EPFL Section : **PH**
Prof John H. Maddocks

ANALYSE III **Corrigé Série 10** 24 Novembre 2017

---

1. a) i. L'ensemble Π_0 peut être vu comme l'intérieur d'un carré (contenu dans le plan $z = 0$). Il est donc connexe par arc, car il existe un chemin contenu dans Π_0 entre toutes paire de points appartenant à Π_0 ; il est simplement connexe, car tout chemin fermé contenu dans Π_0 peut être déformé en tout autre chemin fermé contenu dans Π_0 en restant dans Π_0 ; et finalement il est étoilé par rapport à l'origine $(0, 0, 0)$, car il existe un segment de droite, contenu dans Π_0, entre l'origine et tout points de Π_0.

   ii. L'ensemble C_0 peut être vu comme l'intérieur d'un cube. En argumentant de manière similaire que pour l'ensemble Π_0 on se convainc que C_0 est connexe par arcs, simplement connexe et étoilé par rapport à l'origine $(0, 0, 0)$.

   b) i. Comme pour l'ensemble Π_0, l'ensemble Π_1 est connexe par arc. Il n'est cependant pas simplement connexe car les chemins fermés ne contenant pas l'origine ne peuvent être déformés *de manière continue et en restant de* Π_1 en chemin fermés contenant l'origine. Il n'est pas non plus étoilé car il n'existe pas de point dans Π_1 tel que l'on puisse atteindre tout autres points par un segment de droite *en restant dans* Π_1.

   ii. Comme pour l'ensemble C_0, l'ensemble C_1 est connexe par arc. Il est simplement connexe, contrairement à Π_1, car tout chemin fermé contenu dans C_1 peut être déformé en tout autre chemin fermé contenu dans C_1 en restant dans C_1. En argumentant de manière similaire que pour l'ensemble Π_1 on se convainc que C_1 n'est pas étoilé.

   c) i. L'ensemble Π_2 n'est pas connexe par arc car il n'existe pas de chemin entre les points de la forme $(x, a, 0)$ et $(x, -a, 0)$ (avec $a > 0$). Il n'est donc ni simplement connexe ni étoilé.

   ii. L'ensemble C_2 est connexe par arc. Il n'est pas simplement connexe car les chemins fermés ne passant pas 'autour' de la droite $\{y = 0$ et $z = 0\}$ ne peuvent être déformés *de manière continue et en restant de* C_2 en chemin fermés passant 'autour' de cette droite.En argumentant de manière similaire que pour l'ensemble C_1 on se convainc que C_2 n'est pas étoilé.

   d) L'ensemble C_3 est connexe par arc. Il est simplement connexe (contrairement à l'ensemble C_2) car tous les chemins passant 'autour' de la demi droite $\{x \leq 0, y = 0$ et $z = 0\}$ peuvent être déformés *de manière continue et en restant de* C_3 en chemin fermés ne passant pas 'autour' de cette demi droite. Il est étoilé par rapport au point $(0.5, 0, 0)$, par exemple (contrairement à l'ensemble C_2).

e) L'ensemble S est une sphère où il 'manque' un point. Cet ensemble est connexe par arc, simplement connexe (contrairement à Π_1 !), mais pas étoilé.

2. a) Supposons d'abord i. Soit C un chemin fermé et $p, q \in C$ avec $p \neq q$. Comme $p \neq q$, on peut découper C en exactement deux chemins $\overrightarrow{C_1}$ et $\overrightarrow{C_2}$ qui vont tout les deux de p à q. Conséquement

$$\int_{\overrightarrow{C}} f \cdot \mathrm{d}\ell = \int_{\overrightarrow{C_1}} f \cdot \mathrm{d}\ell - \int_{\overrightarrow{C_2}} f \cdot \mathrm{d}\ell = 0$$

par hypothèse. Comme cet argument ne dépend pas du choix de C, on conclut de ii.

Réciproquement, en supposant ii. Soit $p, q \in \Omega$ avec $p \neq q$, et $\overrightarrow{C_1}$ et $\overrightarrow{C_2}$ deux chemin de p à q.

