}{3} + \frac{R_2^3\,\Theta}{3} + 0 \\
&= \frac{\Theta}{3}\left(R_2^3 - R_1^3\right).
\end{aligned}$$

c) La divergence de $\mathbf{f}(x,y,z) = (0,0,1)$ est $\nabla\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ pour tous $(x,y,z) \in V$. Donc $\displaystyle\int_V \nabla\cdot\mathbf{f}\, dV = 0$.

D'autre part, en utilisant le point I. B) ii. b) on voit que $\displaystyle\int_{S(R_1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\mathbf{N}(x,y,z)\, d\sigma = -\frac{R_1^2\,\Theta}{2}$ et $\displaystyle\int_{S(R_2)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\mathbf{N}(x,y,z)\, d\sigma = \frac{R_2^2\,\Theta}{2}$. Et en utilisant les normales sur C_1, C_2 et C_3 calculées au point précédent, $\displaystyle\int_{C_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\mathbf{N}(x,y,z)\, d\sigma = \int_{C_1} (-1)\, d\sigma = -\mathrm{Aire}(C_1) = -\frac{\Theta}{2}\left(R_2^2 - R_1^2\right)$ et $\displaystyle\int_{C_2\cup C_3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\mathbf{N}(x,y,z)\, d\sigma = 0$. Donc $\displaystyle\int_{\partial V} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\mathbf{N}(x,y,z)\, d\sigma = 0$. Ainsi, les deux termes de l'égalité du théorème de la divergence cité au point a) sont nuls et le théorème est donc vérifié pour $\mathbf{f}(x,y,z) = (0,0,1)$.

Question 2

I. a) Comme $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla\phi(\mathbf{x})$ pour tous $\mathbf{x} \in \Omega$, les composantes du rotationnel de $\mathbf{f}$ s'écrivent $\pm\left(\partial_{x_i} f_j(\mathbf{x}) - \partial_{x_j} f_i(\mathbf{x})\right) = \pm\left(\partial_{x_i}\partial_{x_j}\phi(\mathbf{x}) - \partial_{x_j}\partial_{x_i}\phi(\mathbf{x})\right)$ pour tous $x \in \Omega$ et pour $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$ et comme $\phi \in C^\infty$, $\partial_{x_i}\partial_{x_j}\phi(\mathbf{x}) - \partial_{x_j}\partial_{x_i}\phi(\mathbf{x}) = 0$.

b) Soit $\overrightarrow{C} \subset \Omega$ un chemin orienté fermé et soit $\alpha : (0, L) \to \overrightarrow{C}$ une paramétrisation régulière de ce chemin. Alors

$$\begin{aligned}\int_{\overrightarrow{C}} \mathbf{f} \cdot d\ell &= \int_0^L \mathbf{f}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt = \int_0^L \nabla\phi(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt \\ &= \int_0^L \frac{d}{dt}\phi(\alpha(t))\, dt = \phi(\alpha(L)) - \phi(\alpha(0)) = 0\end{aligned}$$

car $\overrightarrow{C} = \operatorname{Im}\alpha$ est un chemin fermé.

Remarque Si Ω était simplement connexe, on pourrait utiliser la méthode suivante : soit $S \subset \Omega$ une nappe régulière telle que $\partial S = \overrightarrow{C}$. Alors par le théorème de Stokes et le point précédent,

$$\int_{\overrightarrow{C}} \mathbf{f} \cdot d\ell = \int_S (\nabla \wedge \mathbf{f})\, d\sigma = 0.$$

Comme ici, Ω est un ouvert connexe, le théorème de Stokes ne s'applique pas.

II. a) <u>Potentiel scalaire</u> : $\mathbf{g}$ a un potentiel scalaire sur Ω_1 car Ω_1 est simplement connexe, $\mathbf{g} \in C^\infty(\Omega_1)$ et $\nabla \wedge \mathbf{g} = 0$ sur Ω_1. Il existe donc $\phi \in C^\infty(\Omega_1)$ tel que $\nabla\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ pour tous $\mathbf{x} \in \Omega_1$. On trouve $\phi(x, y, z) = \frac{-1}{2\sin(x^2+y^2)} + \text{cste}$.

Comme $\Omega_1\Omega_2$ et la fonction ϕ qu'on a trouvée pour Ω_1 satisfait $\phi \in C^\infty(\Omega_2)$ et $\nabla\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ pour tous $\mathbf{x} \in \Omega_2$, alors $\mathbf{g}$ a un potentiel scalaire sur Ω_2.

