

**Cette série ne fait pas partie de la matière d'examen.**

On sait comment intégrer sur un sous-ensemble paramétrisé de  $\mathbb{R}^n$  en utilisant la matrice Gramienne.

Avec cette définition de volume, le volume d'un (hyper-)cube d'arêtes unitaire de  $\mathbb{R}^n$  est  $1^n = 1 \forall n$ ; et le volume d'une des (hyper-)faces de ce cube unitaire est  $1^{(n-1)} = 1$ , ce qui implique que le volume total de la 'surface' de ce cube (i.e. la somme du volume de toutes ses (hyper-)faces) est  $2n \times 1^{(n-1)} = 2n$ . En prenant la limite  $n \rightarrow \infty$ , on obtient que le volume du cube reste constant, tandis que la surface totale  $2n \rightarrow \infty$ .

Le but des exercices suivants est de faire une réflexion analogue pour la sphère de rayon  $R$  de  $\mathbb{R}^n$ .

1. Soit  $R > 0$  le rayon (scalaire) d'une sphère. Vérifier, en utilisant des intégrales de volumes, que les puissances de  $R$  sont justes.

Dimension	"Surface $S_N$ "	"Volume $V_N$ "
$N = 1$	2	$2R$
$N = 2$	$2\pi R$	$\pi R^2$
$N = 3$	$4\pi R^2$	$\frac{4}{3}\pi R^3$
$N = 4$		
	$\vdots$	
$N$	$a_N R^{N-1}$	$b_N R^N$

2. Montrer que  $a_N$  et  $b_N$  défini en 1 ont la propriété que  $a_N = N b_N$ .
3. Montrer que

$$\frac{b_N}{b_{N+2}} = \frac{(N+2)b_{N-1}}{(N+1)b_{N+1}}$$

4. Esquisser le graphe du volume  $V_N$  et de la surface  $S_N$  d'une sphère unité en fonction de la dimension  $N$ .

**Bonnes fêtes !**