Cas 1. Si $\overrightarrow{C_1} \neq \overrightarrow{C_2}$ et que $\overrightarrow{C_1} \cap \overrightarrow{C_2} = \{p, q\}$, alors on peut faire de $C = C_1 \cup C_2$ un chemin fermé (en renversant le sens de parcours de $\overrightarrow{C_2}$ par exemple) et donc

$$0 = \int_{\overrightarrow{C}} f \cdot \mathrm{d}\ell = \int_{\overrightarrow{C_1}} f \cdot \mathrm{d}\ell - \int_{\overrightarrow{C_2}} f \cdot \mathrm{d}\ell$$

par hypothèse. Comme cet argument ne dépend pas du choix de p et q, on conclut de ii.

Cas 2. Si $\overrightarrow{C_1} \neq \overrightarrow{C_2}$ et que les chemins $\overrightarrow{C_1}, \overrightarrow{C_2}$ s'intersectent en un troisième point a (comme dans le cas où il forme un 'huit' par exemple) alors on définit $\overrightarrow{C_i^{(1)}} \subset \overrightarrow{C_i}$ pour $i = 1, 2$ les sous-chemins respectifs allant de p à a, et $\overrightarrow{C_i^{(2)}} \subset \overrightarrow{C_i}$ pour $i = 1, 2$ les sous-chemins respectifs allant de a à q, et on observe que l'on peut faire de $C^{(j)} = C_1^{(j)} \cup C_2^{(j)}$ un chemin fermé pour $j = 1, 2$. On peut donc utiliser le Cas 1. sur chaque sous-chemins $C^{(j)}$ et conclure de ii. en ressemblant les chemins originaux $\overrightarrow{C_1}$ et $\overrightarrow{C_2}$. On utilise le même argument pour un nombre quelconque, mais fini, d'intersections.

Cas 3. Il n'est pas possible que le nombre d'intersections soit infini et que les courbes soit différentes et régulières. Il ne reste donc que le cas $C_1 = C_2$ qui est trivial.

b) On simplement que i. $\iff (\nabla f(x))_{ij} - (\nabla f(x))_{ji} = 0$, $\forall 1 \leq i, j \leq 3 \iff (\nabla \wedge f(x))_k = 0$, $\forall 1 \leq k \leq 3 \iff$ ii. Car $(\nabla \wedge f(x))_1 = \partial_{x_2} f_3(x) - \partial_{x_3} f_2(x)$ et de même pour les autres composantes.

3. a) On calcule les termes extra-diagonaux de la matrice Jacobienne : $\partial_1 f_2(x, y) = 2y$ et $\partial_2 f_1(x, y) = 2y$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et donc

$$\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 = 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

En appliquant l'énoncé de cet exercice on conclut qu'il existe un potentiel scalaire pour f sur $\mathbb{R}^2$.

Noter que l'on verra que l'existence d'un potentiel scalaire pour un champ f sur un domaine Ω est assurrée si $\nabla f = \nabla f^T$ sur Ω <u>et</u> Ω est *simplement connexe.*

Cherchons alors $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ telle que $\partial_1\varphi = f_1$ et $\partial_2\varphi = f_2$. On a donc le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) & = & x^2+y^2 \\[2ex] \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) & = & 2xy. \end{cases}$$

La première ligne donne

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = x^2+y^2 \Rightarrow \varphi(x,y) = \frac{x^3}{3} + xy^2 + g(y) \text{ où } g \in C^1(\mathbb{R}).$$

En insérant ceci dans la deuxième on trouve $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = 2xy + g'(y)$. Il faut donc choisir g telle que $2xy + g'(y) = 2xy$. Donc $g(y) = C$ (une constante). Ainsi $f = \nabla\varphi$ où

$$\varphi(x,y) = x^3/3 + xy^2 + C.$$

On peut aussi calculer φ par la formule :