<u>Potentiel vecteur</u> : La divergence de $\mathbf{g}$ est $\nabla \cdot \mathbf{g}(x, y, z) = \frac{2\cos(x^2+y^2)}{\sin(x^2+y^2)} - \frac{2(x^2+y^2)}{\sin(x^2+y^2)} - \frac{4(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)}{\sin^3(x^2+y^2)}$, elle n'est donc pas identiquement nulle sur Ω_1 donc cette condition nécessaire à l'existence d'un potentiel vecteur n'est pas remplie. Ainsi, $\mathbf{g}$ n'a pas de potentiel vecteur sur Ω_1 et comme $\Omega_1 \subset \Omega_2$, $\mathbf{g}$ n'a pas non plus de potentiel vecteur sur Ω_2.

b) <u>Potentiel scalaire</u> : $\mathbf{f}$ a un potentiel scalaire sur Ω_1 car Ω_1 est simplement connexe, $\mathbf{f} \in C^\infty(\Omega_1)$ et $\nabla \wedge \mathbf{f} = 0$ sur Ω_1. Il existe donc $\phi \in C^\infty(\Omega_1)$ tel que $\nabla\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ pour tous $\mathbf{x} \in \Omega_1$. On trouve $\phi(x, y, z) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \text{cste} = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \text{cste}$.

ϕ est continue sur Ω_1 mais pas sur Ω_2, par conséquent l'existence d'un potentiel scalaire pour $\mathbf{f}$ sur Ω_2 n'est pas garantie. En choisissant le chemin orienté fermé $\overrightarrow{C} \subset \Omega_2$ paramétré par $\gamma(t) = \begin{pmatrix}\cos t \\ \sin t \\ 0\end{pmatrix}$ pour $t \in [0, 2\pi)$, on voit que

$$\int_{\overrightarrow{C}} \mathbf{f} \cdot d\ell = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix}-\sin t \\ \cos t \\ 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-\sin t \\ \cos t \\ 0\end{pmatrix} dt = 1 \neq 0.$$

Par conséquent, $\mathbf{f}$ n'admet pas de potentiel scalaire sur Ω_2.

<u>Potentiel vecteur</u> : $\mathbf{f}$ admet un potentiel vecteur sur Ω_1. En effet, $\mathbf{f} \in C^\infty(\Omega_1)$, $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$ sur Ω_1 et Ω_1 est un domaine étoilé. Par conséquent, il existe $\Psi \in C^\infty(\Omega_1)$ tel que $\mathbf{f} = \nabla \wedge \Psi$. On trouve $\Psi(x, y) = \frac{z}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}x \\ y \\ 0\end{pmatrix} + \nabla\phi(x, y) + \text{cste}$ où $\phi \in C^\infty(\Omega_1)$ est une fonction quelconque.

On peut prolonger Ψ à Ω_2 et on voit que $\Psi \in C^\infty(\Omega_2)$ et $\nabla \wedge \Psi = \mathbf{f}$ sur Ω_2. Par conséquent, $\mathbf{f}$ admet Ψ comme potentiel vecteur sur Ω_2.

Question 3

Supposons que $u\left(x,t\right)$ satisfaisant

$$\begin{aligned}&\partial_t^2 u = \partial_x^2 u + \gamma^2 u\\ &u\left(0,t\right) = 0 = u\left(1,t\right)\end{aligned} \tag{1}$$

peut s'écrire sous la forme $u\left(x,t\right) = f\left(x\right) g\left(t\right)$ pour $x \in (0,1)$ et $t > 0$. Dans ce cas, il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned}&g''\left(t\right) = \lambda g\left(t\right) \quad \forall\, t > 0\\ &f''\left(x\right) + \gamma^2 f\left(x\right) = \lambda f\left(x\right) \;\Leftrightarrow\; f''\left(x\right) = \left(\lambda - \gamma^2\right) f\left(x\right) \quad \forall\, 0 < x < 1\end{aligned}$$

et f satisfait aussi $f\left(0\right) = 0 = f\left(1\right)$. Par conséquent, f est de la forme $f\left(x\right) = C \sin\left(x\sqrt{\gamma^2 - \lambda}\right)$ avec $\sqrt{\gamma^2 - \lambda} = k\pi \Leftrightarrow \lambda = \gamma^2 - k^2\pi^2$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Les solutions correspondantes pour g sont

$$\begin{aligned}&g\left(t\right) = A\, e^{t\sqrt{\lambda}} + B\, e^{-t\sqrt{\lambda}} && \text{si } \lambda > 0 \Leftrightarrow k\pi < \gamma\\ &g\left(t\right) = A + B\, t && \text{si } \lambda = 0 \Leftrightarrow k\pi = \gamma\\ &g\left(t\right) = A\,\cos\left(t\sqrt{-\lambda}\right) + B\,\sin\left(t\sqrt{-\lambda}\right) && \text{si } \lambda < 0 \Leftrightarrow k\pi > \gamma\end{aligned}$$

a) Avec $\gamma = 2\pi$, la solution générale s'écrit donc

$$\begin{aligned}u\left(x,t\right) = &\left(A_1 e^{t\sqrt{3}\,\pi} + B_1 e^{-t\sqrt{3}\,\pi}\right)\sin\left(\pi\, x\right) + \left(A_2 + B_2\, t\right)\sin\left(2\pi\, x\right)\\ &+ \sum_{k=3}^{\infty}\left(A_k\,\cos\left(t\sqrt{k^2-4}\,\pi\right) + B_k\,\sin\left(t\sqrt{k^2-4}\,\pi\right)\right)\sin\left(k\pi\, x\right)\end{aligned} \tag{2}$$

Il reste alors à choisir les coefficients A_k et B_k de sorte que $u\left(x,t\right)$ satisfasse les conditions initiales voulues. Pour les conditions initiales (i) on trouve

$$u\left(x,t\right) = 3\cos\left(t\sqrt{5}\,\pi\right)\sin\left(3\pi\, x\right) + \frac{1}{\sqrt{12}\,\pi}\sin\left(t\sqrt{12}\,\pi\right)\sin\left(4\pi\, x\right) + 6\cos\left(t\sqrt{32}\,\pi\right)\sin\left(6\pi\, x\right)$$

et pour les conditions initiales (ii)

$$\begin{aligned}u\left(x,t\right) = &\left(\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}\,\pi}\right)e^{t\sqrt{3}\,\pi} + \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}\,\pi}\right)e^{-t\sqrt{3}\,\pi}\right)\sin\left(\pi\, x\right) + 25\sin\left(2\pi\, x\right)\\ &+ \frac{3}{\sqrt{12}\,\pi}\sin\left(t\sqrt{12}\,\pi\right)\sin\left(4\pi\, x\right)\end{aligned}$$

b) La solution est toujours de la forme (2) et on cherche les coefficients A_k et B_k tels qu'elle satisfasse les conditions initiales (iii), c'est à dire

$$\begin{aligned}&\phi\left(x\right) = \left(A_1 + B_1\right)\sin\left(\pi\, x\right) + \sum_{k=2}^{\infty} A_k \sin\left(k\pi\, x\right)\\ &\psi\left(x\right) = \sqrt{3}\,\pi\left(A_1 - B_1\right)\sin\left(\pi\, x\right) + B_2\sin\left(2\pi\, x\right) + \sum_{k=3}^{\infty} B_k\sqrt{k^2-4}\,\pi\,\sin\left(k\pi\, x\right).\end{aligned}$$

Les A_k et B_k existent car $\phi, \psi \in L^2(0,1)$ et on sait que $\{\sin(k\pi\, x) : k \in \mathbb{N}\}$ est une base pour $L^2(0,1)$. Dès lors, les coefficients doivent satisfaire les équations suivantes :

$$\begin{aligned} A_1 + B_1 &= 2\int_0^1 \phi(x)\,\sin(\pi\, x)\; dx \\ A_k &= 2\int_0^1 \phi(x)\,\sin(k\pi\, x)\; dx \quad \forall k \geq 2 \\ \sqrt{3}\,\pi\,(A_1 - B_1) &= 2\int_0^1 \psi(x)\,\sin(\pi\, x)\; dx \\ B_2 &= 2\int_0^1 \psi(x)\,\sin(2\pi\, x)\; dx \\ B_k\,\sqrt{k^2-4}\,\pi &= 2\int_0^1 \psi(x)\,\sin(k\pi\, x)\; dx \quad \forall k \geq 3. \end{aligned}$$

c) Si $|\gamma| < \pi$ alors toutes les valeurs propres λ du problème (1) sont négatives, donc la solution de pour les conditions initiales (iii) s'écrit

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos\left(t\,\sqrt{k^2\pi^2-\gamma^2}\right) + B_k \sin\left(t\,\sqrt{k^2\pi^2-\gamma^2}\right)\right) \sin(k\pi\, x)$$

où les coefficients A_k et B_k sont calculés de manière similaire au point précédent. La solution est donc bornée quand $t \to \infty$. Si $|\gamma| \geq \pi$ alors le problème (1) a des valeurs propres λ non négatives et alors la solution n'est pas nécessairement bornée quand $t \to \infty$.