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= \int_0^1 \langle f(tx,ty),(x,y)\rangle \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \{(tx)^2+(ty)^2\}x + 2(tx)(ty)y \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{xy^2}{3} + \frac{2xy^2}{3} = \frac{x^3}{3} + xy^2 + C. \end{aligned}$$

b) $\partial_1 f_2(x,y) = 2y$ et $\partial_2 f_1(x,y) = -2y$. Donc $\partial_1 f_2(x,y) = \partial_2 f_1(x,y) \Leftrightarrow y = 0$. Ainsi il n'y a aucun sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f dérive d'un potentiel.

c) $\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 2y & 0 \\ 0 & 0 & -2z \\ 2x & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $\nabla f(x,y,z)$ est symétrique $\Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$. Il n'y a donc aucun sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^3$ sur lequel f dérive d'un potentiel.

d) On trouve $\nabla \wedge f = 0$ sur $\mathbb{R}^3$, ou de manière équivalente

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6y\cos z & 6x\cos z & -6xy\sin z \\ 6x\cos z & 0 & -3x^2\sin z \\ -6xy\sin z & -3x^2\sin z & -3x^2y\cos z \end{pmatrix}.$$

Donc $\nabla f(x,y,z)$ est symétrique sur $\mathbb{R}^3$. On conclut donc de l'existence d'un potentiel scalaire pour f par l'énoncé de l'exercice (ou par le fait que

$\mathbb{R}^3$ est simplement connexe). Cherchons donc $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^3)$ telle que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y,z) = 6xy\cos z \tag{1}$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y,z) = 3x^2\cos z \tag{2}$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x,y,z) = -3x^2 y\sin z. \tag{3}$$

(1) implique que $\varphi(x,y,z) = 3x^2 y\cos z + g(y,z)$ où $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Ensuite (2) implique

$$3x^2\cos z + \frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = 3x^2\cos z.$$

Donc

$$\frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = 0 \Rightarrow g(y,z) = h(z) \quad \text{où } h \in C^1(\mathbb{R}).$$

Donc $\varphi(x,y) = 3x^2 y\cos z + h(z)$. Enfin (3) implique

$$-3x^2 y\sin z + h'(z) = -3x^2 y\sin z \Rightarrow h(z) = c\,(\text{constante}).$$

D'où $\varphi(x,y,z) = 3x^2 y\cos z + c$ est un potentiel pour f sur $\mathbb{R}^3$.

4. (a) En notant $r^2 = x^2 + y^2$, on trouve pour tous $(x,y,z) \in \Omega$

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{2xy}{r^4} & -\frac{1}{r^2} + \frac{2y^2}{r^4} & 0 \\ \frac{1}{r^2} - \frac{2x^2}{r^4} & -\frac{2xy}{r^4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où

$$-\frac{1}{r^2} + \frac{2y^2}{r^4} = \frac{-x^2 - y^2 + 2y^2}{r^4} = \frac{y^2 - x^2}{r^4}$$

et

$$\frac{1}{r^2} - \frac{2x^2}{r^4} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{r^4} = \frac{y^2 - x^2}{r^4}.$$

Donc ∇f est symétrique sur Ω.

Pour montrer qu'il n'existe pas potentiel pour f montrons qu'il existe un chemin fermé tel que l'intégrale sur ce chemin est non nul.

On paramétrise le chemin C par $\alpha(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ avec $\theta \in [0, 2\pi]$, et on trouve

$$\begin{aligned}\int_{\vec{C}} f \cdot \mathrm{d}\ell &= \int_0^{2\pi} \langle f(\alpha(\theta)), \alpha'(\theta)\rangle \,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \langle(-\sin\theta, \cos\theta, 0), (-\sin\theta, \cos\theta, 0)\rangle \,\mathrm{d}\theta = 2\pi \neq 0,\end{aligned}$$

où $\vec{C}$ a l'orientation engendrée par $\alpha(\theta)$. On conclut donc, par le théorème 7.2 du polycopié du Prof. C. Stuart et l'exercice 2., que f ne dérive pas d'un potentiel sur Ω.

(b) i. Soit $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ une représentation paramétrique d'un chemin fermé dans $\mathbb{R}^N$. Alors, il existe $t_1, ..., t_{k+1} \in [a,b]$ tq. $\alpha \in C^1([t_i, t_{i+1}])$, $\alpha \in C([a,b])$, $t_1 = a$, $t_{k+1} = b$ et $\alpha(a) = \alpha(b)$.
Soit $\overrightarrow{C} = \mathrm{Im}\ \alpha$ avec l'orientation engendrée par α alors

$$\begin{aligned}\int_{\overrightarrow{C}} f \cdot \mathrm{d}\ell &= \sum_{i=1}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle f(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle \, \mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=1}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle g(\|\alpha(t)\|)\, \alpha(t), \alpha'(t) \rangle \, \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

De plus on observe que

$$\langle g(\|\alpha(t)\|)\, \alpha(t), \alpha'(t) \rangle = g(\|\alpha(t)\|) \left[\frac{1}{2} \|\alpha(t)\|^2 \right]' = g(\|\alpha(t)\|)\, \|\alpha(t)\| (\|\alpha(t)\|)'$$

où $'$ dénote la dérivée totale $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ comme dans l'expression α'.
On a donc

$$\begin{aligned}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle g(\|\alpha(t)\|)\alpha(t), \alpha'(t) \rangle \, \mathrm{d}t &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(\|\alpha(t)\|)\, \|\alpha(t)\| (\|\alpha(t)\|)' \, \mathrm{d}t \\ = \int_{\|\alpha(t_i)\|}^{\|\alpha(t_{i+1})\|} g(s) s \, \mathrm{d}s\end{aligned} \tag{4}$$

où on a effectué le changement de variables $s = \|\alpha(t)\|$.
Noter que s'il existe un intervalle ouvert $J \subset]t_i, t_{i+1}[$ telle que $\|\alpha(t)\|$ est constant $\forall t \in J$ alors ce changement de variables (4) est licite seulement sur $]t_i, t_{i+1}[\setminus J$, cependant comme

$$\int_J \langle g(\|\alpha(t)\|)\alpha(t), \alpha'(t) \rangle \, \mathrm{d}t = 0$$

on peut toujours supposer l'égalité (4) vraie.
Ainsi

$$\int_{\overrightarrow{C}} f \cdot \mathrm{d}\ell = \sum_{i=1}^{k} \int_{\|\alpha(t_i)\|}^{\|\alpha(t_{i+1})\|} g(s) s \, \mathrm{d}s = \int_{\|\alpha(a)\|}^{\|\alpha(b)\|} g(s)\, s \, \mathrm{d}s = 0$$

car $\alpha(a) = \alpha(b)$.
Pour calculer un potentiel φ pour f, on fixe un point $a \in \Omega$ et on paramétrise un chemin $C(x)$ de a à x. Le plus simple est de prendre $a = e_1 = (1, 0, ..., 0)$ et $C(x) = [e_1, x] = \{(1-t)e_1 + tx \,|\, t \in [0,1]\}$ pour $x \in \Omega \backslash \{(x_1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^N \,|\, x_1 < 0\}$. On trouve donc

$$\varphi(x) = \int_{C(x)} f \cdot \mathrm{d}\ell = \int_1^{\|x\|} g(s) s \, \mathrm{d}s + C$$

où C est constante. Noter que $\varphi \in C^1\left(\Omega \backslash \{(x_1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^N \,|\, x_1 < 0\}, \mathbb{R}\right)$.

Pour $x \in \{(x_1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^N \mid x_1 < 0\}$ on prolonge φ par continuité. Noter que cela est possible et bien défini car la valeur de φ sur cette demi-droite ne dépend pas de l'intégrale de chemin . On a donc que $\nabla\varphi(x) = f(x)$ pour tout $x \in \Omega$.

ii. En utilisant l'expression ci-dessus on trouve $\phi(x) = \frac{m_1 m_2}{|x|} + C$.